逻辑系统 H_t 中三-I 算法的另一种证明

马巧云[1,2],吴洪博[2]
MA Qiao-yun[1,2],WU Hong-bo[2]

1.西安文理学院 数学系,西安 710065
2.陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
1.Dept Math,Xi'an University of Arts and Science,Xi'an 710065,China
2.College of Mathematics and Information Science,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China

MA Qiao-yun,WU Hong-bo.Another proving of three I algorithm in fuzzy logic system H_t.Computer Engineering and Applications,2008,44(7):91-93.

Abstract: Another proving of three I algorithm in fuzzy logic system H_t based on H_t algebra is gotten.Moreover it is proved that three I algorithm is P-returning algorithm in fuzzy logic system H_t and the answer of FMT in fuzzy logic system H_t is obtained. The fuzzy logic system W is gotten if letting t=1 in fuzzy logic system H_t.So the results in fuzzy logic system H_t will be results in fuzzy logic system W.
Key words: logic system;three I algorithm;logic system H_t;H_t algebra

摘　要:在讨论 H_t 代数的一些性质的基础上,得到系统 H_t 中的三 I 算法的另一种证明。指出多值逻辑系统 H_t 中的三 I 算法是 P 还原算法,并解决了 H_t 中的 FMT 问题。在多值逻辑系统 H_t 中,若令 t=1,则得到多值逻辑系统 W。所以多值逻辑系统 H_t 中的结论在 t=1 的情况下就是多值逻辑系统 W 中的结论。
关键词:逻辑系统;三 I 算法;H_t 系统;H_t 代数
文章编号:1002-8331(2008)07-0091-03　　**文献标识码**:A　　**中图分类号**:O141

美国的控制论专家 L.A.Zadeh 于 1973 年提出了解决 FMP 问题的著名的 CRI 方法(Compositional Rule of Inference)。但 Zadeh 的 CRI 方法只用了一次蕴涵算法而随后却用到了复合算法,而且 Zadeh 的 CRI 算法还不是还原算法。所以在一定意义下按 Zadeh 的 CRI 方法求的 FMP 问题的结果不是最优的。

王国俊教授在文献[5]中提出了解决 FMP 问题的三 I 算法。这种算法通过对蕴涵算法的三次使用得到 FMP 问题的结果,且结果优于用 Zadeh 的 CRI 方法求得的结果,并且三 I 算法还是可还原算法。

王国俊教授在文献[3]中提出 H_t 系统,这是一个更一般的多值逻辑系统。本文讨论了 H_t 系统中的三 I 算法和 α-三 I 算法,并用 H_t 代数的一些特殊性质得到了 H_t 系统中 α-三 I 算法和三 I 算法的另一种的证明方法。

1　H_t 代数

定义 1 在[0,1]中规定:

$a\vee b=\max\{a,b\}$

$$\neg a=\neg_t a=\begin{cases}0, & a\geqslant t,\\ t-a, & 0<a<t,\\ 1, & a=0,\end{cases}\quad t\in(0,1]$$

$$a\to b=H_t(a,b)=\begin{cases}1, & a\leqslant b,\\ (t-a)\vee b, & a>b,\end{cases}\quad t\in(0,1]$$

则[0,1]成为($\neg$,$\vee$,$\to$)型代数,称为 H_t-代数($0<t\leqslant 1$)(当 t=1 时,H_1-代数为 R_0-代数)。

定义 2 设 $v:F(S)\to H_t$ 是映射,若 v 是($\neg$,$\vee$,$\to$)型同态,即 $v(\neg A)=\neg v(A)$,$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)$,$v(A\to B)=v(A)\to v(B)=R_t(v(A),v(B))$。则称 v 为 $F(S)$在[0,1]中的赋值,简称 v 为赋值。$F(S)$的全体赋值之集记为 Ω_t。

2　H_t 代数的性质

性质 1 在 H_t 代数中,若 $x>t$,$x>y$,则 $x\to y=y$。

证明 由 $x>y$ 知,$x\to y=(t-x)\vee y$,而 $x>t$,所以 $x\to y=(t-x)\vee y=y$。

性质 2 在 H_t 代数中,若 x,y 不同时大于 t,则 $x*y=\neg(x\to\neg y)$。

证明

(1)若 $x+y\leqslant t$,则 $x*y=0$

①$x=t$,$y=0$,$\neg(x\to\neg y)=0$

②$0<x<t$,$0<y<t$

$\neg(x\to\neg y)=\neg(x\to(t-y))=\neg 1=0$

③$x=0$,$y\leqslant t$

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10471083);西安文理学院科研资助项目(No.KY200535)。
作者简介:马巧云(1973-),女,讲师,研究方向:不确定性推理。
收稿日期:2007-06-21　　**修回日期**:2007-08-27

