第17卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 17, No. 1
1993年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1993

WZNW 模型的共形约化，扩展的手征代数及相应的 Toda 类可积模型 (I) 一般构架

侯伯宇 赵柳
(西北大学现代物理所，西安 710069)

摘要

利用李代数$\mathscr{G}$的整数阶化，我们研究了一大批共形约化 WZNW 模型的方案 Cons[$\mathscr{G}(H,d)$]. 在正规约束的条件下，构造了W代数 W[$\mathscr{G}(H,d)$] 的基——约束 Kac-Moody 流的 O'Raifeartaigh 规范，并导出了相应于每个W代数的广义 Toda 类可积模型的运动方程.

一、引言

通过 WZNW 模型的共形约化可以得到 Toda 场论及其手征对称代数——W代数，这一事实正受到越来越多的重视[1-11]. 实际上这种约化已成为获得更多的共形可积模型[2-5,8,10]和推广的W代数[6-9,11]的一种重要手段.

根据前人的工作[1]，W代数可定义为受约束 WZNW 模型的规范不变多项式的 Poisson 括号代数. 在这一意义下，W代数的生成元被归结为约束的 Kac-Moody 流在所谓的 Drinfeld-Sokolov 规范[18]下的分量，而且它们可以用相应 Toda 系统的场量作玻色化表示，从而利用 Toda 理论的正则 Poisson 括号来明显构造出W代数的乘法法则. 按这种思路，在给定的约化方案下构造出约束 Kac-Moody 流的 DS 规范及相应的 Toda 理论是重要的. 对任意第一类约束导致的 Hamilton 约化，流的 DS 规范及 Toda 理论的相应推广已经在文[4—7]中得到. 对第二类约束相应的共形约化，除了在几个极特别的例子下构造了广义的 Toda 理论和W代数[8-11]外，一般的 DS 规范和广义 Toda 理论还未构造出来.

本文的目的正是在各种可能的约化方案下构造出W代数及相应的可积模型. 为了区分不同的约化方案，我们注意到仅用第一类和第二类约束这样的概念是不够的. 因此我们引入约束的阶和正规约束的概念. 在此基础上我们给出任意阶正规约束下 DS 规范的一种取法（称为 O'Raifeartaigh 规范），并构造了相应的广义 Toda 类可积模型. 本文是我们在同一题目下两篇文章的第一部分，陈述一般情形下构造 DS 规范和 Toda 模型

本文 1991 年 11 月 22 日收到.

的方法．在接下来的一篇中我们将研究一个特例以说明我们的方法．

二、李代数的阶化及 WZNW 模型的共形约化

1. 李代数的阶化

我们考虑的 WZNW 模型是建立在非紧半单李群 G 上的．设群 G 的李代数为 $\mathscr{G}$，秩为 r．将 $\mathscr{G}$ 的 r 个基本主权的集合记为 Ω．选择任一子集 $\Omega'\subset\Omega$，定义

$$H=\sum_{m\in\Omega'}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}. \tag{2.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{H}=(H_1,H_2,\cdots,H_r)$ 是 $\mathscr{G}$ 的 Cartan 子代数元排列成的矢量，那么由于

$$(\boldsymbol{m}_i,\boldsymbol{a}_j)=\delta_{ij},\quad\forall\boldsymbol{m}_i\in\Omega,\boldsymbol{a}_i\in\Delta_+, \tag{2.1.2}$$

我们有

$$ad(H)E_i=\begin{cases}E_i & (\text{若 }\boldsymbol{m}_i\in\Omega'),\\ 0 & (\text{否则}).\end{cases} \tag{2.1.3}$$

其中 E_i 为素根根矢量．由此，李代数 $\mathscr{G}$ 将被元素 H 赋予一个整数阶化(称为 H 阶化)，其中每个元素的阶就是它作为 $ad(H)$ 本征矢所相应的本征值．可以证明，若 $\mathscr{G}$ 是有限维的，则 $\mathscr{G}$ 的任一整数阶化均可等价地表达为上述 H 阶化的一种．特别地，相应于元素

$$H=\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{\delta}=\sum_{m\in\Omega}\boldsymbol{m} \tag{2.1.4}$$

的阶化称为主阶化，在其中每个素根根矢量的阶为 1，二级根根矢的阶为 2，等等．

在某一特定的 H 阶化下李代数 $\mathscr{G}$ 自然具有如下的分解

$$\mathscr{G}\simeq\mathscr{G}_-\oplus\mathscr{G}_0\oplus\mathscr{G}_+, \tag{2.1.5}$$

其中 $\mathscr{G}_-$ 和 $\mathscr{G}_+$ 是一对同构的幂零子代数，$\mathscr{G}_0$ 是零阶子代数．显然，Cartan 子代数 $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}_0$．

