第28卷 第4期
2004年4月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.4
Apr., 2004

经典李代数 D_r 上推广的 Toda 力学系统*

刘王云[1)] 杨战营[2)] 赵柳[3)]

(西北大学现代物理所 西安 710069)

摘要 根据经典李代数 D_r 根系的特点构造 Lax pair,得到李代数 D_r 上推广的 Toda 链(这些链用一组有序整数(m,n)表示,m、n 分别表示正、负根的级数),并给出 $m,n\leqslant 3$ 时系统的运动方程、哈密顿量以及泊松括号的具体形式.

关键词 根系(李代数) Toda 链 Lax pair 泊松括号

1 引言

自从牛顿发现万有引力以来,多体力学系统一直吸引着人们的注意. 然而,由于物体之间相互作用的复杂性,只有两体相互作用问题研究得比较清楚,能够求出其精确解,对于多体相互作用一般无法精确求解. 早在20世纪60年代末70年代初,人们发现了一些一维精确可解多体系统,并用逆散射方法求得了系统的解,其中著名的有 Toda 链[1,2]、Calogero-Moser 模型[3,4]和 Ruijsenaars-Schneider 模型[5,6],这些模型已渗透于从固体物理学[7,8]到物理学的各个分支和其他学科. 例如,共形场论[9—13]、量子霍尔效应[14—16]、电线的传输特性[17]和孤立子[18—22]等. 特别是近几年,由于发现这些可积模型与超对称规范理论之间存在密切联系,再次激起物理学家的兴趣. 例如,周期 Toda 链的谱曲线与4维时空中 $N=2$ 的超对称 Yang-Mills 理论中的 Seiberg-Witten 曲线相互等价[23—25];Toda 链相空间运动积分的稳定点与 $N=1$ 的超对称 Yang-Mills 理论中手征场的有效超势有关[26].

本文主要对 Toda 模型进一步研究. Toda 提出的原始模型是一个只考虑近邻相互作用的一维质点系统,这些质点间的相互作用是非线性指数形式的相互作用,对于质点间存在更长程相互作用的情形没有考虑. 在文献[27—34]中研究了考虑次近邻相互作用的 Toda 场论. 文献[35]研究了考虑准长程$\left(力程为\left[\frac{p}{2}\right]\right)$相互作用时李代数 gl_{r+1}, sl_{r+1} 推广的 Toda 链,对李代数 B_r, C_r, D_r 推广的 Toda 链在文献[36]中也做了研究,其中对 D_r Toda 链没有给出详细结果. 我们注意到原始的 Toda 晶格模型对应于半单李代数 A_r 的 Dynkin 格点,而推广的 Toda 晶格则对应半单李代数 A_r 的根格点. 本文将李代数 D_r 的根系采用同样的方法构造 Lax pair,得出 D_r 李代数的推广的 Toda 模型.

2 李代数 D_r 上推广的 Toda 力学系统

这里研究的是非周期、非对称、有限 Toda 链的情形. 推广中使用的是舍瓦累(Chevalley)基. r 秩李代数的舍瓦累(Chevalley)基是 $3r$ 个生成元的集合 $\{h_i,e_i,f_i\}$,这 $3r$ 个生成元满足下列对易关系(李积):

$$[h_i,h_j]=0,\ [h_i,e_j]=K_{ij}e_j,$$
$$[h_i,f_j]=-K_{ij}f_j,\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i \qquad (1)$$

和 Serre 关系:

