第 17 卷 第 3 期 高能物理与核物理 Vol. 17, No. 3
1993 年 3 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1993

WZNW 模型的共形约化,扩展的手征代数及相应的 Toda 类可积模型 (II) 一个例子

侯伯宇 赵 柳
(西北大学现代物理所,西安 710069)

摘 要

为了说明文献[12]的方法,我们在 sl_{2p+q} 的 (pqp) 分块阶化下,利用 $(pqp)_2$ Toda 系统的正则形式明显构造了相应的代数 $W[(pqp)_2]$,并讨论了它的各种极限情形及其与 $W[(pq+p)_1]$ 同构的特点.

一、引 言

WZNW 模型的共形约化、共形不变的(广义) Toda 模型以及(扩展的)W代数之间存在密切的联系. 这种联系正受到越来越多的重视[1-11],并且利用这些联系来构造更多的共形可积模型[2-5,8,10]和推广的W代数已被证实为一种有效的手段.

在[12]中,我们推广了 [6]—[11] 的结果,对任意整数阶化下受 d 阶正规约束的 WZNW 模型作了研究,给出了广义 W 代数——W$[g(H,d)]$ 的基的一种取法——O'Raifeartaigh 规范,同时导出了相应的广义 Toda 理论的运动方程. 这些结果之所以重要,是因为 W$[g(H,d)]$ 描述了相应的 Cons$[g(H,d)]$ 广义 Toda 场的手征对称性,同时又可利用广义 Toda 场对 W$[g(H,d)]$ 的生成元作玻色化,从而利用 Toda 理论的正则 Poisson 括号来明显构造出相应W代数的生成关系. 为了说明上述方法,本文将以 l_{2p+q} 在 (pqp)分块阶化下的二级约束为例,具体构造出相应的代数 W$[(pqp)_2]$.

二、sl_N 的分块阶化

在[12]中我们利用 Cartan 子代数元H的本征值对任意非紧半单李代数的整数阶化作了标记,进而区分不同的共形约化方案. 对于 sl_N 代数,这种H阶化的方法也可以等效地用定义表示中 sl_N 的矩阵的块对角分割来表示. 这种分割就是先将整数N作整数分割,

$$N=\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i, \tag{2.1}$$

本文 1991 年 11 月 22 日收到.

然后根据不同的 $\{\alpha_i\}$，将 sl_N 的表示矩阵分为块对角的矩阵，其中对角线上的方子矩阵的大小依次为 $\alpha_1^2,\alpha_2^2,\cdots,\alpha_{m+1}^2$。注意分割 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$ 相应于最大阶为 m 的一种阶化，其中对角线上方子矩阵中的元素属于零阶，第一次对角线中的元素属于 1 阶，等等。

在本文中我们把相应于阶化$(\alpha_1,\cdots\alpha_{m+1})$的 d 阶正规约束记为$\mathrm{Cons}[(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1})_d]$，相应的W代数记为$W[(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1})_d]$。作为例子，我们将着重讨论如何利用$\mathrm{Cons}[(pqp)_2]$ Toda 场来构造 $W[(pqp)_2]$ 代数。这种方法在更一般的情形下显然也可以应用。

三、$\mathrm{Cons}[(pqp)_2]$ Toda 系统及其正则 Poisson 括号

所谓 $\mathrm{Cons}[g(H,d)]$Toda 系统，指的是如下的约束系统[12]

$$\bar\partial(\partial g g^{-1})=0,\qquad \partial(g^{-1}\bar\partial g)=0, \tag{3.1a}$$

$$\langle g_-,\partial g g^{-1}-\mu^{(d)}\rangle=0,\ \langle g_+,g^{-1}\bar\partial g-\nu^{(-d)}\rangle=0 \tag{3.1b}$$

在去掉所有非独立的自由度后剩下的非线性方程(式中符号约定与[12]相同)。对任意H和 $d=2$，其运动方程已在[10]、[12]中给出，有效作用量在[10]中给出，

$$\begin{aligned}I[B,\Psi^{(\pm1)}]=S_{\mathrm{WZNW}}(B)+\frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\langle(ad\Psi^{(1)}\nu^{(-2)})\partial\Psi^{(1)}-(ad\Psi^{(-1)}\mu^{(2)})\bar\partial\Psi^{(-1)}\rangle\\-\kappa\int d^2\xi\langle B^{-1}\mu^{(2)}B\nu^{(-2)}-B^{-1}(ad\Psi^{(-1)}\mu^{(2)})B(ad\Psi^{(1)}\nu^{(-2)})\rangle,\end{aligned} \tag{3.2}$$