$\mathscr{G}_-$ 和 $\mathscr{G}_+$ 还可以按阶进行分解，

$$\mathscr{G}_-\simeq\mathscr{G}^{(-m)}\oplus\mathscr{G}^{(-m+1)}\oplus\cdots\oplus\mathscr{G}^{(-1)}, \tag{2.1.6a}$$

$$\mathscr{G}_+\simeq\mathscr{G}^{(1)}\oplus\mathscr{G}^{(2)}\oplus\cdots\oplus\mathscr{G}^{(m)}, \tag{2.1.6b}$$

其中 m 为这种 H 阶化下 $\mathscr{G}$ 的最大阶．为了以后应用，我们特别指出 $\mathscr{G}_-$ 和 $\mathscr{G}_+$ 的两族相互嵌套的子代数

$$\mathscr{G}_{\pm k}\simeq\bigoplus_{l=k}^{m}\mathscr{G}^{(\pm l)},\quad k=1,2,\cdots,m \tag{2.1.7}$$

$$\mathscr{G}_\pm=\mathscr{G}_{\pm1}\supset\mathscr{G}_{\pm2}\supset\cdots\supset\mathscr{G}_{\pm m}, \tag{2.1.8}$$

其中每个子代数又可以生成 G 的一个子群 $G_{\pm k}$．

由于 $\mathscr{G}_{\pm k}$ 的零幂性．在 $\mathscr{G}$ 的 Killing 型 $\langle,\rangle$ 下，我们有

$$\langle\mathscr{G}_{\pm k},\mathscr{G}_{\pm k}\rangle=0. \tag{2.1.9}$$

此外，由于 $\mathscr{G}$ 的阶化，

$$\langle\mathscr{G}^{(i)},\mathscr{G}^{(j)}\rangle=0,\ (\text{除非 } i+j=0). \tag{2.1.10}$$

2. WZNW 模型的共形约化·正规约束

现在我们讨论李群G上的 WZNW 模型的共形约化。为简单起见，我们将只讨论 WZNW 场的全纯部分，反全纯部分的对应是显而易见的。

首先我们给出共形约化的一种严格标记。在每一约化方案下，Kac-Moody 流 $J=\frac{\kappa}{2}\partial gg^{-1}$ 在某一特定的H阶化下所有正阶部分(除去d阶)被约束为零，而在d阶J的某些分量被置为非零常数。我们称这种约束为$\mathscr{G}$上 Kac-Moody 流在H阶化下的d阶约束，记为 $\mathrm{Cons}[\mathscr{G}(H,d)]$。若用 $\mu^{(d)}\in\mathscr{G}^{(d)}$ 表示J在约束后的正阶分量，那么约束 $\mathrm{Cons}[\mathscr{G}(H,d)]$ 可用方程表示为

$$\langle\mathscr{G}_-,J-\mu^{(d)}\rangle=0. \tag{2.2.1}$$

对 $d=1$，上述约束系统退化为 O'Raifeartaigh 等讨论过的第一类约束系统[6]，对 $d>1$，方程 (2.2.1) 可改写为

$$J^{(i)}=0,\quad 1\leqslant i<d. \tag{2.2.2a}$$

$$J^{(d)}=\mu^{(d)}, \tag{2.2.2b}$$

$$J^{(i)}=0,\quad d<i\leqslant m. \tag{2.2.2c}$$

显然这组约束中既含有第一类约束又含有第二类约束。按 Dirac 的约束理论，系统中出现一个第一类约束，相应就诱导出一个规范变换的自由度。的确，对系统 (2.2.1)，不难验证它在规范群 G_{-d} 的作用下是不变的，规范自由度数为 $\dim\mathscr{G}_d$。

现在我们来计算剩余自由度个数。约束前总自由度数为 $\dim\mathscr{G}$，去掉 $\dim\mathscr{G}_+$ 个约束，同时去掉 $\dim\mathscr{G}_d$ 个规范自由度，最后的剩余自由度个数为

$$\dim\mathscr{G}-\dim\mathscr{G}_+-\dim\mathscr{G}_d=\dim\mathscr{G}_0+\sum_{k=1}^{d-1}\dim\mathscr{G}^{(k)}. \tag{2.2.3}$$

在下一节，我们将用文[6]的方式对任意的d给出 DS 规范的一种构造。为此我们引入正规约束的概念。我们已经知道，在规范群 G_{-d} 的作用下，J的正阶部分不变，改变的只是J在 $\mathscr{G}_-\oplus\mathscr{G}_0$ 上的分量。特别地，考虑规范群的子群 G_{-k}。若存在一些元素 $E^{(-k)}\in\mathscr{G}^{(-k)}$ 使得 $ad\mu^{(d)}E^{(-k)}=0$，那么J在 $\mathscr{G}^{(d-k)}$ 阶相应的某个分量就对 $E^{(-k)}$ 生成的规范交换不变，换句话说，能改变J在 $\mathscr{G}_-\oplus\mathscr{G}_0$ 上分量的有效规范变换的数目减少了。若对某个 $k\geqslant d$，我们有 $(ad\mu^{(d)})(\mathscr{G}^{(-k)})=0$，即 $\mathscr{G}^{(-k)}\in \mathrm{Ker}\,ad\mu^{(d)}\cap\mathscr{G}_{-d}$，那么规范群的子群 G_{-k} 作用在J上的效果将与 G_{-k-1} 的效果相同。我们称这种有效的规范群变小的现象为规范变换的简并，相应的约束称为简并的约束。作为极限情形，我们称使得 $\mathrm{Ker}\,ad\mu^{(d)}\cap\mathscr{G}_{-d}=0$ 的 $\mu^{(d)}$ 为正规约束。今后我们将只考虑正规约束。

