某些半环的结构

张娟娟,邵　勇
ZHANG Juan-juan,SHAO Yong

西北大学 数学系,西安 710127
Department of Mathematics,Northwest University,Xi'an 710127,China
E-mail:zhang79jj@126.com

ZHANG Juan-juan,SHAO Yong.Structure of some semirings.Computer Engineering and Applications,2008,44(3):28-30.

Abstract: $A(M)$-completely regular semiring is introduces, and the closed relationship between the subdirect product decomposition of $A(M)$-completely regular semiring and the subdirect product decomposition of its additive (multiplicative) reduct is given by using the concept of sturdy frame of type (2,2) algebras.In particular,some results in references are extended.
Key words: variety;Mal'cev product;subdirect product;sturdy frame

摘　要: 介绍了 $A(M)$-完全正则半环,并利用(2,2)型代数的坚固构架的概念,给出了 $A(M)$-完全正则半环的次直积分解与其加法(乘法)半群的次直积分解之间的密切联系。特别地,推广了以往文献的一些结果。
关键词: 簇;Mal'cev 积;次直积;坚固构架
文章编号: 1002-8331(2008)03-0028-03　**文献标识码:** A　**中图分类号:** O152.7

1 前言

自从 1894 年 Dedekind 首先提出半环的概念以来,半环理论在数学的众多分支及物理、化学、信息与通讯等领域都有广泛的应用。近年来,许多代数学者对半环的性质和结构进行了深入,细致的研究,并得到了很多有意义的理论成果[1-4]。赵宪钟教授在文献[1]中将半群理论中半群的坚固半格与半环理论中环的分配格进行推广引入了(2,2)型代数的坚固构架的概念。显然半环也是(2,2)型代数,赵宪钟教授在文献[1]中得到了如下结果:若半环 S 是 A-完全正则半环,则 S 是加法半群为矩形群的半环与加法半群为交换半群的幂等元半环的次直积当且仅当 S 的加法半群是矩形群与半格的次直积。显然矩形群是纯整的完全单半群。本文首先将上述结果进行推广得到如下结果:若半环 S 是 A-完全正则半环,则 S 是加法半群为完全单半群的半环与加法半群为交换半群的幂等元半环的次直积当且仅当 S 的加法半群是完全单半群与半格的次直积;其次,引入 M-完全正则半环,并对其进行了次直积分解。本文使用的定义、记号及相关结论参看文献[1,5]。

2 预备知识

定义 1 半环$(S,+,\cdot)$是指非空集合 S 上装有两个二元运算"+"和"·"的(2,2)型代数,且满足条件:

(1)$(S,+)$和$(S,\cdot)$是半群;

(2)$(\forall a,b,c\in S)a(b+c)=ab+ac,(b+c)a=ba+ca$。

环和分配格均是半环的特例。幂等元半环簇是比分配格更广的半环类,即满足附加恒等式 $x+x\approx x^2\approx x$ 半环的全体。这样,幂等元半环 S 的加法半群$(S,+)$和$(S,\cdot)$乘法半群都是带。带簇,半格簇,完全正则半群簇,完全单半群簇分别记为 $B,S\ell,CR,CS$。若 V 为 B 的子簇,则用$\dot{V}$ ($\overset{+}{V}$) 表示乘法(加法)带属于 V 的幂等元半环簇;若 $V\in[B,CR]$,则用$\dot{V}$ ($\overset{+}{V}$) 表示乘法(加法)半群属于 V 的半环簇。例如:$\overset{+}{S\ell}$ 表示加法半群是半格的幂等元半环簇,$\dot{CR}$ 表示乘法半群是完全正则半群的半环簇。

设 S 是半环,S 的乘法(加法)半群上的 Green$\mathcal{H}$ 关系记为 $\dot{\mathcal{H}}$ ($\overset{+}{\mathcal{H}}$),类似地 Green$\mathcal{L}$,$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{D}$ 关系分别有对应的记号$\dot{\mathcal{L}}$ ($\overset{+}{\mathcal{L}}$),$\dot{\mathcal{R}}$ ($\overset{+}{\mathcal{R}}$)和$\dot{\mathcal{D}}$ ($\overset{+}{\mathcal{D}}$)。显然$\overset{+}{\mathcal{H}}$ ($\overset{+}{\mathcal{L}}$,$\overset{+}{\mathcal{R}}$,$\overset{+}{\mathcal{D}}$)是$(S,\cdot)$上的同余;而$\dot{\mathcal{H}}$ ($\dot{\mathcal{L}}$,$\dot{\mathcal{R}}$,$\dot{\mathcal{D}}$)不一定是$(S,+)$上的同余。