2003-06-25 收稿

* 国家自然科学基金(90103001)资助

1) E-mail: liu02401073@sina.com

2) E-mail: zyyang@nwu.edu.cn

3) E-mail: lzhao@nankai.edu.cn

$$ade_i^{-K_{ij}+1}e_j=0,\ adf_i^{-K_{ij}+1}f_j=0, \tag{2}$$

其中

$$K_{ij}=\frac{2(\alpha_i\cdot\alpha_j)}{(\alpha_i\cdot\alpha_i)}$$

称为嘉当(Cartan)矩阵,(·)表示内积. 这 $3r$ 个生成元并不充满李代数 $\mathscr{G}$,而 $\mathscr{G}$中其他生成元可以由 e_i 和f_i 生成. 设 $\pm(\alpha_{i_k}+\cdots+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_1})\in\Sigma$($\Sigma$ 表示 $\mathscr{G}$ 的非零根的全体,称为 $\mathscr{G}$的根系)则有

$$e_{\alpha i_k}+\cdots+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_1}=[e_{i_k},\cdots,[e_{i_2},e_{i_1}]],$$

$$f_{\alpha i_k}+\cdots+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_1}=(-1)^k[f_{i_k},\cdots,[f_{i_2},f_{i_1}]],$$

其中 k 为对易括号的重数. 这样,对于任何一个李代数,可以给出高阶 Toda 力学系统的 Lax pair:

$$L=L^{(0)}+L^{>0}+L^{<0},$$
$$M=L^{>0}-L^{<0}, \tag{3}$$

其中 $L^{(0)}$对应零根,$L^{>0}$对应各级正根,$L^{<0}$对应各级负根. 而系统的哈密顿量则为

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(L^2).$$

根据李代数 D_r 根系的特点和定义(3)可得其三级根情况下 Toda 链系统的 Lax pair 为

$$\begin{aligned}L=&\sum_{i=1}^{r}\dot{q}_ih_i+\sum_{i=1}^{r}\omega_i^{\frac{1}{2}}(\mu^{(1)}\psi_i^{(+1)}e_i+\mu^{(-1)}\psi_i^{(-1)}f_i)+\sum_{i=1}^{r-2}(\omega_i\omega_{i+1})^{\frac{1}{2}}(\mu^{(2)}\psi_i^{(+2)}[e_i,e_{i+1}]-\\&\mu^{(-2)}\psi_i^{(-2)}[f_i,f_{i+1}])+(\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(2)}\psi^{(+2)}[e_{r-2},e_r]-\mu^{(-2)}\psi^{(-2)}[f_{r-2},f_r])+\\&\sum_{i=1}^{r-3}(\omega_i\omega_{i+1}\omega_{i+2})^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_i,[e_{i+1},e_{i+2}]]+\mu^{(-3)}[f_i,[f_{i+1},f_{i+2}]])+\\&(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_{r-3},[e_{r-2},e_r]]+\mu^{(-3)}[f_{r-3},[f_{r-2},f_r]])+\\&(\omega_{r-1}\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_{r-1},[e_{r-2},e_r]]+\mu^{(-3)}[f_{r-1},[f_{r-2},f_r]]),\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}M=&\sum_{i=1}^{r}\omega_i^{\frac{1}{2}}(\mu^{(1)}\psi_i^{(+1)}e_i-\mu^{(-1)}\psi_i^{(-1)}f_i)+\sum_{i=1}^{r-2}(\omega_i\omega_{i+1})^{\frac{1}{2}}(\mu^{(2)}\psi_i^{(+2)}[e_i,e_{i+1}]+\\&\mu^{(-2)}\psi_i^{(-2)}[f_i,f_{i+1}])+(\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(2)}\psi^{(+2)}[e_{r-2},e_r]+\mu^{(-2)}\psi^{(-2)}[f_{r-2},f_r])+\\&\sum_{i=1}^{r-3}(\omega_i\omega_{i+1}\omega_{i+2})^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_i,[e_{i+1},e_{i+2}]]-\mu^{(-3)}[f_i,[f_{i+1},f_{i+2}]])+\\&(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_{r-3},[e_{r-2},e_r]]-\mu^{(-3)}[f_{r-3},[f_{r-2},f_r]])+\\&(\omega_{r-1}\omega_{r-2}\omega_r)^{\frac{1}{2}}(\mu^{(3)}[e_{r-1},[e_{r-2},e_r]]-\mu^{(-3)}[f_{r-1},[f_{r-2},f_r]]),\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $q_i,\psi_i^{(\pm k)}(k=1,2)$是依赖于时间的动力学变量,$\mu^{(\pm k)}(k=1,2,3)$是耦合常数,$\omega_i=\mathrm{e}^{-2\sum_{j=1}^{r}q_jK_{j,i}}(i=1,2,\cdots,r)$.