应该指出，没有理由认为非正规或有简并的约束不给出W代数和可积模型。这些约束除了会使构造 DS 规范的递推过程在某一环节上缺失之外，其他方面与正规约束并无更多的不同。

三、广义的 Drinfeld-Sokolov 规范 · O'Raifeartaigh 构造

所谓 DS 规范，指的是约束的 Kac-Moody 流在规范变换后采取的某种形态，在其中，流的任一分量或者为常数（约束本身）或者是规范不变量．对于确定的约化方案 $\mathrm{Cons}[\mathscr{G}(H,d)]$，DS 规范的取法并不唯一，但不同的取法间可通过以规范不变量为参数的规范变换相互转换．在本节中我们采用的构造 DS 规范的方法可看作 O'Raifeartaigh 等人对 $d=1$ 情形所作的 DS 构造的推广，因而我们称相应的 DS 规范为 O'Raifeartaigh 规范．

将约束的 Kac-Moody 流按 H 阶化分解，

$$J^{\mathrm{cons.}}=\mu^{(d)}+\sum_{k=0}^{m}J^{(-k)}. \tag{3.1}$$

作用在 J^{cons} 上的规范变换形为

$$J^{\mathrm{cons}}\to A_{dj}(\alpha)J^{\mathrm{cons}}=\alpha J^{\mathrm{cons}}\alpha^{-1}+\partial\alpha\alpha^{-1},\ \alpha\in G_{-d}. \tag{3.2}$$

考虑某个这样的 J^{cons}，记为 $J_{\langle -d-l\rangle}(l=0,1,\cdots m-d)$，作用在其上的规范变换仅仅取值在 G_{-d-l} 上．设规范群元素为

$$\alpha_{-d-l}(a^{(-d-l)})=\exp(a^{(-d-l)}\cdot\tilde{E}^{(-d-l)}+\mathscr{O}(\mathscr{G}^{(-d-l)})), \tag{3.3}$$

其中 $\tilde{E}^{(-d-l)}$ 表示 $\mathscr{G}^{(-d-l)}$ 中所有的生成元，$\mathscr{O}(\mathscr{G}^{(-d-l)})\in\mathscr{G}_{-d-l-1}$，我们有

$$\begin{aligned}J_{\langle -d-l\rangle}&\to A_{dj}[\alpha_{-d-l}(a^{(-d-l)})]J_{\langle -d-l\rangle}\\&=J_{\langle -d-l\rangle}+[\log\alpha_{-d-l}(a^{(-d-l)}),\mu^{(d)}]+\mathscr{O}(\mathscr{G}^{(-l)}).\end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 $\mu^{(d)}$ 是正规的，上式第二项一定非零，因此 $J_{\langle -d-l\rangle}$ 在 G_{-d-l} 作用下变化的最高阶部分在 $\mathscr{G}^{(-l)}$ 中．在 $\mathscr{G}^{(-l)}$ 中选适当的基组，使上式成为

$$J_{\langle -d-l\rangle}\to J_{\langle -d-l\rangle}+a^{(-d-l)}\cdot\tilde{E}^{(-l)}+\mathscr{O}(\mathscr{G}^{(-l)}). \tag{3.5}$$

相应地，在 $\mathscr{G}^{(l)}$ 中选一组与 $\{\tilde{E}^{(-l)}\}$ 正交的基 $\{\tilde{E}^{(l)}\}$，

$$\langle\tilde{E}_i^{(-l)},\tilde{E}_j^{(l)}\rangle=\delta_{ij}, \tag{3.6}$$

则 $J_{\langle -d-l\rangle}$ 在 $\tilde{E}_r^{(-l)}$ 上的分量

$$j_r^{(-d-l)}=\langle J_{\langle -d-l\rangle}\tilde{E}_r^{(l)}\rangle \tag{3.7}$$

在规范变换 (3.5) 下作平移变换，

$$j_r^{(-d-l)}\to j_r^{(-d-l)}+a_r^{(-d-l)}. \tag{3.8}$$

以上述 $j_r^{(-d-l)}$ 作为参数按 (3.3) 的方式生成群元 $\alpha_{-d-l}(j^{(-d-l)})$，并对 $J_{\langle -d-l\rangle}$ 作如下变换

$$J_{\langle -d-l\rangle}\to J_{\langle -d-l-1\rangle}=A_{dj}[\alpha_{-d-l}^{-1}(j^{(-d-l)})]J_{\langle -d-l\rangle}, \tag{3.9}$$