$\neg(x\to\neg y)=\neg(0\to\neg y)=0$

即 $x+y\leqslant t$ 时,$x*y=\neg(x\to\neg y)$

(2)若 $x+y>t$,则 $x*y=x\wedge y$

①$y=0$,则 $x>t$。$x\wedge y=x\wedge 0=0$

$\neg(x\to\neg y)=(x\to 1)=0$

②$0<y<t$

$\neg(x\to\neg y)=\neg(x\to(t-y))=\neg((t-x)\vee(t-y))$

若 $x\geqslant y$,则 $t-x\leqslant t-y$

$\neg((t-x)\vee(t-y))=\neg(t-y)=y=x\wedge y$

若 $x<y$,则 $t-x>t-y$

$\neg((t-x)\vee(t-y))=\neg(t-x)=x=x\wedge y$

③$t\leqslant y<1(\neg y=0)$

若 $x=0$,$\neg(x\to\neg y)=\neg(0\to 0)=0=x\wedge y$

若 $0<x<t$,$\neg(x\to\neg y)=\neg(x\to 0)=\neg((t-x)\vee 0)=x=x\wedge y$,

④$y=1$,$x\wedge y=x$

若 $x=0$,$\neg(x\to\neg y)=0=x=x\wedge y$

若 $0<x<t$,$\neg(x\to\neg y)=\neg((t-x)\vee 0)=x=x\wedge y$

性质 3 在 H_t 代数中,若 x,y 不同时大于 t,则$\neg x\to\neg y=y\to x$。

证明

(1)若 $y>x$,则 $y\to x=(t-y)\vee x$

由 H_t 代数的定义易证$\neg x\to\neg y=y\to x$。

(2)若 $y\leqslant x$,则 $y\to x=1$

由 H_t 代数的定义易证$\neg x\to\neg y=y\to x$

性质 4 在 H_t 代数中,若 $x,y,z\in[0,1]$,则 $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$。

证明

(1)若 $z\geqslant\max\{x,y\}$

$x\to(y\to z)=1=y\to(x\to z)$

(2)若 $y<z<x$ 或 $x<z<y$

可证 $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$

(3)若 $z<y<x$ 或 $z<x<y$

可证 $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$

性质 5 在 H_t 代数中,若 x,y,z 任两个都不同时大于 t,则 $x*y\to z=x\to(y\to z)$。

证明 由 x,y,z 任两个都不同时大于 t 知 $x*y\leqslant t$。再由性质 2、3、4 知,$x*y\to z=\neg(x\to\neg y)\to z=\neg z\to(x\to\neg y)=x\to(\neg z\to\neg y)=x\to(y\to z)$

3 H_t 中的三 I 算法

命题 1 在代数 H_t 中,满足 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha$ 的最小 $B^*(y)$ 存在。且 $B^*(y)=\sup\limits_{x\in X}\lfloor A^{*}*R(A,B)*\alpha\rfloor$。

证明 首先证明对任意 $(x,y)\in X\times Y$,$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha)\geqslant\alpha$。

可先证明:

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha))=1$

(1)若 α,$A(x)\to B(y)$ 及 $A^*(X)$ 中的任两个都不同时大于 t,则:

$A^*(x)*R(A,B)\leqslant t$,$A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant t$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))*A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant t)=$

$\alpha*R(A,B)*A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha=1$

(2)若 α,$A(x)\to B(y)$ 及 $A^*(X)$ 都大于 t,则:

$A^*(x)*R(A,B)*\alpha=A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha\leqslant A^*(x)$

若 $A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha=A^*(x)$,则:

$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha)=$

$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x))=(A(x)\to B(y))\to 1=1\geqslant\alpha$

若 $A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha<A^*(x)$,则:

$A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha=A^*(x)\to R(A,B)\wedge\alpha=R(A,B)\wedge\alpha$

$(A(x)\to B(y))\to(R(A,B)\wedge\alpha)=$

$$\begin{cases}(A(x)\to B(y))\to R(A,B)=1\geqslant\alpha\\((A(x)\to B(y))\to\alpha=\alpha\end{cases}$$

(3)若 α,$A(x)\to B(y)$ 及 $A^*(X)$ 中只有一个小于 t

①$\alpha<t(R(A,B)\geqslant t,A^*(x)\geqslant t)$

$A^*(x)*R(A,B)*\alpha=\alpha$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to\alpha))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to\alpha))=\alpha\to\alpha=1$

②$R(A,B)<t(\alpha\geqslant t,A^*(x)\geqslant t)$

$A^*(x)*R(A,B)*\alpha=R(A,B)$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to R(A,B)))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to R(A,B))=\alpha\to 1=1$