根据 Lax 方程 $\dot{L}=[M,L]$比较方程两边系数,经计算可得考虑近邻、次近邻及三近邻相互作用时系统的运动方程.

近邻相互作用 $\psi_i^{(\pm1)}$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_i^{(+1)}=&2(\tau^{(2,1)}(K_{i-1,i}\omega_{i-1}\psi_{i-1}^{(+2)}\psi_{i-1}^{(-1)}-K_{i+1,i}\omega_{i+1}\psi_i^{(+2)}\psi_{i+1}^{(-1)})+\\&\tau^{(3,2)}(K_{i+1,i}K_{i+2,i+1}\omega_{i+1}\omega_{i+2}\psi_{i+1}^{(-2)}-K_{i-2,i-1}K_{i-1,i}\omega_{i-1}\omega_{i-2}\psi_{i-2}^{(-2)})),\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{r-3}^{(+1)}=&2(\tau^{(3,2)}(\omega_{r-2}\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(-2)}-\omega_{r-4}\omega_{r-5}\psi_{r-5}^{(-2)}+\omega_{r-2}\omega_r\psi^{(-2)})-\\&\tau^{(2,1)}(\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(+2)}\psi_{r-4}^{(-1)}-\omega_{r-2}\psi_{r-3}^{(+2)}\psi_{r-2}^{(-1)})),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{r-2}^{(+1)}=&-2(\tau^{(2,1)}(\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(+2)}\psi_{r-3}^{(-1)}-\omega_r\psi_r^{(-1)}\psi^{(-2)}-\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(+2)}\psi_{r-1}^{(-1)})+\\&\tau^{(3,2)}\omega_{r-3}\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(-2)}),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\dot{\psi}_{r-1}^{(+1)}=-2(\tau^{(2,1)}\omega_{r-2}\psi_{r-2}^{(+2)}\psi_{r-2}^{(-1)}+\tau^{(3,2)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\psi_{r-3}^{(-2)}-\omega_{r-2}\omega_r\psi^{(-2)})), \tag{9}$$

$$\dot{\psi}_r^{(+1)}=-2(\tau^{(2,1)}\omega_{r-2}\psi^{(+2)}\psi_{r-2}^{(-1)}-\tau^{(3,2)}(\omega_{r-2}\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(-2)}-\omega_{r-2}\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(-2)})), \tag{10}$$

$$\dot{\psi}_i^{(-1)}=2(\tau^{(1,2)}(K_{i-1,i}\omega_{i-1}\psi_{i-1}^{(-2)}\psi_{i-1}^{(+1)}-K_{i+1,i}\omega_{i+1}\psi_i^{(-2)}\psi_{i+1}^{(+1)})+$$