则根据 G_{-d-l} 的零幂性质容易验证，G_{-d-l} 作用在 $J_{\langle -d-l-1\rangle}$ 上将不改变它的第 $-l$ 阶，这样，有效的规范群缩小为 G_{-d-l-1}．重复上述过程，对 $l=0,1,\cdots m-d$ 进行归纳，可以得知 $J_{\langle -m\rangle}$ 的作用分量在 G_{-d} 的作用下均为规范不变量．因此我们有

$$J_{\mathrm{DS-OR}}=J_{\langle -m\rangle}. \tag{3.10}$$

我们把 $J_{\mathrm{DS-OR}}$ 称为 O'Raifeartaigh 规范，它是一种特殊的 DS 规范．

有了正规 $\mathrm{Cons}[\mathscr{G}(H,d)]$ 下 DS 规范的上述构造，相当于给出了相应W代数的一

组基. 为便于区分,我们将这种W代数记为 $W[\mathscr{G}(H,d)]$, 例如通常的 Zamalodchikov W_N 代数[12,13]可改记为 $W[sl_N(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{H},1)]$, Bershadsky 的 W_N^l 代数[11]改记为 $W[sl_N(\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{H},l)]$, 等等.

四、广义 Toda 类可积模型

现在我们转而构造在正规约束 Cons $[\mathscr{G}(H,d)]$ 下由 WZNW 模型约化出来的 Toda 类可积模型. 确切地说,我们将研究如下的约束系统

$$\bar{\partial}(\partial g g^{-1}) = 0, \qquad \partial(g^{-1}\bar{\partial} g) = 0, \tag{4.1a}$$

$$\langle \mathscr{G}_-, \partial g g^{-1} - \mu^{(d)} \rangle = 0, \ \langle \mathscr{G}_+, g^{-1}\bar{\partial} g - \nu^{(-d)} \rangle = 0, \tag{4.1b}$$

其中 $\mu^{(d)} \in \mathscr{G}^{(d)}$, $\nu^{(-d)} \in \mathscr{G}^{(-d)}$ 为正规元素. 由于 $\mathscr{G}$ 的阶化分解 (2.1.6), WZNW 场 g 可以相应地分解为

$$g = ABC, \ A \in G_-, \ B \in G_0, \ C \in G_+. \tag{4.2}$$

将(4.2)代入 (4.1b), 我们有

$$\begin{aligned} &(AB\partial CC^{-1}B^{-1}A^{-1})^{(k)} = \mu^{(d)}\delta_{kd}, \\ &(C^{-1}B^{-1}A^{-1}\bar{\partial} ABC)^{(-k)} = \nu^{(-d)}\delta_{kd}, \ 1 \leqslant k \leqslant m. \end{aligned} \tag{4.3}$$

对 $k = m$, 由 (4.3) 立知

$$(\partial CC^{-1})^{(m)} = (A^{-1}\bar{\partial} A)^{(-m)} = 0. \tag{4.4}$$

这样,利用 (4.3) 及 Hausdorff 公式可以很容易地通过归纳得到

$$(\partial CC^{-1})^{(k)} = (A^{-1}\bar{\partial} A)^{(-k)} = 0, \ d < k \leqslant m. \tag{4.5a}$$

结合 (4.5a) 与 (4.3) 式,可以推出

$$(\partial CC^{-1})^{(d)} = B^{-1}\mu^{(d)}B, \ (A^{-1}\bar{\partial} A)^{(-d)} = B\nu^{(-d)}B^{-1}, \tag{4.5b}$$

$$(AB\partial CC^{-1}B^{-1}A^{-1})^{(k)} = 0, (C^{-1}B^{-1}A^{-1}\bar{\partial} ABC)^{(-k)} = 0, \ 1 \leqslant k < d. \tag{4.5c}$$

为了完全解出约束方程 (4.5a—c), 需要引入对 A 和 C 的适当参数化. 在此之前我们给出两个重要公式. 设 $\Psi(z,\bar{z})$ 为任一矩阵函数. 可以证明,

$$\partial \exp(\Psi) \cdot \exp(-\Psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!}(ad\Psi)^l \partial\Psi, \tag{4.6a}$$

$$\exp(-\Psi) \cdot \bar{\partial} \exp(\Psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!}(ad\Psi)^l \bar{\partial}\Psi. \tag{4.6b}$$

对 $\mathscr{G}$ 的任意矩阵表示, 若 $\Psi \in \mathscr{G}$, 则 (4.6a,b) 可看成 $\mathscr{G}$ 上的一个运算规律. 考虑到 $\mathscr{G}$ 的非紧条件和阶化分解 (2.1.6), 我们很自然地采用如下的参数化来描写 A 和 C,

$$A = \exp(\Psi^{(-m)})\exp(\Psi^{(-m+1)}) \cdots\cdots \exp(\Psi^{(-1)}), \tag{4.7a}$$

$$C = \exp(\Psi^{(1)})\exp(\Psi^{(2)}) \cdots\cdots \exp(\Psi^{(m)}), \Psi^{(\pm k)} \in \mathscr{G}^{(\pm k)}. \tag{4.7b}$$