③$A^*(x)<t(R(A,B)\geqslant t,\alpha\geqslant t)$

$A^*(x)*R(A,B)*\alpha=A^*(x)$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x)*R(A,B)*\alpha))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to A^*(x))=\alpha\to 1=1$

其次证明:

若有 $B^*(y)\in F(Y)$,满足 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha$,则 $A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant B^*(y)$。

又 $A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha$

(1)若 $A^*(x)$,$A(x)\to B(y)$ 同时小于 t

若 $B^*(y)>t$,则显然有 $A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant B^*(y)$

若 $B^*(y)\leqslant t$,则 $A^*(x)\to B^*(y)\leqslant t$,此时:

$1=\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)))=$

$\alpha*R(A,B)\to(A^*(x)\to B^*(y))=$

$\alpha*R(A,B)*(A^*(x)\to B^*(y))$

所以 $\alpha*R(A,B)*A^*(x)\leqslant B^*(y)$

(2)若 $A^*(x)$,$A(x)\to B(y)$ 同时大于 t

$A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha$

若 $B^*(y)<A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant A^*(x)\wedge R(A,B)\wedge\alpha$,

则 $B^*(y)<A^*(x)$,$B^*(y)<R(A,B)$,$B^*(y)<\alpha$,

这时 $\alpha\leqslant((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)))=$

$((A(x)\to B(y))\to B^*(y))=B^*(y)$

这与假设 $B^*(y)<\alpha$ 矛盾。所以 $\alpha*R(A,B)*A^*(x)\leqslant B^*(y)$

(3)若 $A^*(x)>t$,$A(x)\to B(y)\leqslant t$

若 $B^*(y)>t$,则显然有 $A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant B^*(y)$;

若 $B^*(y)\leqslant t$,此时:

$\alpha*R(A,B)*A^*(x)\to B^*(y)=$

$\alpha*R(A,B)\to(A^*(x)\to B^*(y))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)))=1$

所以 $\alpha*R(A,B)*A^*(x)\leqslant B^*(y)$

(4)若 $A^*(x)\leqslant t$,$A(x)\to B(y)>t$

若 $B^*(y)>t$,则显然有 $A^*(x)*R(A,B)*\alpha\leqslant B^*(y)$;

若 $B^*(y)\leqslant t$，此时：

$\alpha*R(A,B)*A^*(x)\to B^*(y)=\alpha*A^*(x)*R(A,B)\to B^*(y)=$

$\alpha*A^*(x)\to(R(A,B)\to B^*(y))=$

$\alpha\to(A^*(x)\to(R(A,B)\to B^*(y))=$

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)))=1$

所以 $\alpha*R(A,B)*A^*(x)\leqslant B^*(y)$。

命题 2 代数在 H_t 中，满足 $(A(x)\to_t B(y))\to_t(A^*(x)\to_t B^*(y))=1$ 的最小 $B^*(y)$ 存在，且 $B^*(y)=\sup\limits_{x\in X}\lfloor A^* * R(A,B)\rfloor$。

在命题 1 中，取 $\alpha=1$ 即可得上式。

定义 3（P-还原算法）如果当 A 与 B 满足条件 P 时由一种求解(*)式的算法当 $A^*=A$ 时，求得 $B^*=B$，则称这种算法为 P-还原算法。

命题 3 R_t 型三 I 算法是 P-还原算法。这里性质 P 指 A 为正规 *Fuzzy* 集，即有 $a\in X$，使得 $A(a)=1$。

证明 由 A 是正规 *Fuzzy* 集知，存在 $a\in A$，使得 $A(a)=1$。

$B^*(y)=\sup\limits_{x\in X}\lfloor A^* * R(A(x),B(y))\rfloor\geqslant$

$\quad A(a)*(A(a)\to B(y))=1*(1\to B(y))=B(y)$

即 $B^*(y)\geqslant B(y)$；

又，当 $A(x),B(y),A(x)\to B(y)$ 不同时大于 t 时，

$A(x)*(A(x)\to B(y))\to B(y)=$

$\neg(A(x)\to\neg(A(x)\to B(y)))\to B(y)=$

$\neg B(y)\to(A(x)\to\neg(A(x)\to B(y)))=$

$\neg B(y)\to((A(x)\to B(y)\to\neg A(x))=$

$(A(x)\to B(y))\to(\neg B(y)\to\neg A(x))=$

$(A(x)\to B(y))\to(A(x)\to B(y))=1$

即 $A(x)*(A(x)\to B(y))\leqslant B(y)$。

当 $A(x)$，$B(y)$，$A(x)\to B(y)$ 同时大于 t 时

$A(x)*(A(x)\to B(y))=A(x)\wedge(A(x)\to B(y))=$

$\begin{cases}A(x)\leqslant B(y), & A(x)\leqslant B(y)\\ A(x)\wedge B(y)=B(y), & A(x)>B(y)\end{cases}$