若 S 是半环,则用 Con(S)表示 S 上同余的全体。若 ρ 是 S 上的等价关系,$a\in S$,则用 ρ_a 表示 a 所在的 ρ-类。例如:用$\dot{\mathcal{H}}_a$ 表示 a 所在的$\dot{\mathcal{H}}$-类。

定义 2 若 V、W 是同型代数类,则 $V\circ W$ 表示代数类:

$\{S|(\exists\rho\in \mathrm{Con}(S))S/\rho\in W,(\forall u\in S)\rho_u$ 是 S 的子代数且 $\rho_u\in V\}$,称为 V,W 的 Mal'cev 积。值得注意的是:V,W 是簇,但是 $V\circ W$ 并不一定是簇。

3 主要结果

完全正则半群是群并半群。设 $S\in\overset{+}{CR}$,$a\in S$,本文用 a^0 表

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10471112);陕西省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China under Grant No.2005A15)。
作者简介: 张娟娟(1979-),女,博士生,主要研究方向:代数学;邵勇(1980-),男,博士生,主要研究方向:代数学。

示包含 a 的群$(\overset{+}{\mathcal{H}}_a,+)$的恒等元,$E^+(S)$表示 S 的加法半群的幂等元全体。显然有 $E^+(S)=\{a^0|a\in S\}$。

引理 1 若 S 是半环,则下列命题等价:

(1)$S\in\overset{+}{CS}\circ\overset{+}{S\ell}$;

(2)$S\in\overset{+}{CR}$ 且$\overset{+}{\mathcal{D}}$是 S 上的最小的$\overset{+}{S\ell}$-同余;

(3)$S\in\overset{+}{CR}$ 且$(\forall a\in S)\overset{+}{\mathcal{D}}_a$是 S 的子半环。

定义 3[1] 若半环 S 满足引理 1 的条件,则 S 称为 A-完全正则半环。

赵宪钟教授在文献[1]中给出了(2,2)型代数的坚固构架的理论,显然半环也是(2,2)型代数,从而可以借助此理论去研究半环的结构,下面将给出了 A-完全正则半环的结构。首先介绍文献[1]所引入的(2,2)型代数坚固构架的概念以及相关结论。

定义 4[1] 设$(B,+,\cdot)$是(2,2)型代数,若在 B 上定义上半格偏序关系"$\le$"并满足以下条件:

$(\forall a,b\in B)a+b\le a\vee b,ab\le a\vee b$

其中 $a\vee b=L.u.p(a,b)$表示 a,b 的最小上界,则 B 称为构架。

定义 5[1] 设$\{(S_\alpha,+,\cdot)|\alpha\in B\}$是一族不相交的(2,2)型代数,其中 B 是构架,对任意的 $\alpha,\beta\in B,\alpha\le\beta,\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\to S_\beta$是单同态,且满足下列条件:对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in B$,

(1)$\varphi_{\alpha,\alpha}=1_{S_\alpha}$,其中 1_{S_α}表示 S_α上的恒等映射;

(2)如果 $\alpha\le\beta\le\gamma$,那么 $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=\varphi_{\alpha,\gamma}$;

(3)如果 $\alpha\vee\beta\le\gamma$,那么 $S_\alpha\varphi_{\alpha,\gamma}+S_\beta\varphi_{\beta,\gamma}\subseteq S_{\alpha+\beta}\varphi_{\alpha+\beta,\gamma}\cdot S_\beta\varphi_{\beta,\gamma}\subseteq S_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta,\gamma}$。

令 $S=\cup_{\alpha\in B}S_\alpha$,若在 S 上定义运算"+"和"·"如下:对任意的 $a\in S_\alpha,b\in S_\beta,a+b=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}+b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha+\beta,\alpha\vee\beta},a\cdot b=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\vee\beta}$,则$(S,+,\cdot)$仍是(2,2)型代数,记为 $S=[B,\le;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,称为(2,2)型代数 S_α的坚固构架 B。

引理 2[1] 设 $B\in\overset{+}{S\ell}$,若在 B 上定义上半格偏序关系"$\le$"如下:$(a,b\in B)a\le b\Leftrightarrow a+b=b$,则 B 是构架。

定理 1 若 S 是 A-完全正则半环,则 S 是半环 $S_\alpha\in\overset{+}{CS}$ 的坚固构架 B,即 $S=[B,\le;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,当且仅当$(S,+)$是完全单半群的坚固半格。