$$\tau^{(2,3)}(K_{i+1,i}K_{i+2,i+1}\omega_{i+1}\omega_{i+2}\psi_{i+1}^{(+2)} - K_{i-2,i-1}K_{i-1,i}\omega_{i-1}\omega_{i-2}\psi_{i-2}^{(+2)})), \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{r-3}^{(-1)} = &-2(\tau^{(1,2)}(\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(-2)}\psi_{r-4}^{(+1)} - \omega_{r-2}\psi_{r-3}^{(-2)}\psi_{r-2}^{(+1)}) - \tau^{(2,3)}(\omega_{r-2}\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(+2)}) - \\ &\omega_{r-4}\omega_{r-5}\psi_{r-5}^{(+2)} + \omega_{r-2}\omega_r\psi^{(+2)})),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{r-2}^{(-1)} = &-2(\tau^{(1,2)}(\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(-2)}\psi_{r-3}^{(+1)} - \omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(-2)}\psi_{r-1}^{(+1)} - \omega_r\psi_r^{(+1)}\psi^{(+2)}) + \\ &\tau^{(2,3)}\omega_{r-3}\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(+2)}),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\dot{\psi}_{r-1}^{(-1)} = -2(\tau^{(1,2)}\omega_{r-2}\psi_{r-2}^{(-2)}\psi_{r-2}^{(+1)} + \tau^{(2,3)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\psi_{r-3}^{(+2)} - \omega_{r-2}\omega_r\psi^{(+2)})), \tag{14}$$

$$\dot{\psi}_{r}^{(-1)} = -2(\tau^{(1,2)}\omega_{r-2}\psi^{(-2)}\psi_{r-2}^{(+1)} - \tau^{(2,3)}(\omega_{r-2}\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(+2)} - \omega_{r-2}\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(+2)})). \tag{15}$$

次近邻相互作用 $\psi_i^{(\pm 2)}$ 的运动方程为

$$\dot{\psi}_i^{(+2)} = 2\tau^{(3,1)}(K_{i-1,i}\omega_{i-1}\psi_{i-1}^{(-1)} - K_{i+2,i+1}\omega_{i+2}\psi_{i+2}^{(-1)}), \tag{16}$$

$$\dot{\psi}_{r-3}^{(+2)} = -2\tau^{(3,1)}(\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(-1)} - \omega_{r-1}\psi_{r-1}^{(-1)} - \omega_r\psi_r^{(-1)}), \tag{17}$$

$$\dot{\psi}_{r-2}^{(+2)} = -2\tau^{(3,1)}(\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(-1)} + \omega_r\psi_r^{(-1)}), \tag{18}$$

$$\dot{\psi}_i^{(-2)} = 2\tau^{(1,3)}(K_{i-1,i}\omega_{i-1}\psi_{i-1}^{(+1)} - K_{i+2,i+1}\omega_{i+2}\psi_{i+2}^{(+1)}), \tag{19}$$

$$\dot{\psi}_{r-3}^{(-2)} = -2\tau^{(1,3)}(\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(+1)} - \omega_{r-1}\psi_{r-1}^{(+1)} - \omega_r\psi_r^{(+1)}), \tag{20}$$

$$\dot{\psi}_{r-2}^{(-2)} = -2\tau^{(1,3)}(\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(+1)} + \omega_r\psi_r^{(+1)}). \tag{21}$$

$\psi^{(\pm 2)}$ 的运动方程为

$$\dot{\psi}^{(+2)} = -2\tau^{(3,1)}(\omega_{r-1}\psi_{r-1}^{(-1)} + \omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(-1)}), \tag{22}$$

$$\dot{\psi}^{(-2)} = -2\tau^{(1,3)}(\omega_{r-1}\psi_{r-1}^{(+1)} + \omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(+1)}). \tag{23}$$