式中诸场量与 WZNW 场 g 的关系为

$$g=ABC,\ A\in G_-,\ B\in G_0,\ C\in G_+, \tag{3.3a}$$

$$A=\exp(\Psi^{(-m)})\cdot\exp(\Psi^{(-m+1)})\cdots\exp(\Psi^{(-1)}), \tag{3.3b}$$

$$C=\exp(\Psi^{(1)})\exp(\Psi^{(2)})\cdots\exp(\Psi^{(m)}). \tag{3.3c}$$

在 sl_{2p+q} 的 (pqp) 阶化下，$m=2$，我们可以进一步将(3.3)中各场量表示为

$$\Psi^{(-2)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\theta^-&0&0\end{pmatrix},\ \Psi^{(-1)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\\phi_1^-&0&0\\0&\phi_2^-&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{pmatrix},\ \det b_1\cdot\det b_2\cdot\det b_3=1 \tag{3.4}$$

$$\Psi^{(1)}=\begin{pmatrix}0&\phi_1^+&0\\0&0&\phi_2^+\\0&0&0\end{pmatrix},\ \Psi^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&\theta^+\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

正规约束 $\mu^{(2)}$ 和 $\nu^{(-2)}$ 选取为

$$\mu^{(2)}=\begin{pmatrix}I&0&M\\0&I&0\\0&0&I\end{pmatrix},\ \nu^{(-2)}=\begin{pmatrix}I&0&0\\0&I&0\\\bar M&0&I\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

式中M和 $\bar M$ 作为单独的矩阵时均为单位矩阵 I_p。

象通常一样，我们将只关心 $W[(pqp)_2]$ 的正手征部分。在此前提下所有 Poisson 括号均为等光锥变量 $\bar z$ 的 Poisson 括号。在作用量(3.2)中，将 $\bar z$ 作为时间参数看待，则场

$\Psi^{(\pm1)}$的运动学项只剩一项

$$I_{\rm kin}[\phi_1^-,\phi_2^-]=-\frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\langle(ad\Psi^{(-1)}\mu^{(2)})\bar{\partial}\Psi^{(-1)}\rangle$$

$$=\frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\{(\bar{\partial}\phi_1^-)_{ji}(\phi_2^-)_{p+q+i,j}-(\bar{\partial}\phi_2^-)_{ji}(\phi_1^-)_{i,j-p-q}\},\tag{3.6}$$

式中 ϕ_1^-、ϕ_2^- 的下标是 $\Psi^{(-1)}$ 的相应矩阵元指标。以后区分 sl_{2p+q} 子矩阵的矩阵元时我们仍采用这一约定。

由上式，显然有

$$\pi(\phi_1^-)_{ij}\equiv\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\bar{\partial}\phi_1^-)_{ji}}=\frac{\kappa}{2}(\phi_2^-)_{p+q+i,j},\tag{3.7a}$$

$$\pi(\phi_2^-)_{ij}\equiv\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\bar{\partial}\phi_2^-)_{ji}}=-\frac{\kappa}{2}(\phi_1^-)_{i,j-p-q}.\tag{3.7b}$$

这些正则动量满足如下的正则 Poisson 括号

$$\{(\phi_1^-)_{ij}(z),\pi(\phi_1^-)_{kl}(z')\}=\delta_{il}\delta_{jk}\delta(z-z'),\tag{3.8a}$$

$$\{(\phi_2^-)_{ij}(z),\pi(\phi_2^-)_{kl}(z')\}=\delta_{il}\delta_{jk}\delta(z-z').\tag{3.8b}$$

换成 ϕ_1^- 与 ϕ_2^- 的 Poisson 括号，我们有

$$\{(\phi_1^-)_{ij}(z),(\phi_2^-)_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\delta_{il}\delta_{j+p+q,k}\delta(z-z'),\tag{3.9a}$$

$$\{(\phi_2^-)_{ij}(z),(\phi_1^-)_{kl}(z')\}=-\frac{2}{\kappa}\delta_{jk}\delta_{i-p-q,l}\delta(z-z').\tag{3.9b}$$

除此之外，我们还有

$$\{(\phi_1^-)_{ij}(z),(\phi_1^-)_{kl}(z')\}=\{(\phi_2^-)_{ij}(z),(\phi_2^-)_{kl}(z')\}=0.\tag{3.9c}$$

场 B 的 Poisson 括号由如下的 Kac-Moody 流代数给出，

$$\{J_b^B(z),J_b^B(z')\}=f^{abc}J_c^B(z)\delta(z-z')+\frac{\kappa}{2}g^{ab}\delta'(z-z').\tag{3.10}$$