证明 必要性是显然的,现在只需证明充分性。设 S 是 A-完全正则半环且$(S,+)$是完全单半群的坚固半格。由文献[5]中的定理 IV.1.6 和 1.7 可知:$(S,\cdot)=[B;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,其中 $\alpha\le\beta,B=S/\overset{+}{\mathcal{D}}$,且 S 的每个$\overset{+}{\mathcal{D}}$-类就是完全单半群 S_α,而 $\varphi_{\alpha,\beta}$是从完全单半群$(S_\alpha,+)$到完全单半群$(S_\beta,+)$的单同态,$\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\to S_\beta,a\mapsto a_\beta$ $(a\in S_\alpha)$,这里 a_β是 S_β中唯一满足 $a\le a_\beta$的元素。由引理 1 知$\overset{+}{\mathcal{D}}$是 S 上的$\overset{+}{S\ell}$-同余,取 $B=S/\overset{+}{\mathcal{D}}\in\overset{+}{S\ell}$,在 B 上如引理 2 定义偏序关系,从而 B 是构架。下面欲证 $\varphi_{\alpha,\beta}$是 S_α到 S_β的半环同态。

若对任意的 $\alpha,\beta\in B,\alpha\le\beta$ 和任意的 $a,b\in S_\alpha,c,d\in S_\beta$满足条件 $a\le c$ 和 $b\le d$,即 $a\varphi_{\alpha,\beta}=c$ 和 $b\varphi_{\alpha,\beta}=d$,则由文献[5]中的引理 IV.1.7 知:$c=a+c^0=c^0+a,d=b+d^0=d^0+b$,由文献[2]中的引理 1.1(ii)知 $cb=ab+c^0b=ab+(cb)^0$,类似地可得 $cb=c^0b+ab=(cb)^0+ab$,从而 $ab\le cb$;利用 $d=b+d^0=d^0+b$,可得 $cd=cb+(cd)^0=(cd)^0+cb$,从而 $cb\le cd$,由于$\le$是 S 上的偏序关系,从而 $ab\le cd$,故有 $(ab)\varphi_{\alpha,\beta}=cd=(a\varphi_{\alpha,\beta})(b\varphi_{\alpha,\beta})$。由于 a,b 的任意性,从而 $\varphi_{\alpha,\beta}$是从 S_α到 S_β的半环同态。

对任意的 $a\in S_\alpha,b\in S_\beta$,显然有 $a\le a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta},b\le b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta},a+b\le a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}+b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta},ab\le(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})$,故有$(a+b)\varphi_{\alpha+\beta,\alpha\vee\beta}=a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}+b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta},(ab)\varphi_{\alpha\beta,\alpha\vee\beta}=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})$,由于 $\varphi_{\alpha,\beta}$是单同态,从而 $a+b=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}+b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha+\beta,\alpha\vee\beta},ab=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\vee\beta}$。这样就证明了 $S=[B,\le;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$是$\overset{+}{CS}$中的半环 S_α的坚固构架 B。

引理 3[1] 设 $S=[B,\le;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,若在 S 上定义二元关系 θ 如下:

$(a,b\in S)a\theta b\Leftrightarrow a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}=b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta}$

则 θ 是 S 上的同余,且 S 是 B 和 S/θ 的次直积。

定理 2 若 S 是 A-完全正则半环,则 S 是$\overset{+}{CS}$与$\overset{+}{S\ell}$中成员的次直积当且仅当$(S,+)$是完全单半群与半格的次直积。

证明 必要性是显然的,现在只需证明充分性。设 S 是 A-完全正则半环,由于$(S,+)$是完全单半群与半格的次直积,由文献[5]中的定理 IV.3.6 知$(S,+)$是完全单半群的坚固半格,由定理 1 知 S 是$\overset{+}{CS}$中半环 S_α的坚固构架 B(其中 B 如引理 2 所定义)。由引理 3 知 θ 是 S 上的同余,且 S 是 B 和 S/θ 的次直积。结合文献[5]引理 IV.3.2 知 $S/\theta\in\overset{+}{CS}$,故 S 是 $S/\theta\in\overset{+}{CS}$ 与 $B\in\overset{+}{S\ell}$ 的次直积。

注 1 定理 1、2 分别是文献[1]中引理 3.4 和定理 3.5 的推广。

引理 4 若 S 是半环,则下列命题等价:

(1)$S\in\dot{CS}\circ\dot{S\ell}$;