q_i 的运动方程为

$$\begin{aligned}\ddot{q}_i = &2(\tau^{(1)}\omega_i\psi_i^{(+1)}\psi_i^{(-1)} - \tau^{(2)}(K_{i+1,i}\omega_i\omega_{i+1}\psi_i^{(+2)}\psi_i^{(-2)} + K_{i-1,i}\omega_i\omega_{i-1}\psi_{i-1}^{(+2)}\psi_{i-1}^{(-2)}) + \\ &\tau^{(3)}(K_{i+2,i+1}K_{i+1,i}\omega_i\omega_{i+1}\omega_{i+2} + K_{i-1,i}K_{i+1,i}\omega_{i-1}\omega_i\omega_{i+1} + \\ &K_{i-2,i-1}K_{i-1,i}\omega_{i-2}\omega_{i-1}\omega_i)),\ 1 \leqslant i \leqslant r-4,\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{r-3} = &2(\tau^{(1)}\omega_{r-3}\psi_{r-3}^{(+1)}\psi_{r-3}^{(-1)} + \tau^{(2)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\psi_{r-3}^{(+2)}\psi_{r-3}^{(-2)} + \omega_{r-3}\omega_{r-4}\psi_{r-4}^{(+2)}\psi_{r-4}^{(-2)}) + \\ &\tau^{(3)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_{r-1} + \omega_{r-4}\omega_{r-3}\omega_{r-2} + \omega_{r-5}\omega_{r-4}\omega_{r-3} + \omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r)),\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{r-2} = &2(\tau^{(1)}\omega_{r-2}\psi_{r-2}^{(+1)}\psi_{r-2}^{(-1)} + \tau^{(2)}(\omega_{r-2}\omega_{r-1}\psi_{r-2}^{(+2)}\psi_{r-2}^{(-2)} + \omega_{r-2}\omega_r\psi^{(+2)}\psi^{(-2)}) + \\ &\tau^{(3)}(\omega_{r-2}\omega_{r-3}\omega_{r-3}^{(+2)}\omega_{r-3}^{(-2)} + \omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_{r-1} + \omega_{r-4}\omega_{r-3}\omega_{r-2} + \\ &\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r + \omega_{r-1}\omega_{r-2}\omega_r)),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\ddot{q}_{r-1} = 2(\tau^{(1)}\omega_{r-1}\psi_{r-1}^{(+1)}\psi_{r-1}^{(-1)} + \tau^{(2)}\omega_{r-1}\omega_{r-2}\psi_{r-2}^{(+2)}\psi_{r-2}^{(-2)} + \tau^{(3)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_{r-1} + \omega_r\omega_{r-1}\omega_{r-2})), \tag{27}$$

$$\ddot{q}_r = 2(\tau^{(1)}\omega_r\psi_r^{(+1)}\psi_r^{(-1)} + \tau^{(2)}\omega_r\omega_{r-2}\psi^{(+2)}\psi^{(-2)} + \tau^{(3)}(\omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r + \omega_{r-1}\omega_{r-2}\omega_r)). \tag{28}$$

由哈密顿量的定义,经过一些计算,系统的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H = &2\sum_{i=1}^{r-1}\dot{q}_i^2 - \sum_{i=2}^{r-1}\dot{q}_i\dot{q}_{i-1} - \sum_{i=1}^{r-2}\dot{q}_i\dot{q}_{i+1} - 2\dot{q}_r\dot{q}_{r-1} + 2\dot{q}_r^2 + 2\tau^{(1)}\Big(\sum_{i=1}^{r-1}\omega_i\psi_i^{(+1)}\psi_i^{(-1)} + \\ &\omega_r\psi_r^{(+1)}\psi_r^{(-1)}\Big) - 2\tau^{(2)}\Big(\sum_{i=1}^{r-2}K_{i+1,i}\omega_i\omega_{i+1}\psi_i^{(+2)}\psi_i^{(-2)} - \omega_{r-2}\omega_r\psi^{(+2)}\psi^{(-2)}\Big) + \\ &2\tau^{(3)}\Big(\sum_{i=1}^{r-3}K_{i+2,i+1}K_{i+1,i}\omega_i\omega_{i+1}\omega_{i+2} + \omega_{r-3}\omega_{r-2}\omega_r + \omega_{r-1}\omega_{r-2}\omega_r\Big).\end{aligned} \tag{29}$$