式中

$$J^B=-\frac{\kappa}{2}\partial BB^{-1}=-\frac{\kappa}{2}$$

Block diag $(\partial b_1b_1^{-1},\partial b_2b_2^{-1},\partial b_3b_3^{-1})$, $J_a^B=\langle\sigma_aJ^B\rangle,\sigma_a$ 满足 $[\sigma_a,\sigma_b]=f^{abc}\sigma_c$, $\langle\sigma_a\sigma_b\rangle=g^{ab}$，它是 $s(gl_p\oplus gl_q\oplus gl_p)$ 的元素。利用 J^B 的矩阵元 $(\partial b_\alpha b_\alpha^{-1})_{ij}$，(3.10) 式成为

$$\begin{aligned}\{(\partial b_\alpha b_\alpha^{-1})_{ij}(z),(\partial b_\beta b_\beta^{-1})_{kl}(z')\}=&\frac{2}{\kappa}\delta_{\alpha\beta}\{[\delta_{il}(\partial b_\alpha b_\alpha^{-1})_{kj}(z)\\&-\delta_{jk}(\partial b_\alpha b_\alpha^{-1})_{il}(z)]\delta(z-z')+\delta_{kj}\delta_{il}\delta'(z-z')\}\\&-\frac{2}{\kappa}\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{1}{N}\delta'(z-z'),\ N=2p+q.\end{aligned}\tag{3.11}$$

四、W$[(pqp)_2]$ 的基—— O'Raifeartaigh 规范

对于 sl_{2p+q} WZNW 模型的 Cons $[(pqp)_2]$ 约化，相应于方程 (3.1b) 的流 $J=$

∂gg^{-1} 在任意规范下形为

$$J=\begin{pmatrix} X & O & M \\ R & Y & O \\ T & S & Z \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

其中M就是 $\mu^{(2)}$ 的子矩阵 M。由于 $d=2$，这一约束系统的规范群元形状为[12]

$$\alpha(a)=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ a & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

用α对J作规范变换，我们有

$$\begin{aligned} J &\to \alpha J\alpha^{-1}+\partial\alpha\alpha^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} X-Ma & 0 & M \\ R & Y & 0 \\ T+aX-(Z+aM)a+\partial a & S & Z+aM \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

选择 $\bar{M}$，使得 $M\bar{M}$ 成为 (pqp) 分块矩阵左上角的单位子矩阵，我们有

$$j\equiv Z\bar{M}\to j+a. \tag{4.4}$$

用 j 作参数生成一个规范群元 $\alpha(j)=\alpha(a\longleftrightarrow j)$，并用 $\alpha^{-1}(j)$ 对(4.1)作规范变换，我们得到

$$\begin{aligned} J\to J_{(2)} &= \begin{pmatrix} X+Mj & 0 & M \\ R & Y & 0 \\ T-jX+(Z-jM)j-\partial j & S & Z-jM \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} X_{(2)} & 0 & M \\ R_{(2)} & Y_{(2)} & 0 \\ T_{(2)} & S_{(2)} & Z_{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

容易验证，$J_{(2)}$的每一个分量在规范变换(4.3)、(4.4)下均为规范不变量．此外，由于(4.4)式以及M作为独立矩阵为单位矩阵的约定，不难看出

$$Z_{(2)}\equiv 0. \tag{4.6}$$

因此 $W[(p,q,p)_2]$ 的 O'Raifeartaigh 规范采取如下的形状

$$J^{OR}=\begin{pmatrix} X & 0 & M \\ R & Y & 0 \\ T & S & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

五、用 $(pqp)_2$Toda 场对 $W[(pqp)_2]$ 作玻色化

我们要利用$(pqp)_2$Toda 场的正则形式构造W代数 $W[(pqp)_2]$，关键的一点是要建立 $W[(pqp)_2]$ 的基元素与 Toda 场的联系。这一联系恰好由刚刚求出的 O'Raifeartaigh 给出。

回想 $g=ABC$，$A=\exp\Psi^{(-2)}\exp\Psi^{(-1)}$，$C=\exp\Psi^{(1)}\exp\Psi^{(2)}$。把这些关系和(3.4)式代入 $J=\partial gg^{-1}$ 中，我们得到