利用 (4.6a) 及 Hausdorff 公式可以求出

$$\partial CC^{-1} = \sum_{j=1}^{m} \exp\Psi^{(1)} \cdots \exp\Psi^{(j-1)} \partial \exp\Psi^{(j)} \cdot \exp[-\Psi^{(j)}]\exp[-\Psi^{(j-1)}] \cdots \exp[-\Psi^{(1)}]$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\sum_{l}\frac{1}{(l+1)!}\left[\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{j-1}}\sum_{r_k}\frac{1}{r_k!}(ad\Psi^{(k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(j)})^l\partial\Psi^{(j)}], \tag{4.8a}$$

式中 $\overset{\curvearrowleft}{\prod\limits_{k=1}^{j-1}}$ 表示其后的连乘积按 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 的次序排列，所有未标明的求和限可由 $\mathscr{G}_+$ 的零幂条件

$$\sum_{k=1}^{j-1}kr_k+(l+1)j\leqslant m,\ r_k\geqslant 0,\ l\geqslant 0 \tag{4.8b}$$

给出．类似地，

$$A^{-1}\bar{\partial}A=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l}\frac{(-1)^l}{(l+1)!}\left[\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{j-1}}\sum_{r_k}\frac{(-1)^{r_k}}{r_k!}(ad\Psi^{(-k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(-j)})^l\bar{\partial}\Psi^{(-j)}], \tag{4.9}$$

其中未标明的求和限仍由 (4.8b) 给出．

用完全一样的方法，我们还得到

$$AB\partial CC^{-1}B^{-1}A^{-1}=\left[\overset{\curvearrowright}{\prod_{q=1}^{m}}\sum_{r_q}\frac{1}{r_q!}(ad\Psi^{(-q)})^{r_q}\right](B\partial CC^{-1}B^{-1}), \tag{4.10a}$$

$$C^{-1}B^{-1}A^{-1}\bar{\partial}ABC=\left[\overset{\curvearrowright}{\prod_{q=1}^{m}}\sum_{r_q}\frac{(-1)^{r_q}}{r_q!}(ad\Psi^{(q)})^{r_q}\right](B^{-1}A^{-1}\bar{\partial}AB), \tag{4.10b}$$

其中 $\overset{\curvearrowright}{\prod}$ 表示与 $\overset{\curvearrowleft}{\prod}$ 次序相反的连乘，∂CC^{-1} 及 $A^{-1}\bar{\partial}A$ 由 (4.8a) 及 (4.9) 给出，指标 r_q 的求和限由 (4.8b) 和下式来限定，

$$\sum_{k=1}^{j-1}kr_k+(l+1)j-\sum_{q=1}^{m}qr_q\geqslant -m,\ r_q\geqslant 0. \tag{4.11}$$

注意 (4.8b) 左边的数字实际上就是 (4.8a) 及 (4.9) 的和式中每个单项在 H 阶化下的阶，(4.11) 的左边有相似的意义．记:

$$D(j)=\sum_{k=1}^{j-1}kr_k+(l+1)j, \tag{4.12}$$

$$\widetilde{D}(j)=\sum_{k=1}^{j-1}kr_k+(l+1)j-\sum_{q=1}^{m}qr_q. \tag{4.13}$$

为了求解 (4.5a—c)，我们先将 ∂CC^{-1}、$AB\partial CC^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 在正阶部分逐阶写出，同时将 $A^{-1}\bar{\partial}A$、$C^{-1}B^{-1}A^{-1}\bar{\partial}ABC$ 在负阶部分逐阶写出，并将结果代入 (4.5a—c) 中．我们得到，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\sum_{l}\frac{1}{(l+1)!}\left[\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{j-1}}\sum_{r_k}\frac{1}{r_k!}(ad\Psi^{(k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(j)})^l\partial\Psi^{(j)}]\Big|_{D(j)=i}=0,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\sum_{l}\frac{(-1)^l}{(l+1)!}\left[\overset{\curvearrowleft}{\prod_{k=1}^{j-1}}\sum_{r_k}\frac{(-1)^{r_k}}{r_k!}(ad\Psi^{(-k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(-j)})^l\bar{\partial}\Psi^{(-j)}]\Big|_{D(j)=i}=0,\\ (d<i\leqslant m)\end{cases} \tag{4.14}$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{d}\sum_{l}\frac{1}{(l+1)!}\left[\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{1}{r_k!}(ad\Psi^{(k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(j)})^{l}\partial\Psi^{(j)}]|_{D(j)=d}=B^{-1}\mu^{(d)}B, \\
\sum_{j=1}^{d}\sum_{l}\frac{(-1)^{l}}{(l+1)!}\left[\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{(-1)^{r_k}}{r_k!}(ad\Psi^{(-k)})^{r_k}\right][(ad\Psi^{(-j)})^{l}\bar{\partial}\Psi^{(-j)}]|_{D(j)=d} \\
\qquad =B\nu^{(-d)}B^{-1},
\end{cases}
\tag{4.15}
$$