由正则哈密顿结构,给出系统的正则泊松关系为

$$\{\dot{q}_i, q_j\} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}K_{ji}^{-1}\delta_{ij}, \tag{30}$$

$$\{\psi_i^{(+1)}, \psi_k^{(+1)}\} = \frac{\tau^{(2,1)}}{\tau^{(1)}}(\delta_{k,i-1}K_{i-1,i}\psi_{i-1}^{(+2)} - \delta_{k,j+1}K_{i+1,i}\psi_i^{(+2)}), \tag{31}$$

$$\{\psi_i^{(+1)},\psi_r^{(+1)}\}=\frac{\tau^{(2,1)}}{\tau^{(1)}}\delta_{i,r-2}\psi^{(+2)},\tag{32}$$

$$\{\psi_i^{(+1)},\psi_k^{(+2)}\}=\frac{\tau^{(3,2)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{k,i-2}K_{i-1,i}-\delta_{k,i+1}K_{i+1,i})\ ,\tag{33}$$

$$\{\psi_r^{(+1)},\psi_k^{(+2)}\}=\frac{\tau^{(3,2)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{k,r-2}-\delta_{k,r-3})\ ,\tag{34}$$

$$\{\psi_i^{(+1)},\psi_k^{(+2)}\}=\frac{\tau^{(3,2)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{i,r-3}+\delta_{i,r-1})\ ,\tag{35}$$

$$\{\psi_i^{(-1)},\psi_k^{(-1)}\}=\frac{\tau^{(1,2)}}{\tau^{(1)}}(\delta_{k,i-1}K_{i-1,i}\psi_{i-1}^{(-2)}-\delta_{k,i+1}K_{i+1,i}\psi_i^{(-2)})\ ,\tag{36}$$

$$\{\psi_i^{(-1)},\psi_r^{(-1)}\}=\frac{\tau^{(1,2)}}{\tau^{(1)}}\delta_{i,r-2}\psi^{(-2)},\tag{37}$$

$$\{\psi_i^{(-1)},\psi_k^{(-2)}\}=\frac{\tau^{(2,3)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{k,i-2}K_{i-1,i}-\delta_{k,i+1}K_{i+1,i})\ ,\tag{38}$$

$$\{\psi_r^{(-1)},\psi_k^{(-2)}\}=\frac{\tau^{(2,3)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{k,r-2}-\delta_{k,r-3})\ ,\tag{39}$$

$$\{\psi_i^{(-1)},\psi^{(-2)}\}=\frac{\tau^{(2,3)}}{\tau^{(2)}}(\delta_{i,r-3}+\delta_{i,r-1})\ .\tag{40}$$

在上式中定义,当 $i<1$ 或 $i>r$ 时,$\omega_i=0$;耦合常数 $\tau^{(k)}=\mu^{(k)}\mu^{(-k)}$; $\tau^{(i,j)}=\mu^{(i)}\mu^{(-j)}$;当 $i<1$ 时,依赖于时间的力学变量

$$\psi_i^{(\pm k)}=0,\ k=1,2.$$

3 讨论

上文讨论了由一组有序整数(m,n)(m,n 分别表示正、负根的级数)表示的经典李代数 D_r 上推广的 Toda 力学系统,并给出 $m,n\leqslant 3$ 时系统的运动方程、哈密顿量以及泊松括号的具体形式. 对于上面的(3,3)Toda 链可以加上适当条件进一步得到李代数 D_r 上的其他类型 Toda 力学系统.

1) 若取 Lax pair(4),(5)及(6)—(40)式中的 $\mu^{(-3)}=0$, $\psi_i^{(-2)}=\psi^{(-2)}=1$,则可得李代数 D_r 上(3,2)Toda 链相应的运动方程、哈密顿量和泊松括号.

2) 若取 Lax pair(4),(5)及(6)—(40)式中的 $\mu^{(-2)}=\mu^{(-3)}=0$, $\psi_i^{(-1)}=1$, $\psi_i^{(-2)}=\psi^{(-2)}=0$,则可得李代数 D_r 上(3,1)Toda 链相应的运动方程、哈密顿量和泊松括号.