$$J=\left[\begin{array}{c|c|c}
-\partial\phi_1^- +\gamma\left(-\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)+\partial b_1b_1^{-1} & \alpha-\gamma\phi_2^- & \gamma \\
\hline
\begin{array}{l}\partial\phi_1^- +\phi_1^-\partial b_1b_1^{-1}-\partial b_2b_2^{-1}\phi_1^- -\phi_1^-\alpha\phi_1^- \\ \quad +(\phi_1^-\gamma+\beta)\left(-\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\end{array} & \begin{array}{l}\partial b_2b_2^{-1}+\phi_1^-\alpha \\ \quad -(\phi_1^-\gamma+\beta)\phi_2^-\end{array} & \beta+\phi_1^-\gamma \\
\hline
\begin{array}{l}\partial\theta^- -\frac{1}{2}(\partial\phi_2^-\phi_1^- -\phi_2^-\partial\phi_1^-)-\left(\theta^- +\frac{1}{2}\right. \\ \left.\cdot\phi_2^-\phi_1^-\right)\alpha\phi_1^- +\left[\left(\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\gamma\right. \\ \left.+\phi_2^-\beta\right]\left(-\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)+\left(\theta^- +\frac{1}{2}\right. \\ \left.\cdot\phi_2^-\phi_1^-\right)\partial b_1b_1^{-1}-\phi_2^-\partial b_2b_2^{-1}\phi_1^{-1} \\ -\partial b_3b_3^{-1}\left(\theta^- -\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\end{array} & \begin{array}{l}\partial\phi_2^- +\phi_2^-\partial b_2b_2^{-1} \\ -\partial b_3b_3^{-1}\phi_2^- \\ +\left(\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\alpha \\ -\left[\left(\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\right. \\ \left.r+\phi_2^-\beta\right]\phi_2^-\end{array} & \begin{array}{l}\partial b_3b_3^{-1}+\phi_2^-\beta \\ +\left(\theta^- +\frac{1}{2}\right. \\ \left.\cdot\phi_2^-\phi_1^-\right)\gamma\end{array}
\end{array}\right]. \tag{5.1}$$

式中，

$$\begin{aligned}
\alpha &= b_1\partial\phi_1^+ b_2^{-1}, \\
\beta &= b_2\partial\phi_2^+ b_3^{-1}, \\
\gamma &= b_1\left\{\partial\theta^+ -\frac{1}{2}(\partial\phi_1^+\phi_2^+ -\phi_1^+\partial\phi_2^+)\right\}b_3^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

在(5.1)中引入约束条件

$$\gamma = M,\ \alpha-\gamma\phi_2^- = 0,\ \beta+\phi_1^-\gamma = 0, \tag{5.3}$$

我们得到

$$J^{\text{cons.}}=\left[\begin{array}{c|c|c}
\partial b_1b_1^{-1}-M\left(\theta^- +\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right) & 0 & M \\
\hline
\partial\phi_1^- +\phi_1^-\partial b_1b_1^{-1}-\partial b_2b_2^{-1}\phi_1^- -\phi_1^-M\phi_2^-\phi_1^- & \partial b_2b_2^{-1}+\phi_1^-M\phi_2^- & 0 \\
\hline
\begin{array}{l}\partial\theta^- -\frac{1}{2}(\partial\phi_2^-\phi_1^- -\phi_2^-\partial\phi_1^-)+\left(\theta^-\right. \\ \left.+\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\partial b_1b_1^{-1}-\phi_2^-\partial b_2b_2^{-1}\phi_1^- \\ -\partial b_3b_3^{-1}\left(\theta^- -\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)-\left(\theta^-\right. \\ \left.+\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)M(\phi_2^-\phi_1^-)-\left(\theta^-\right. \\ \left.-\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)M\cdot\left(\theta^- -\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-\right)\end{array} & \begin{array}{l}\partial\phi_2^- +\phi_2^-\partial b_2b_2^{-1} \\ -\partial b_3b_3^{-1}\phi_2^- \\ +\phi_2^-\phi_1^-M\phi_2^-\end{array} & \begin{array}{l}\partial b_3b_3^{-1} \\ +\left(\theta^- -\frac{1}{2}\right. \\ \left.\cdot\phi_2^-\phi_1^-\right)M\end{array}
\end{array}\right]. \tag{5.4}$$

在 (5.4) 中，除了具有动力学 Poisson 括号的场 $\phi_{1,2}^-,\partial b_ib_i^{-1}(i=1,2,3)$ 外，还含有一个多余的参数 θ^-。这一参数反映了 J^{cons} 的规范自由度。选择规范条件

$$\theta^- = -\partial b_3b_3^{-1}\overline{M}+\frac{1}{2}\phi_2^-\phi_1^-, \tag{5.5}$$