$$
\begin{cases}
\left[\prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowright}{d-1}}\sum_{r_q}\frac{1}{r_q!}(ad\Psi^{(-q)})^{r_q}\right]\left\{B\sum_{j=1}^{d}\sum_{l}\frac{1}{(l+1)!}\left[\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{1}{r_k!}(ad\Psi^{(k)})^{r_k}\right]\right. \\
\qquad \left.\times[(ad\Psi^{(j)})^{l}\partial\Psi^{(j)}]B^{-1}\right\}|_{\tilde{D}(j)=i}=0, \\
\left[\prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowright}{d-1}}\sum_{r_q}\frac{(-1)^{r_q}}{r_q!}(ad\Psi^{(q)})^{r_q}\right]\left\{B^{-1}\sum_{j=1}^{d}\sum_{l}\frac{(-1)^{l}}{(l+1)!}\left[\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{(-1)^{r_k}}{r_k!}(ad\Psi^{(-k)})^{r_k}\right]\right. \\
\qquad \left.\times[(ad\Psi^{(-j)})^{l}\bar{\partial}\Psi^{(-j)}]B\right\}|_{\tilde{D}(j)=i}=0, \\
(1\leqslant i<d).
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

方程(4.14)将 $\Psi^{(\pm\alpha)}$ $(d<\alpha\leqslant m)$ 作为 $\Psi^{(\pm\beta)}$ $(\beta<\alpha)$ 的函数完全表达，方程(4.15)将 $\Psi^{(\pm d)}$ 作为 $\Psi^{(\pm\beta)}$ $(\beta<d)$ 的函数完全表达．因此，对 $d\leqslant i\leqslant m$，$\Psi^{(\pm i)}$ 不再是独立于其他 $\Psi^{(\pm\beta)}$ $(1\leqslant\beta<d)$ 的变量，它们将因方程(4.14—4.15)的存在而不再出现在约化系统的运动方程中．

对于方程(4.16)，当 i 取 $[1,d)$ 中每一个整数值时所有的 $\Psi^{(\pm j)}$ $(1\leqslant j<d)$ 均会进入相应的方程，其中的 $\Psi^{(\pm d)}$ 项可用(4.15)代换为 $\Psi^{(\pm j)}$ $(1\leqslant j<d)$ 的组合．因此(4.16)给出了一组高度非线性化的相互作用场满足的动力学方程．为使这组方程完备，我们还需给出场 B 满足的方程．这种方程由约束后 WZNW 模型的运动方程在 $\mathscr{G}_0$ 上的分量给出．

由(4.1a)不难得到

$$\bar{\partial}(A^{-1}\tilde{J}A)=-[A^{-1}\bar{\partial}A,A^{-1}\tilde{J}A],\ \tilde{J}=\partial gg^{-1}, \tag{4.17a}$$

$$\partial(C\tilde{\tilde{J}}C^{-1})=[\partial CC^{-1},C\tilde{\tilde{J}}C^{-1}],\ \tilde{\tilde{J}}=g^{-1}\bar{\partial}g. \tag{4.17b}$$

注意到(4.2)式

$$(A^{-1}\tilde{J}A)^{(0)}=\partial BB^{-1},\ (C\tilde{\tilde{J}}C^{-1})^{(0)}=B^{-1}\bar{\partial}B. \tag{4.18}$$

另一方面，由约束方程(4.1b)，我们有

$$(A^{-1}\tilde{J}A)^{(i)}=\prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowleft}{d-i}}\sum_{r_q}\frac{(-1)^{r_q}}{r_q!}(ad\Psi^{(-q)})^{r_q}\mu^{(d)}|_{d-\Sigma_q r_q=i}, \tag{4.19a}$$

$$(C\tilde{\tilde{J}}C^{-1})^{(-i)}=\prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowleft}{d-i}}\sum_{r_q}\frac{1}{r_q!}(ad\Psi^{(q)})^{r_q}\nu^{(-d)}|_{d-\Sigma_q r_q=i},1\leqslant i\leqslant d. \tag{4.19b}$$

