第 29 卷 第 1 期
2005 年 1 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.29, No.1
Jan., 2005

Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上的推广 Toda 力学系统研究*

朱桥[1)] 杨战营[2)] 石康杰

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 对 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上具有长程相互作用的 Toda 力学系统进行推广，用一组有序整数对(X, Y)来表示 Toda 链，构造出 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 的 Lax Pair，并给出了系统在(3,2)Toda 链情况下的运动方程和 Hamiltonian 结构. 在此模型中，标准的 Toda 变量之间和附加的坐标变量之间的泊松括号都非零，部分附加的坐标变量之间的泊松结构构成李代数.

关键词 Toda 多体力学系统 Lax Pair 运动方程 泊松括号

1 引言

人们在得到两体问题的精确解之后，开始了对多体问题的进一步研究，并于 20 世纪 60 年代末 70 年代初发现了可以用逆散射方法进行精确求解的一维多体系统，如 Toda 链[1]，Calogero-Moser 模型[2,3]和 Ruijsenaars-Schneider 模型[4]等. 随后，Donagi 和 Witten 等人发现这些可积模型与 $N=2$ 超对称规范理论存在密切联系[5]，而 Dijkgraaf 和 Vafa 等人在用非微扰论方法研究超对称规范理论的模空间结构方面也取得重大进步[6]. 近几十年来，可积多体系统问题依然为许多理论物理学家和数学家所关注，这是因为它既与长程相关、非线性波的传播[7]、霍尔效应[8]、孤子理论[9—11]等物理问题相联系，又和反散射方法、非线性李对称、量子群 Reimanian 表面的代数几何特性等代数问题有关.

Toda 模型在初始时是一个只考虑近邻相互作用的一维质点系统，这些质点间的相互作用是非线性的指数形式. 随后提出的一系列推广的 Toda 理论也仅考虑到高维情形、与某些超物质耦合或非阿贝尔推广[12]等特殊情形. 我们可以将任意经典李代数的 Toda 链用一组有序整数对(X, Y)来表示，X, Y 分别代表正负根的级数，这种方法对于 Loop 代数同样适用. 与经典李代数情形[13]相比，以 Loop 代数为基础的多体力学系统更具现实意义. 这是因为以 Loop 代数为基础的 Toda 理论的 Lax 矩阵谱曲线[14]与 Seiberg-Witten 理论中四维超对称规范理论的模参数所生成的椭圆曲线有紧密联系[5]，从而为得到四维超对称规范理论的模参数和预势提供了一种方法. 为此，构造了 Loop 代数上的推广 Toda 力学系统.

本文讨论 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上 Toda 链的情形. 仍用一组有序整数对(X, Y)来表示 Toda 链，给出(3,2)Toda 链情况下的 Lax Pair，运动方程和 Hamiltonian 结构，这些结果可以推广到(3,1)、(2,2)等其他情形. 标准的 Toda 变量和附加的坐标变量间都是泊松非对易的，部分附加的坐标变量之间的泊松结构构成李代数.

2 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上的推广 Toda 模型

根据 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 的卡当(Cartan)矩阵和根系特点来构造具有长程相互作用的推广 Toda 力学

2004－05－21 收稿，2004－07－21 收修改稿

* 国家自然科学基金(10347005)资助

1) E-mail: zhu_cheese0477@sina.com.cn

2) E-mail: zyyang@nwu.edu.cn

系统,研究对象是非周期、有限的 Toda 链.采用与文献[15]一致的符号约定,即使用舍瓦累(Chevalley)基进行推广.首先给出 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上推广的(3,2)Toda 链的 Lax Pair:

$$\begin{aligned} L = & \sum_{i=1}^{r} p_i h_i + \sum_{i=0}^{r}(b_i e_i + d_i f_i) + \sum_{i=1}^{r-2}(c_i e_{(i,i+1)} - \\ & a_i f_{(i,i+1)} + \tilde{c} e_{(0,2)} + c e_{(r-2,r)} - \tilde{a} f_{(0,2)} - \\ & a f_{(r-2,r)} + \sum_{i=1}^{r-3} m_i e_{(i,i+1,i+2)} + m e_{(r-3,r-2,r)} + \\ & l e_{(r-1,r-2,r)} + \tilde{l} e_{(0,2,3)} + \widetilde{m} e_{(1,2,0)} = \\ & L_{(0)} + L_{(+)} + L_{(-)}, \end{aligned} \tag{1}$$

和

$$\begin{aligned} M = & \sum_{i=0}^{r}(b_i e_i - d_i f_i) + \sum_{i=1}^{r-2}(c_i e_{(i,i+1)} + a_i f_{(i,i+1)} + \\ & \tilde{c} e_{(0,2)} + \tilde{a} f_{(0,2)} + c e_{(r-2,r)} + a f_{(r-2,r)} + \\ & \sum_{i=1}^{r-3} m_i e_{(i,i+1,i+2)} + m e_{(r-3,r-2,r)} + \\ & l e_{(r-1,r-2,r)} + \tilde{l} e_{(0,2,3)} + \tilde{m} e_{(1,2,0)} = \\ & L_{(+)} - L_{(-)}. \end{aligned} \tag{2}$$