(2)$S\in\dot{CR}$ 且$\dot{\mathcal{D}}$是 S 上最小的$\dot{S\ell}$-同余;

(3)$S\in\dot{CR}$ 且$(\forall a\in S)\dot{\mathcal{D}}_a$是 S 的子半环。

定义 6 若半环 S 满足引理 4 的条件,则 S 称为 M-完全正则半环。

注 2 一般情况下,由于在半环的定义中,只要求乘法对加法有分配律,而不要求加法对乘法有分配律,这就导致半环中加法半群与乘法半群的地位不是等同的。若 S 是 A-完全正则半环,则 S 主要依赖于其加法半群$(S,+)$的性质;若 S 是 M-完全正则半环,则 S 主要依赖于其乘法半群$(S,\cdot)$的性质,这样 A-完全正则半环与 M-完全正则半环结构的研究并非是完全对偶的。为了完整起见,下面将对 M-完全正则半环进行次直积分解。

引理 5[1] 设 $B\in\dot{S\ell}$,若在 B 上定义上半格偏序关系"$\le$"如下:$(a,b\in B)a\le b\Leftrightarrow ab=b$,则 B 是构架。

设 $S\in\dot{CR}$,$a\in S$,本文用 0_a表示包含 a 的群$(\dot{\mathcal{H}}_a,\cdot)$的恒等元,$E^\cdot(S)$表示 S 的乘法半群的幂等元全体。显然有 $E^\cdot(S)=\{0_a|a\in S\}$。

定理 3 若 S 是 M-完全正则半环,则 S 是半环 $S_\alpha\in\dot{CS}$ 的坚固构架 B,即 $S=[B,\le;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$,当且仅当$(S,\cdot)$是完全单半群的坚固半格。

证明 必要性是显然的,现在只需证明充分性。设 S 是 M-

完全正则半环，且$(S,\cdot)$是完全单半群的坚固半格。由文献[5]中的定理IV 1.6和1.7可知：$(S,\cdot)=[B;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$，其中$\alpha\leq\beta,B=S/\dot{\mathcal{D}}$，且$S$的每个$\dot{\mathcal{D}}$-类就是完全单半群$S_\alpha$，而$\varphi_{\alpha,\beta}$是从完全单半群$(S_\alpha,\cdot)$到完全单半群$(S_\beta,\cdot)$的单同态，$\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\rightarrow S_\beta,a\mapsto a_\beta$ $(a\in S_\alpha)$，这里a_β是S_β中唯一满足$a\leq a_\beta$的元素。由引理4知$\dot{\mathcal{D}}$是S上的$\dot{S\ell}$-同余，取$B=S/\dot{\mathcal{D}}\in\dot{S\ell}$，在$B$上如引理5定义偏序关系，从而$B$是构架。下面欲证$\varphi_{\alpha,\beta}$是$S_\alpha$到$S_\beta$的半环同态。

若$(\forall\alpha,\beta\in B)\alpha\leq\beta$和任意的$a,b\in S_\alpha$满足$a\leq c$(即$a\varphi_{\alpha,\beta}=c$)和$b\leq d$(即$b\varphi_{\alpha,\beta}=d$)，则：$(\exists e,f,g\in E^{\cdot}(S_\beta))c=ea=ae,d=fb=bf,(a+b)\varphi_{\alpha,\beta}=(a+b)g=g(a+b)$。由文献[5]中的定理IV.1.3知$(\forall x\in S_\beta)(e0_a)ax=ax$，从而$eag=e0_a\cdot ag=ag$，类似地$fbg=bg$，故有：

$$(a+b)g=ag+bg=eag+fbg=(ea+fb)g$$

类似地$g(a+b)=ga+gb=gae+gbf=g(ae+bf)$，由自然偏序的定义知$ea+bf\leq(a+b)g$，又由于完全单半群上的自然偏序为恒等关系，$(a+b)g,ea+fb\in S_\beta$，又$S_\beta$是完全单半群，从而$(a+b)g=ea+fb=c+d$，即$(a+b)\varphi_{\alpha,\beta}=a\varphi_{\alpha,\beta}+b\varphi_{\alpha,\beta}$。由于$a,b$的任意性，从而$\varphi_{\alpha,\beta}$是$S_\alpha$到$S_\beta$的半环同态。

容易验证对任意的$a\in S_\beta,b\in S_\beta,a+b=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}+b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha+\beta,\alpha\vee\beta},ab=(a\varphi_{\alpha,\alpha\vee\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\vee\beta})\varphi^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\vee\beta}$，这样就证明了$S=[B,\leq;S_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$是$\dot{CS}$中的半环$S_\alpha$的坚固构架$B$。

定理4 若S是M-完全正则半环，则S是$\dot{CS}$与$\dot{S\ell}$中成员的次直积当且仅当$(S,\cdot)$是完全单半群与半格的次直积。

致谢：衷心感谢导师赵宪钟教授的悉心指导。

（收稿日期：2007年10月）

参考文献：

[1] Zhao X Z,Guo Y Q,Shum K P.Sturdy frame of type (2,2) algebras and their application to semirings[J].Fund Math,2003,179:69-81.