对（4.17a,b）两端取零阶分量，并将（4.9）（4.8a）、（4.18）和（4.19a,b）代入相应的方程中去，经过整理，得到

$$\bar\partial(\partial BB^{-1}) = -\sum_{i=1}^{d-1}\Big[\sum_{j=1}^{i}\sum_{l}\frac{(-1)^l}{(l+1)!}\Big(\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{(-1)^{r_k}}{r_k!}(ad\Psi^{(-k)})^{r_k}\Big)$$

$$\times((ad\Psi^{(-j)})^l\bar\partial\Psi^{(-j)})|_{D(j)=i},\ \prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowleft}{d-i}}\sum_{r_q}\frac{(-1)^{r_q}}{r_q!}(ad\Psi^{(-q)})^{r_q}\mu^{(d)}|_{d-\Sigma_q r_q q=i}\Big]$$

$$-[B\nu^{(-d)}B^{-1},\mu^{(d)}], \tag{4.20a}$$

$$\partial(B^{-1}\bar\partial B) = \sum_{i=1}^{d-1}\Big[\sum_{j=1}^{i}\sum_{l}\frac{1}{(l+1)!}\Big(\prod_{k=1}^{\overset{\curvearrowleft}{j-1}}\sum_{r_k}\frac{1}{r_k!}(ad\Psi^{(k)})^{r_k}\Big)$$

$$\times((ad\Psi^{(j)})^l\partial\Psi^{(j)})|_{D(j)=i},\ \prod_{q=1}^{\overset{\curvearrowleft}{d-i}}\sum_{r_q}\frac{1}{r_q!}(ad\Psi^{(q)})^{r_q}\nu^{(-d)}|_{d-\Sigma_q r_q q=i}\Big]$$

$$-[B^{-1}\mu^{(d)}B,\nu^{(-d)}]. \tag{4.20b}$$

可以证明，上述两个方程在用 B 作规范变换时相互等价．方程（4.16)、(4.20）构成了关于 B、$\Psi^{(\pm i)}$（$1\leqslant i<d$）的一个自封的动力系统，我们称这一系统为相应于约化 Cons $[\mathscr{G}(H,d)]$ 的广义 Toda 类可积模型．由于约化的性质，这一系统显然是共形不变的．更重要的是，对每个这类模型，必存在一个W代数，并且该W代数表征这一模型的对称性质．

值得一提的是，尽管我们在导出系统（4.16)、(4.20）时曾假定 $\mathscr{G}$ 有一最大阶 m，但所得的系统与 m 无关，因此有可能将上述结果外推到 m 为无限大的情形，例如 $\mathscr{G}$ 为仿射代数的某些情形．

下面对一般的 H 写出广义 Toda 模型的前几个例子．

（1）$d=1$．O'Raifeartaigh[4] 模型．

运动方程为

$$\begin{aligned}\bar\partial(\partial BB^{-1}) + [B\nu^{(-1)}B^{-1},\mu^{(1)}] &= D,\\ \partial(B^{-1}\bar\partial B) - [B^{-1}\mu^{(1)}B,\nu^{(-1)}] &= 0.\end{aligned} \tag{4.21}$$

当 H 阶化为主阶化时，(4.21）就是通常的 Toda 方程．

（2）$d=2$．“玻色超共形模型”．运动方程为

$$\partial\Psi^{(1)} = -B^{-1}(ad\Psi^{(-1)}\mu^{(2)})B, \tag{4.22a}$$

$$\bar\partial\Psi^{(-1)} = B(ad\Psi^{(1)}\nu^{(-2)})B^{-1}, \tag{4.22b}$$

$$\bar\partial(\partial BB^{-1}) - [B(ad\Psi^{(1)}\nu^{(-2)})B^{-1},ad\Psi^{(-1)}\mu^{(2)}] + [B\nu^{(-2)}B^{-1},\mu^{(2)}] = 0, \tag{4.22c}$$

$$\partial(B^{-1}\bar\partial B) + [B^{-1}d\Psi^{(-1)}\mu^{(2)})B,ad\Psi^{(1)}\nu^{(-2)}] - [B^{-1}\mu^{(2)}B,\nu^{(-2)}] = 0. \tag{4.22d}$$

这一系统曾由作者之一(赵柳)在文 [10] 中得到过． 更早些时候，J. Fuchs[8] 也曾独立地在 sl_{N+2} 的（$1N1$）块对角分割阶化下讨论过它的一个特例．由于这一模型含有两个共形量纲分别为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ 的场 $\Psi^{(1)}$ 和 $\Psi^{(-1)}$，它们又服从玻色统计，所

以可称之为“玻色超共形”模型.

(3) $d=3$. 这一系统的运动方程为

$$\partial\Psi^{(2)}+\frac{1}{2}ad\Psi^{(1)}\partial\Psi^{(1)}=-B^{-1}(ad\Psi^{(-1)}\mu^{(3)})B,$$

$$\partial\Psi^{(1)}=-B^{-1}\left(\left[ad\Psi^{(-2)}-\frac{1}{2}(ad\Psi^{(-1)})^2\right]\mu^{(3)}\right)B,$$

$$\bar\partial\Psi^{(-2)}-\frac{1}{2}ad\Psi^{(-1)}\bar\partial\Psi^{(-1)}=B(ad\Psi^{(1)}\nu^{(-3)})B^{-1},$$

$$\bar\partial\Psi^{(-1)}=B\left(\left[ad\Psi^{(2)}+\frac{1}{2}(ad\Psi^{(1)})^2\right]\nu^{(-3)}\right)B^{-1}$$