3) 若取 Lax pair(4),(5)及(6)—(40)式中的 $\mu^{(3)}=\mu^{(-3)}=0$, $\psi_i^{(+2)}=\psi_i^{(-2)}=\psi^{(+2)}=\psi^{(-2)}=1$,则可得李代数 D_r 上(2,2)Toda 链相应的运动方程、哈密顿量和泊松括号.

4) 若取 Lax pair(4),(5)及(6)—(40)式中的 $\mu^{(-2)}=\mu^{(3)}=\mu^{(-3)}=0$, $\psi_i^{(+2)}=\psi_i^{(-1)}=\psi^{(+2)}=1$, $\psi_i^{(-2)}=\psi^{(-2)}=0$,则可得李代数 D_r 上(2,1)Toda 链相应的运动方程、哈密顿量和泊松括号.

5) 若取 Lax pair(4),(5)及(6)—(40)式中的 $\mu^{(2)}=\mu^{(-2)}=\mu^{(3)}=\mu^{(-3)}=0$, $\psi_i^{(+1)}=\psi_i^{(-1)}=1$, $\psi_i^{(+2)}=\psi_i^{(-2)}=\psi^{(+2)}=\psi^{(-2)}=0$,则可得李代数 D_r 上(1,1)Toda 链相应的运动方程、哈密顿量和泊松括号.

从上面的计算及讨论可以看出如果将泊松括号用相应的对易关系代替,即$\{,\}\to -i[,]$那么上述推广的 Toda 力学系统可以看作海森堡绘景中的量子力学系统,此时的(m,n)Toda 链成为标准的 Toda 变量($q_i's$)和非对易坐标变量($\psi_i^{(\pm k)},s$)构成的系统. 在这种情况下变量 $\psi_i^{(\pm k)},s$ 的非对易性并不影响 Lax 方程的正确性,因而不影响系统的可积性(变量 $\psi_i^{(+k)}$ 与 $\psi_j^{(-l)}$ 仍保持对易). 因此,可以进一步计算(m,n)Toda 系统不同变量之间的量子力学关系,进而得到一些精确可解量子力学模型,我们希望这些模型能够描述一些足够复杂的实际物理系统,因文献[37,38]发现含有对易坐标变量的实际量子力学系统具有重要的应用价值. 还可以进一步研究李代数 D_r 上推广的对称的 Toda 链、周期性 Toda 链,从而研究其谱曲线以及与超对称规范理论的联系.

参考文献(References)

1 Toda M. J. Phys. Soc. Japan, 1967, **22**:431—436; J. Phys. Soc. Japan, 1967, **23**:501—506

2 Flaschka H. Phys. Rev., 1974, **B9**: 1924—1925; Prog. Theor. Phys., 1974, **51**:703—716

3 Calogero F. J. Math. Phys., 1971, **12**:419—436; Erratum, 1996, **37**:3646; Lett. Nuovo Cimento, 1975, **13**:411—416

4 Moser J. Adv. Math., 1975, **16**: 197—220; Prog. in Math., 8, Birkhauser, Basel, 1980, 233—289

5 Ruijsenaars S N M, Schneider. Ann. Phys., 1986, **170**:370—405

6 Ruijsenaars S N M. Commun. Math. Phys., 1987, **110**:191—213

7 Awata H, Matsuo Y, Yamamoto T. J. Phys., 1996, **A29**:3089—3098

8 Brink L et al. Nucl. Phys., 1993, **B401**:591—612

9 Bergshoeff E, Vasiliev M. Int. J. Mod. Phys., 1995, **A10**:3477

10 Marotta V, Sciarrino A. Nucl. Phys., 1996, **B476**:351

11 Caracciolo et al. Proceedings of the Ⅳ Meeting Common Trends in Condensed Matter and High Energy Physics, Chia Laguna, Cagliari (Italy, 3—10 Sep. 1995), hep-th/9604009