流(5.4)的右下角变为零，这样(5.4)就成为(4.7)中的 O'Raifeartaigh 规范，其中

$$X = \partial b_1 b_1^{-1} + M\partial b_3 b_3^{-1}\bar{M} - M\psi_2^- \psi_1^-, \tag{5.6a}$$

$$Y = \partial b_2 b_2^{-1} + \psi_1^- M\psi_2^-, \tag{5.6b}$$

$$R = \partial\psi_1^- + \psi_1^-\partial b_1 b_1^{-1} - \partial b_2 b_2^{-1}\psi_1^- - \psi_1^- M\psi_2^-\psi_1^-, \tag{5.6c}$$

$$S = \partial\psi_2^- + \psi_2^-\partial b_2 b_2^{-1} - \partial b_3 b_3^{-1}\psi_2^- + \psi_2^-\psi_1^- M\psi_2^-, \tag{5.6d}$$

$$\begin{aligned} T = &-\partial(\partial b_3 b_3^{-1})\bar{M} + \psi_2^-\partial\psi_1^- - (\partial b_3 b_3^{-1})\bar{M}(\partial b_1 b_1^{-1}) + (\psi_2^-\psi_1^-)(\partial b_1 b_1^{-1}) \\ &- \psi_2^-\partial b_2 b_2^{-1}\psi_1^- + (\partial b_3 b_3^{-1})(\psi_2^-\psi_1^-) - (\psi_2^-\psi_1^-)M(\psi_2^-\psi_1^-). \end{aligned} \tag{5.6e}$$

这些关系式就是在我们选定的 O'Raifeartaigh 规范下 $W[(pqp)_2]$ 生成元的玻色化表示。

我们也可以选取其他形式的 DS 规范来作上述玻色化。例如，选取规范条件

$$\theta^- = \frac{1}{2}(\bar{M}\partial b_1 b_1^{-1} - \partial b_3 b_3^{-1}\bar{M}), \tag{5.7}$$

流 $J^{\rm cons}$ 被相应地定为如下形式，

$$J^{\rm DS} = \begin{pmatrix} j & 0 & M \\ G^- & \mathscr{J} & 0 \\ L & G^+ & \bar{M}jM \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

容易验证，规范(4.7)和(5.8)之间可通过由群元

$$\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\bar{M}j & 0 & I \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

生成的规范变换相联系，

$$\alpha J^{\rm DS}\alpha^{-1} + \partial\alpha\alpha^{-1} = J^{OR}, \tag{5.10}$$

而两个规范下 $W[(pqp)_2]$ 不同基组间具有如下关系

$$\begin{aligned} &X = 2j,\ Y = \mathscr{J},\ R = G^-, \\ &S = G^+, T = L - \bar{M}j^2 - \bar{M}\partial j. \end{aligned} \tag{5.11}$$

六、$W[(pqp)_2]$ 的生成关系

为了明显构造出 $W[(pqp)_2]$，首先要将生成元的各个分量区分开来。采用 J^{OR} 的矩阵元指标，我们有

$$X_{ij} = (\partial b_1 b_1^{-1})_{ij} + (\partial b_3 b_3^{-1})_{p+q+i,p+q+j} - (\psi_2^-)_{p+q+i,k}(\psi_1^-)_{kj}, \tag{6.1a}$$

$$Y_{ij} = (\partial b_2 b_2^{-1})_{ij} + (\psi_1^-)_{il}(\psi_2^-)_{p+q+l,j}, \tag{6.1b}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} = &(\partial\psi_1^-)_{ij} + (\psi_1^-)_{il}(\partial b_1 b_1^{-1})_{lj} - (\partial b_2 b_2^{-1})_{il}(\psi_1^-)_{lj} \\ &- (\psi_1^-)_{ik}(\psi_2^-)_{p+q+k,l}(\psi_1^-)_{lj}, \end{aligned} \tag{6.1c}$$

$$\begin{aligned} S_{ij} = &(\partial\psi_2^-)_{ij} + (\psi_2^-)_{il}(\partial b_2 b_2^{-1})_{lj} - (\partial b_3 b_3^{-1})_{il}(\psi_2^-)_{lj} \\ &+ (\psi_2^-)_{ik}(\psi_1^-)_{kl}(\psi_2^-)_{p+q+l,j}, \end{aligned} \tag{6.1d}$$

$$\begin{aligned} T_{ij} = &-\partial(\partial b_3 b_3^{-1})_{i,p+q+j} + (\psi_2^-)_{ik}(\partial\psi_1^-)_{kj} - (\partial b_3 b_3^{-1})_{i,p+q+k}(\partial b_1 b_1^{-1})_{kj} \\ &+ (\psi_2^-)_{ik}(\psi_1^-)_{kl}(\partial b_1 b_1^{-1})_{lj} - (\psi_2^-)_{ik}(\partial b_2 b_2^{-1})_{kl}(\psi_1^-)_{lj} \end{aligned}$$

$$+(\partial b_3 b_3^{-1})_{ik}(\psi_2^-)_{kl}(\psi_1^-)_{lj}-(\psi_2^-)_{ik}(\psi_1^-)_{kl}(\psi_2^-)_{p+q+l,n}(\psi_1^-)_{nj}. \tag{6.1e}$$