$$\begin{aligned}\bar\partial(\partial BB^{-1})=&\left[B\left(ad\Psi^{(2)}+\frac{1}{2}(ad\Psi^{(1)})^2\right)\nu^{(-3)}B^{-1},\left(ad\Psi^{(-2)}-\frac{1}{2}(ad\Psi^{(-1)})^2\right)\mu^{(3)}\right]\\&+[Bad\Psi^{(1)}\nu^{(-3)}B^{-1},ad\Psi^{(-1)}\mu^{(3)}]-[B\nu^{(-3)}B^{-1},\mu^{(3)}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial(B^{-1}\bar\partial B)=-&\left[B^{-1}\left(ad\Psi^{(-2)}-\frac{1}{2}(ad\Psi^{(-1)})^2\right)\mu^{(3)}B,\left(ad\Psi^{(2)}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{1}{2}(ad\Psi^{(1)})^2\right)\nu^{(-3)}\right]-[B^{-1}ad\Psi^{(-1)}\mu^{(3)}B,ad\Psi^{(1)}\nu^{(-3)}]\\&+[B^{-1}\mu^{(3)}B,\nu^{(-3)}].\end{aligned}$$

五、结果与讨论

在本文中,我们利用李代数的整数阶化对 WZNW 模型的各种共形约化作了研究,在 d 阶正规约束的条件下构造了约束 Kac-Moody 流的广义 DS 规范——O'Raifeartaigh 规范,并导出了相应的 Toda 场方程,而且,对每一个约化方案,我们指出了一个W代数 $W[\mathscr{G}(H,d)]$ 与相应的 Toda 理论对应.

在本文研究的问题之外,还有一些相关的问题有待研究,例如对每个约化方案,相应的广义 KdV 系列的构造及其与 Toda 系统的关系等. 我们注意到了 de Groot 等人最近对仿射代数 $\mathscr{G}$ 所作的广义 KdV 系列的研究[19],但目前还无法认证他们的广义 KdV 是否与我们的 Toda 理论相对应.

最近,共形理论的非临界扰动获得了极大的关注[14-17],这种扰动常常导致非共形的可积系. 因此对我们研究的 Toda 理论及广义W代数作相应的非临界扰动的研究将是十分有趣的课题. 作为本文方法的应用和例子,我们将在同一题目下另一篇文章中给出W代数的一个具体例子[20].

作者感谢 O'Raifeartaigh 教授及其研究组的其他成员. 他们陆续寄来的文章不断吸引着作者在这一领域的兴趣. 赵柳还感谢杨焕雄的有益讨论.

参 考 文 献

[1] J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Phys. Lett.*, **B227** (1989), 214, *Ann. Phys.*, **203** (1991), 76.

[2] Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, IFT/P-24/90.
[3] T. Inami, KUNS 1038, HE (TH) 90/14.
[4] L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, DIAS-STP-90-19, ETH-TH/90-20.
[5] L. O'Raifeartaigh, DIAS-STP-90-43, DIAS-STP-90-45.
[6] L.O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-03.
[7] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-17.
[8] J. Fuchs, *Phys. Lett.*, **B262** (1991), 249.
[9] F. A. Bias, T. Tjin, P. van Driel, *Nucl. Phys.*, **B357** (1991), 632.
[10] L. Chao, NWU/IMP/910525.
[11] M. Bershadsky, IASSNS-HEP-90/44.
[12] A. B. Zamolodchikov, *Theore. Math. Phys.*, **63** (1985), 1205.
[13] V. A. Fatteev and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B280** (1987), 644.
[14] A. B. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A4** (1989), 4235.
[15] T. Eguchiand S. K. Yang, *Phys. Lett.*, **B224** (1989), 373, *Phys. Lett.*, **B235** (1990), 282.
[16] O. Babelon and L. Bonora, *Phys. Lett.*, **B267** (1991), 71.
[17] M. Fukuma and T. Takebe, *Mod. Phys. Lett. A*, **Vol. 5, No. 7** (1990), 509.
[18] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, *J. Sov. Math. Phys.*, **30** (1984), 1975.
[19] M. F. de Groot, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, IASSNS-HEP-91/19.
[20] Hou Bo-yu and Chao Liu, Conformally reduced WZNW theory, New extended chiral algebras and their associated Toda type integrable systems: (II) An Example, to appear.

Conformally Reduced WZNW Theory, New Extended Chiral Algebras and Their Associated Toda Type Integrable Systems (I) General Framework

Hou Boyu　　Zhao Liu

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069)

Abstract

We propose and analyse a large class of conformal reductions $Cons[g(H,d)]$ of WZNW theory based on the integral gradations of the underlying Lie algebra g. The W-bases of the associated W-algebras $W[g(H,d)]$ are constru ted under the generalized Drinfeld-Sokolov gauge which we call O'Raifeartaigh gauge of the constrained Kac-Moody currents, and the equations of motion of the extended Toda type integrable systems corresponding to these W-algebras are derived also.