12 Felder G. Conformal Field Theory and Integrable Systems Associated to Elliptic Curves, hep-th/9407154

13 Etingof P I, Kirillov A A. On the Affine Analogs of Jack's and Macdonald's Polynomials, hep-th/9403168

14 Iso S, Rey S J. Phys. Lett., 1995, **B352**:111—116

15 Kawakami N. Phys. Rev. Lett., 1993, **71**:275

16 Azuma H, Iso S. Phys. Lett., 1994, **B331**:107

17 Caselle M. Phys. Rev. Lett., 1995, **74**:2776

18 Braden H W et al. Nucl. Phys., 1990, **B338**:689; Nucl. Phys., 1991, **B356**:469

19 Babelon O, Bernard D. Phys. Lett., 1993, **B317**:363

20 Shiota T. J. Math. Phys., 1995, **35**:5844

21 Andric I, Bardek V, Jonke L. Phys. Lett., 1995, **B357**:374—378

22 Braden H W, Sasaki R. Prog. Theor. Phys., 1997, **97**:1003

23 Donagi R, Witten E. Nucl. Phys., 1996, **B460**; 299—334, hep-th/9510101

24 Marshakov A. Seiberg-Witten Toda Chains and $N = 1$ SQCD, hep-th/0011222

25 Marshakov A. Seiberg-Witten Theory and Integrable Systems. World Scientific Publishing, 1999

26 Dorey N. An Elliptic Superpotential for Softly Broken $N = 4$ Supersymmetric Yang-Mills Theory, JHEP 9907, 1999, 021. hep-th/9906011

27 ZHAO L. Commum. Theor. Phys., 1993, **15**:221

28 HOU Bo-Yu, ZHAO Liu. Int. J. Mod. Phys., 1993, **A8**(6):1105—1123

29 ZHAO Liu, HOU Bo-Yu. Int. J. Mod. Phys., 1993, **A8**(21): 3773—3789

30 ZHAO Liu, HOU Bo-Yu. Ann. Phys., 1994, **230**:1—20

31 ZHAO Liu, HOU Bo-Yu. Nucl. Phys., 1995, **B436**:638—658

32 WANG Yan-Shen, ZHAO Liu. Sciencia Sinica, 1995, **A25**: 268(in both Chinese and English)

33 YANG Zhan-Yeng, ZHAO Liu, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(2): 91(in Chinese)
(杨战营,赵柳,甄翼. 高能物理与核物理,2000,**24**(2):91)

34 YANG Zhan-Yeng, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(6):484(in Chinese)
(杨战营,甄翼. 高能物理与核物理,2000,**24**(6):484)

35 ZHAO L, LIU W Y. Higher Toda Mechanics and Spectral Curves, hep-th/0306003

36 ZHAO L, LIU W Y, YANG Z Y. Generalized Toda Mechanics Associated with Classical Lie Algebras and Their Reductions, hep-th/0306084

37 Gamboa J et al. Mod. Phys. Lett., 2001, **A16**:2075—2078; hep-th/0104224

38 Nair V. Phys. Lett., 2001, **B505**:249—254; hep-th/0008027

Generalized Toda Mechanics Associated with Classical Lie Algebras D_r*

LIU Wang-Yun[1)] YANG Zhan-Ying[2)] ZHAO Liu[3)]

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, Chain)

Abstract In this paper, we construct the Lax pair of classical Lie algebra D_r according to the characteristic of its root system, and get a family of integrable generalizations of Toda mechanics (labeled by a pair of ordered integers (m, n), m, n denote the order of positive and negative roots respectively). We aiso provide the explicit equations of motion, the Hamiltonian and the Poission brackets corresponding to the case of $m, n \leqslant 3$.

Key words root system (Lie algebra), Toda chain, Lax pair, Poission brackets

---

Received 25 June 2003

* Supported by NSFC(90103001)

1) E-mail: liu02401073@sina.com

2) E-mail: zyyang@nwu.edu.cn

3) E-mail: lzhao@nankai.edu.cn