其中,$L_{(0)}$ 是卡当(Cartan)部分,$L_{(+)}$ 是正根部分,$L_{(-)}$ 是负根部分.这里采用了以下符号规定:

$$\begin{aligned} & e_{(i,j)} = [e_i, e_j], e_{(i,j,k)} = [e_i,[e_j,e_k]], \\ & f_{(i,j)} = [f_i, f_j]. \end{aligned} \tag{3}$$

系统所满足的 Lax 方程

$$\dot{L} = [L, M], \tag{4}$$

描述了矩阵 L 的时间演化规律,力学量上的点代表对其进行时间微商,[,]是定义在 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$ 上的李括号.比较 Lax 方程两边的系数,通过积分直接给出相对于最远根(这里是三级正根和二级负根)的系数与 L 中卡当部分系数之间的关系,令 $p_i = \dot{q}_i$,得到

$$\begin{aligned} a_j &= \lambda_1^{(j)} e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,j}+k_{i,j+1})}, \\ \tilde{a} &= \lambda_2 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,0}+k_{i,2})}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a &= \lambda_3 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,r}+k_{i,r-2})}, \\ m_j &= \lambda_4^{(j)} e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,j}+k_{i,j+1}+k_{i,j+2})}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} m &= \lambda_5 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,r-3}+k_{i,r-2}+k_{i,r})}, \\ l &= \lambda_6 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,r-1}+k_{i,r-2}+k_{i,r})}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{l} &= \lambda_7 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,0}+k_{i,2}+k_{i,3})}, \\ \widetilde{m} &= \lambda_8 e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,1}+k_{i,2}+k_{i,0})}. \end{aligned} \tag{8}$$

其中,λ_i 与 t 无关,为简单起见,取其值为1.对其余根的系数设其形式为

$$\begin{aligned} b_j &= e^{\sum_{i=1}^{r} q_i k_{i,j}} \Psi_j^{(+1)}, \\ d_j &= e^{\sum_{i=1}^{r} q_i k_{i,j}} \Psi_j^{(-1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} c_j &= e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,j}+k_{i,j+1})} \Psi_j^{(+2)}, \\ \tilde{c} &= e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,0}+k_{i,2})} \Psi_B^{(+2)}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$c = e^{\sum_{i=1}^{r} q_i(k_{i,r}+k_{i,r-2})} \Psi_A^{(+2)}. \tag{11}$$

q_i 和 $\Psi_i^{(\pm k)}$ 都是依赖于时间的力学变量.在写出运动方程之前,作如下规定:

$$\begin{aligned} & \Psi_{-1}^{(+2)} = \Psi_0^{(+2)} = \Psi_r^{(+2)} = \Psi_{r-1}^{(+2)} = \Psi_{-2}^{(\pm1)} = \\ & \Psi_{-1}^{(\pm1)} = \Psi_{r+1}^{(\pm1)} = \Psi_{r+2}^{(\pm1)} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$K_{ij} = 0 (i,j \notin [0,r]). \tag{13}$$

这些规定对本文讨论到的所有 $X, Y \leqslant 3$ 的情形都有效.定义 $w_j = e^{2\sum_{i=1}^{r} q_i k_{i,j}}$, $j = 0, \cdots, r$.由 Lax 方程得到(3,2)Toda 力学系统的考虑次近邻相互作用的分量方程,$j = 1, \cdots, r-2$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_B^{(+2)} &= -2\Psi_1^{(-1)} w_1 - 2\Psi_3^{(-1)} w_3, \\ \dot{\Psi}_A^{(+2)} &= 2\Psi_{r-1}^{(-1)} w_{r-1} + 2\Psi_{r-3}^{(-1)} w_{r-3}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_j^{(+2)} = & -2\theta(r-3-j)\Psi_{j+2}^{(-1)} w_{j+2} + \\ & 2\theta(r-2-j)\Psi_{j-1}^{(-1)} w_{j-1} - \\ & 2\delta_{j,r-3}\Psi_r^{(-1)} w_r + 2\delta_{j,r-2}\Psi_r^{(-1)} \times \\ & w_r - 2\delta_{j,1}\Psi_0^{(-1)} w_0 + 2\delta_{j,2}\Psi_0^{(-1)} w_0. \end{aligned} \tag{15}$$