利用 $(pqp)_2$ Toda 系统的正则 Poisson 括号(3.9)、(3.11)式，经过冗长的计算，我们得到

$$\{X_{ij}(z),X_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\{[\delta_{il}X_{kj}(z)-\delta_{jk}X_{il}(z)]\delta(z-z')$$

$$+2\left(\delta_{jk}\delta_{il}-\frac{2}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\delta'(z-z')\Big\}, \tag{6.2}$$

$$\{X_{ij}(z),Y_{kl}(z')\}=-\frac{2}{\kappa}\frac{2}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\delta'(z-z'), \tag{6.3}$$

$$\{X_{ij}(z),R_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\delta_{il}R_{kj}(z)\delta(z-z'), \tag{6.4}$$

$$\{X_{ij}(z),S_{kl}(z')\}=-\frac{2}{\kappa}\delta_{p+q+j,k}S_{p+q+i,l}(z)\delta(z-z'), \tag{6.5}$$

$$\{Y_{ij}(z),Y_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\Big\{[\delta_{il}Y_{kj}(z)-\delta_{jk}Y_{il}(z)]\delta(z-z')$$

$$+\left(\delta_{jk}\delta_{il}-\frac{2}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\delta'(z-z')\Big\}, \tag{6.6}$$

$$\{Y_{ij}(z),R_{kl}(z')\}=-\frac{2}{\kappa}\delta_{jk}R_{il}(z)\delta(z-z'), \tag{6.7}$$

$$\{Y_{ij}(z),S_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\delta_{il}S_{kj}(z)\delta(z-z'), \tag{6.8}$$

$$\{R_{ij}(z),R_{kl}(z')\}=0, \tag{6.9}$$

$$\{S_{ij}(z),S_{kl}(z')\}=0, \tag{6.10}$$

$$\{R_{ij}(z),S_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\{\delta_{il}T_{kj}(z)+\delta_{p+q+i,k}[\partial Y_{jl}(z)-Y_{in}(z)Y_{nl}(z)]$$

$$+X_{k-p-q,j}(z)Y_{il}(z)\}\delta(z-z')+\frac{2}{\kappa}\{2\delta_{p+q+i,k}Y_{il}(z)$$

$$-\delta_{il}X_{k-p-q,j}(z)\}\delta'(z-z')-\frac{2}{\kappa}\delta_{il}\delta_{p+q+i,k}\delta''(z-z'), \tag{6.11}$$

$$\{T_{ij}(z),X_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\{[\delta_{i-p-q,l}T_{p+q+k,j}(z)-\delta_{jk}T_{il}(z)]\delta(z-z')$$

$$-\left[\delta_{i-p-q,l}X_{kj}(z)-\frac{2}{N}\delta_{kl}X_{i-p-q,l}(z)\right]\delta'(z-z')$$

$$-\left(\delta_{jk}\delta_{i-p-q,l}-\frac{2}{N}\delta_{kl}\delta_{i,p+q+j}\right)\delta''(z-z')\Big\}, \tag{6.12}$$

$$\{T_{ij}(z),Y_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\frac{1}{N}\{\delta_{kl}X_{i-p-q,j}(z)\delta'(z-z')$$

$$+\delta_{i,p+q+j}\delta_{kl}\delta''(z-z')\}, \tag{6.13}$$

$$\{T_{ij}(z),R_{kl}(z')\}=\frac{2}{\kappa}\{[\delta_{i-p-q,l}Y_{kn}(z)R_{nj}(z)$$

$$-X_{i-p-q,l}(z)R_{kj}(z)]\delta(z-z')+\delta_{i-p-q,l}R_{kj}(z)\delta'(z-z')\}, \tag{6.14}$$