[2] Pastijn F,郭聿琦.环并半环[J].中国科学：A辑,2002,32(7):613-630.

[3] Pastijn F,Zhao X Z.Varieties of idempotent semirings with commutative addition[J].Algebra Universalis,2005,54:301-321.

[4] Zhao X Z,Guo Y Q,Shum K P.$\mathcal{D}$-subvarieties of the variety of idempotent semirings[J].Algebra Colloquium,2002,9:15-28.

[5] Petrich M,Reilly N R.Completely regular semigroups[M].New York:Wiley,1999.

（上接27页）

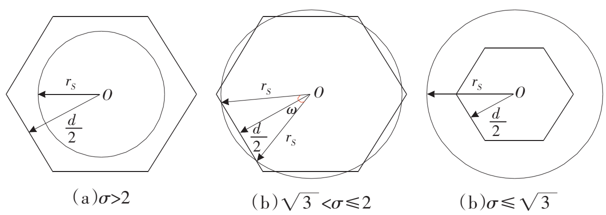
[9] Zhou Z,Das S,Gupta H.Connected K-coverage problem in sensor networks[C]//13th International Conference on Computer Communications and Networks,2004:373-378.

[10] Liu Y,Liang W.Approximate coverage in wireless sensor networks[C]//Proceedings of IEEE Conference on Liocal Computer Networks 30th Anniversary(LCN'05),2005.

[11] Aurenhammer F.Voronoi diagrams-a survey of a fundamental geometric data structure[J].ACM Comput Surv,1991,23:345-405.

附录：

定理1的证明：



(a)$\sigma>2$ (b)$\sqrt{3}<\sigma\leq2$ (b)$\sigma\leq\sqrt{3}$

图6 正六边形架构下的部分覆盖

(1)$\sigma>2$时

如图6(a)所示，当$\sigma>2$时，探测区域在正六边形的内部。文献[10]已经证明了在这种情况下可以有如下结果：

$$\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\sigma^2} \tag{3}$$

其中θ的取值范围是$\theta<\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$。

(2)$\sqrt{3}<\sigma\leq2$时

如图6(b)所示，当$\sqrt{3}<\sigma\leq2$时，一部分探测区域会超出正六边形的区域，此时在各传感器的探测区域之间会存在一部分探测盲区。这时，可以得到一个正六边形的面积是$S_h=\frac{\sqrt{3}}{2}d^2$，在一个正六边形区域内部被位于中心点$O$的传感器所覆盖的区域面积是$S_o=[\pi-3(\omega-\sin\omega)]r_s^2$。于是有：

$$\theta=\frac{S_o}{S_h}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{[\pi-3(\omega-\sin\omega)]}{d^2}r_s^2=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{[\pi-3(\omega-\sin\omega)]}{\sigma^2} \tag{4}$$

d与α之间的关系是：$d=2r_s\cos\frac{\omega}{2}$，即：

$$\sigma=2\cos\frac{\omega}{2} \tag{5}$$

将式(5)代入式(4)得：

$$\theta=\frac{2\pi-12\arccos\frac{\sigma}{2}+3\sigma\sqrt{4-\sigma^2}}{\sqrt{3}\,\sigma^2} \tag{6}$$

其中θ的取值范围是$\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}\leq\sigma<1$。当$\sigma=2$时，$\theta=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$，此时相邻传感器的探测区域相切。

(3)$\sigma\leq\sqrt{3}$时

如图6(c)所示，此时探测区域包含了正六边形，始终为完全覆盖，覆盖率θ保持为1不变，并且局部区域会达到多重覆盖。当$\sigma=\sqrt{3}$时，即为文献[2]所讲述的完全覆盖(如图1)，在这里只讨论中的一个特殊情形。

综合(1)、(2)、(3)三种情况，即可得到任意覆盖率与探测半径和相邻工作节点间距之间的关系。