总之，$A(x)*(A(x)\to B(y))\leqslant B(y)$

$B^*(y)=\sup\limits_{x\in X}\lfloor A^* * R(A(x),B(y))\rfloor\leqslant\sup\limits_{x\in X}B(y)=B(y)$

即 $B^*(y)\leqslant B(y)$，

从而 $B^*(y)=B(y)$。即该算法是 P-还原算法。

4　H_t 中的 FMT 问题

问题 1 在多值逻辑系统中，已知 $A\to B$

　　且给定　B^*

―――――――――――――――

　　　求　A^*

定义 4 在 H_t 代数中，设 $\alpha\in[0,1]$，$A\in F(X)$，$B,B^*\in F(Y)$，则问题 1 中的解 A^* 是 $F(X)$ 中使 $R(R(A,B),R(A^*,B^*))\geqslant\alpha$ 对任意 $(x,y)\in X\times Y$ 恒成立的最大 *Fuzzy* 集，按此规则求解问题 1 中的 A^* 方法称为 R_t-型全蕴涵 α-三 I *FMT* 方法。

命题 4 在 H_t 代数中，R_t-型全蕴涵 α-三 I *FMT* 规则的解是存在的，且 $A^*(x)=\inf\limits_{y\in Y}[\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y))]=$

$\inf\limits_{y\in y}[R_t(\alpha,R_t(R_t(A(x),B(y)),B^*(y)))]$

证明 首先证明对任意 $(x,y)\in X\times Y$，$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y))$ 满足：

$R(R(A,B),R(A^*,B^*))\geqslant\alpha$

由性质 5 可得：

$\alpha\to(A(x)\to B(y))\to((\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))\to$
$B^*(y)))=\alpha\to((\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))\to((A(x)\to$
$B(y))\to B^*(y)))=(\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))\to$
$(\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))=1$

所以，$(A(x)\to B(y))\to((\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))\to B^*(y))\geqslant\alpha$

其次证明若有 $A^*(x)\in F(X)$ 使得：

$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha$

则 $\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y))\geqslant A^*(x)$

由 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\geqslant\alpha$ 知：

$\alpha\to((A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)))=1$

由性质 5 可得：

$\alpha\to(A^*(x)\to(A(x)\to B(y))\to B^*(y)))=1$

$A^*(x)\to(\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y)))=1$

所以，$A^*(x)\leqslant\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y))$

从而 $A^*(x)=\inf\limits_{y\in Y}[\alpha\to((A(x)\to B(y))\to B^*(y))]=$

$\quad\inf\limits_{y\in y}[R_t(\alpha,R_t(R_t(A(x),B(y)),B^*(y)))]$

推论 1 在 H_t 代数中，R_t-型全蕴涵三 I *FMT* 规则的解是存在的，且：

$A^*(x)=\inf\limits_{y\in Y}[((A(x)\to B(y))\to B^*(y))]=$

$\quad\inf\limits_{y\in y}[R_t(R_t(A(x),B(y)),B^*(y))]$

证明 在命题 4 中，取 $\alpha=1$ 即可。

参考文献：

[1] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2000.

[2] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].北京：科学出版社，2003.

[3] 王国俊，兰蓉.系统 Ha 中的广义重言式理论[J].陕西师范大学学报：自然科学版，2003，31(2)：1-11.

[4] 于鸿丽.对系统 Ha 中 $F(s)$ 分划的一种改进[J].西安文理学院学报，2007，1.

[5] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J].中国科学：E 辑，1999，29(1)：43-53.

[6] Wang G J.On the logic foundation of fuzzy reasoning[J].Information Science，1997，17(7)：47-88.

[7] Zadeh L A.Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J].IEEE Trans System，Man and Cybernetics，1973，1：28-44.

[8] 宋士吉，吴澄.模糊推理的反向三 I 算法[J].中国科学：E 辑，2002，32(2).

[9] 宋士吉，吴澄.模糊推理的反向三 I 约束算法[J].自然科学进展，2002，12(1).

[10] 宋士吉，冯纯伯，吴从炘.关于模糊推理全蕴涵三 I 算法的约束理论[J].自然科学进展，2000，10(10)：884-889.

[11] 吴望名.关于模糊逻辑的一场争论[J].模糊系统与数学，1995，9(2)：1-9.

[12] 王国俊.模糊命题演算的一种形式演绎系统[J].科学通报，1997，42(10)：1041-1045.

[13] Wang G J.On the logic foundations of FMP and FMT[J].Int J Fuzzy Mathematics，1997，5(1)：1-48.

[14] Wang G J.On the logic foundation of fuzzy reasoning[C]//Lecture Notes in Fuzzy Mathemmatics and Computer Science.Omaha：Creighton University，1997，4：1-48.