$$
\begin{aligned}
\{T_{ij}(z),S_{kl}(z')\} = \frac{2}{\kappa}\{[\delta_{p+q+i,k}(\partial S_{il}(z) - S_{in}(z)Y_{nl}(z))\\
+ X_{k-p-q,j}(z)S_{il}(z)]\delta(z-z')\\
+ 2\delta_{p+q+i,k}S_{il}(z)\delta'(z-z')\},
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\{T_{ij}(z),T_{kl}(z')\} = \frac{2}{\kappa}\{[\delta_{p+q+i,k}(\partial T_{il}(z) + \partial^2 X_{i-p-q,l}(z)\\
- S_{in}(z)R_{nl}(z)) + \delta_{i-p-q,l}S_{kn}(z)R_{nj}(z) + X_{k-p-q,j}(z)\\
\cdot (T_{il}(z) + \partial X_{i-p-q,l}(z))\\
- X_{i-p-q,l}(z)T_{kj}(z) - \frac{1}{N}\delta_{i,p+q+j}\partial^2 X_{k-p-q,l}(z)\\
- \frac{1}{N}X_{i-p-q,j}(z)\partial X_{k-p-q,l}(z)]\delta(z-z')\\
+ [\delta_{p+q+i,k}(T_{il}(z) + 2\partial X_{i-p-q,l}(z)) + \delta_{i-p-q,l}T_{kj}(z)\\
+ X_{k-p-q,j}(z)X_{i-p-q,l}(z) - \frac{1}{N}(2\delta_{i,p+q+j}\partial X_{k-p-q,l}(z)\\
+ X_{k-p-q,l}(z)X_{i-p-q,j}(z))]\delta'(z-z')\\
+ \Big[\delta_{p+q+i,k}X_{i-p-q,l}(z) - \delta_{i-p-q,l}X_{k-p-q,j}(z)\\
+ \frac{1}{N}\delta_{k,p+q+l}X_{i-p-q,j}(z)\\
- \frac{1}{N}\delta_{i,p+q+j}X_{k-p-q,l}(z)\Big]\delta''(z-z')\\
- \Big[\delta_{i-p-q,l}\delta_{p+q+i,k} - \frac{1}{N}\delta_{i,p+q+j}\delta_{k,p+q+l}\Big]\delta'''(z-z')\Big\}.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

由于(5.11)式，不难把这一代数在规范(5.8)中写出。

七、关于 W[$(pqp)_2$] 的几点评述

1. Virasoro 子代数

W代数最初是作为 Virasoro 代数的非线性扩张提出来的。根据这种观点，W代数总含有一个特殊元素 Λ，由它来生成 Virasoro 代数，而且W代数的其他所有元素均可选为在Λ下的 Primary 场及其导数的组合[13,14]。

在 W[$(pqp)_2$] 的情形下，能动量张量Λ由下式给出，

$$
\Lambda = T^{\mathrm{sug.}} - \frac{1}{2}\langle \partial J, H\rangle,
\tag{7.1}
$$

其中 T^{sug} 和 J 分别是无约束的 sl_{2p+q} WZNW 理论的 Sugawara 能动量张量和 Kac-Moody 流，H是 (pqp) 分割相应的阶化矩阵

$$
H = (\boldsymbol{m}_p + \boldsymbol{m}_{p+q})\cdot \boldsymbol{H}, \quad (\boldsymbol{m}_a, \boldsymbol{\alpha}_b) = \delta_{ab}.
\tag{7.2}
$$

相应于(7.1)式，W[$(pqp)_2$] 的每个生成元的共形量纲分别为

$$
\Delta(X_{ij}) = \Delta(Y_{ij}) = 1,
$$

$$\Delta(R_{ij}) = \Delta(S_{ij}) = 3/2,$$
$$\Delta(T_{ij}) = 2. \tag{7.3}$$

这个量纲谱与 $N = 2$ 超对称W代数的谱一致．但正如 Bershadsky 在 $p = q = 1$ 的极限情形下所指出的，尽管存在上述相似性，上述两种理论仍具有实质性的差别．

注意在约化的 WZNW 理论中，也常常采用约束的 Kac-Moody 流的 DS 规范来构造相应的能动量张量，

$$\Lambda_{\mathrm{red}} \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(J^{\mathrm{DS}})^2. \tag{7.4}$$

一般说来，Λ 与 Λ_{red} 并不总是一致的，例如对规范(4.7)，

$$\Lambda_{\mathrm{red}} = \mathrm{tr}(TM) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}X^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}Y^2 \neq \Lambda. \tag{7.5}$$

$W[(pqp)_2]$ 的生成元相应于 Λ_{red} 具有不同的量纲谱，

$$\Delta_{\mathrm{red}}(X_{ij}) = \Delta_{\mathrm{red}}(Y_{ij}) = \Delta_{\mathrm{red}}(S_{ij}) = 1,$$
$$\Delta_{\mathrm{red}}(R_{ij}) = \Delta_{\mathrm{red}}(T_{ij}) = 2. \tag{7.6}$$

这种不一致现象的含义是极其深刻的，它给出一种信息，即同一个W代数可能作为具有不同谱的共形理论的手征代数出现．换句话说，量纲谱不同的W代数间可能存在着某种等价关系．

2. O'Raifeartaigh 规范的同构变换

为了更深入地了解不同W代数间存在联系的可能性，我们重新考察 O'Raifeartaigh 规范的形式．在 sl_{2p+q} 的某一自同构映射下，规范(4.7)式可作如下改变，

$$J^{OR} = \begin{pmatrix} X & 0 & I_p \\ R & Y & 0 \\ T & S & 0 \end{pmatrix} \to J^{OR'} = \begin{pmatrix} X & I_p & 0 \\ T & 0 & S \\ R & 0 & Y \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

$J^{OR'}$ 正是 O'Raifeartaigh 等人对 sl_{2p+q} WZNW 模型的最大约化(我们称为 $(pq+p)_1$ 约化) 所构造的广义 DS 规范．在 sl_{2p+q} 的上述同构变换下 J^{OR} 各分量间的 Poisson 括号不受影响，因此我们得到 $W[(pqp)_2]$ 与 $W[(pq+p)_1]$ 同构的结论．实际上，由 (7.1) 和 (7.) 给出的两个 Virasoro 元可以分别看作 $W[(pqp)_2]$ 和 $W[(p,q+p)_1]$ 的 Virasoro 子代数元．由 WZNW 模型的不同约化导致同构的W代数的情形还有很多，对这一问题的详细研究我们已另文给出[15]．

3. $W[(pqp)_2]$ 的各种极限

到目前为止，我们一直是将 p,q 作为固定的任意参数来看待的．如果我们认为 p,q 是整个一类W代数 $W[(pqp)_2]$ 中的一对可调参数，那么相应于 p,q 的各种取值，可得到 $W[(p,q\ p)_2]$ 的各种极限．

$A.\ p \to 0, q \to N.$

在这一极限情形下，(4.7)退化为

$$J^{OR} = Y,$$

其中Y满足标准的 Kac-Moody 流代数. 从这一意义上说,W代数也可看为 Kac-Moody 代数的扩张.

B. $p \to 1, q \to 1$.

这一极限导致著名的 W_3^2 代数, 或记为 W[$(111)_2$]. 据 § 7.2 的讨论, 这一代数与 W[$(12)_1$] 同构,后者亦即 O'Raifeartaigh 等的 sl_3 最大约化的W代数.

C. $p \to 1, q \to N-2$.

这一代数已由 Fuchs[8] 及 Bias 等人[9]分别构造出来,并称之为"玻色超共形代数". W[$(pqp)_2$] 是一个更大的"玻色超共形"代数.

D. $q \to 0$.

这种极限要求 $R = Y = S = 0$, (4.7) 相应退化为

$$J^{OR} = \begin{pmatrix} X & M \\ T & 0 \end{pmatrix}.$$

这一代数相应于广义 Liouville 系统的W代数,它也曾被 O'Raifeartaigh 等人[6]和 Bias 等人[9]用不同的方法分别得到.在我们的情形下,取极限 $q \to 0$ 相应于 $(pqp)_2$ Toda 模型到 $(pp)_1$ Toda 模型的 Hamilton 约化. 这也是一个很有趣的问题. 实际上, $(pqp)_2$ Toda $\to (pp)_1$ Toda 这一约化和共形扰动理论有关. 在约化过程中,较大的共形对称性 W[$(pqp)_2$] 被破缺、而较小的对称性 W[$(pp)_1$] 被保存了下来.

参考文献

[1] J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Phys. Lett.*, **B227**(1989), 214, *Ann. Phys.*, **203**(1991), 76.

[2] Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, IFT/P-24/90.

[3] T. Inami, KUNS 1038, HE(TH)90/14.

[4] L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, DIAS-STP-90-19, ETH-TH/90-20.

[5] L. O'Raifeartaigh, DIAS-STP-90-43, DIAS-STP-90-45.

[6] L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-03.

[7] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-17.

[8] J. Fuchs, *Phys. Lett.*, **B262**(1991), 249.

[9] F. A. Bias, T. Tjin, P. van Driel, *Nucl. Phys.*, **B357**(1991), 632.

[10] L. Chao, NWU/IMP/910525.

[11] M. Bershadsky, IASSNS-HEP-90/44.

[12] Hou Boyu and Zhao Liu, **高能物理与核物理,16(1992).**

[13] A. B. Zamolodchikov, *Theore. Math. Phys.*, **63**(1985), 1205.

[14] V. A. Fatteev and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B280**(1987), 644.

[15] Hou Bo-yu and Chao Liu, On the connections o W algebras from different reductions of WZNW theory, to appear.

Conformally Reduced WZNW Theory, New Extended Chiral Algebras and Their Associated Toda Type Integrable Systems (II) An Example

Hou Boyu　　Zhao Liu

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian* 710069)

Abstract

As an example and application of the method of our previous work, we construct explicitly the W algebra $W[(p\ q\ p)_2]$ by the use of the canonical formalism of the corresponding generalized Toda theory, namely the $(p\ q\ p)_2$ Toda theory. Then we discuss various special limits of $W[(p\ q\ p)_2]$ and point out the isomorphism between $W[(p\ q\ p)_2]$ and $W[(p\ q+p)_1]$.