其中,$\theta(t)$ 为阶跃函数:$\theta(t) = \begin{cases} 0, t<0 \\ 1, t \geqslant 0 \end{cases}$.考虑近邻相互作用的分量方程,$j = 0, \cdots, r$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_j^{(+1)} = & -2\theta(r-2-j)\Psi_j^{(+2)}\Psi_{j+1}^{(-1)} w_{j+1} + \\ & 2\theta(r-1-j)\Psi_{j-1}^{(+2)}\Psi_{j-1}^{(-1)} w_{j-1} - \\ & 2\theta(r-3-j) w_{j+1} w_{j+2} + \\ & 2\theta(r-1-j) w_{j-1} w_{j-2} - \\ & 2\delta_{j,r-2}\Psi_r^{(-1)}\Psi_A^{(+2)} w_r + \\ & 2\delta_{j,r}\Psi_{r-2}^{(-1)}\Psi_A^{(+2)} w_{r-2} + 2\delta_{j,r} w_{r-3} w_{r-2} - \\ & 2\delta_{j,r} w_{r-2} w_{r-1} - 2\delta_{j,r-3} w_{r-2} w_r - \\ & 2\delta_{j,r-1} w_{r-2} w_r + 2\delta_{j,2}\Psi_0^{(-1)}\Psi_B^{(+2)} w_0 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&2\delta_{j,1}w_0w_2+2\delta_{j,3}w_0w_2+\\
&2\delta_{j,0}(-\Psi_2^{(-1)}\Psi_B^{(+2)}w_2-\\
&w_2w_3+w_1w_2),
\end{aligned}\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Psi}_j^{(-1)}=&-2\theta(r-2-j)\Psi_{j+1}^{(+1)}w_{j+1}+\\
&2\theta(r-1-j)\Psi_{j-1}^{(+1)}w_{j-1}+\\
&2\delta_{j,r}\Psi_{r-2}^{(+1)}w_{r-2}-2\delta_{j,r-2}\Psi_r^{(+1)}w_r-\\
&2\delta_{j,0}\Psi_2^{(+1)}w_2+2\delta_{j,2}\Psi_0^{(+1)}w_0.
\end{aligned}\tag{17}
$$

Lax 方程的对角元(卡当部分)给出 q_j 的相关方程,$j=1,\cdots,r$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_j=\ddot{q}_j=&-2\Psi_j^{(+1)}\Psi_j^{(-1)}w_j-2\theta(r-2-j)\\
&\Psi_j^{(+2)}w_jw_{j+1}-2\theta(r-1-j)\Psi_{j-1}^{(+2)}w_jw_{j-1}+\\
&2\Psi_0^{(+1)}\Psi_0^{(-1)}w_0\alpha_j-2\delta_{j,r-2}\Psi_A^{(+2)}w_{r-2}w_r-\\
&2\delta_{j,r}\Psi_A^{(+2)}w_{r-2}w_r-2\delta_{j,2}\Psi_B^{(+2)}w_0w_2+\\
&2\Psi_B^{(+2)}w_0w_2\alpha_j.
\end{aligned}\tag{18}
$$

以上给出了 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$上推广的(3,2)Toda 力学系统的 Lax Pair 和运动方程.这是一个动力学系统,可以认为是质点受力的牛顿方程.本文通过计算给出这个系统的哈密顿形式,也即找出了这个系统的哈密顿量以及各力学量之间的泊松括号,使得 Lax 方程的分量方程可以用哈密顿方程来描述:

$$
\dot{l}_a=\{l_a,H\},\tag{19}
$$

这里令 $L=l_aT^a$,其中 T^a 是(1)式中的李代数生成元.设定的哈密顿量为 $H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(L^2)=\frac{1}{2}(L,L)$,

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r}K_{ij}p_ip_j+\sum_{j=0}^{r}\omega_j\Psi_j^{(+1)}\Psi_j^{(-1)}+\\
&\sum_{j=1}^{r-2}\omega_j\omega_{j+1}\Psi_j^{(+2)}+\Psi_B^{(+2)}\omega_0\omega_2+\\
&\Psi_A^{(+2)}\omega_{r-2}\omega_r.
\end{aligned}\tag{20}
$$

泊松关系如下:

$$
\begin{aligned}
&\{p_i,q_j\}=-(K^{-1})_{ji},\\
&\{\Psi_{r-3}^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=-2\delta_{i,r-1}+2\delta_{i,r-4}-2\delta_{i,r},
\end{aligned}\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Psi_B^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=-2\delta_{i,1}-2\delta_{i,3},\\
&\{\Psi_A^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=2\delta_{i,r-1}+2\delta_{i,r-3},
\end{aligned}\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Psi_{r-2}^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=2\delta_{i,r-3}+2\delta_{i,r},\\
&\{\Psi_1^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=-2\delta_{i,3}-2\delta_{i,0},
\end{aligned}\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Psi_r^{(-1)},\Psi_i^{(-1)}\}=2\delta_{i,r-2},\\
&\{\Psi_r^{(+1)},\Psi_i^{(+1)}\}=2\delta_{i,r-2}\Psi_A^{(+2)},
\end{aligned}\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Psi_0^{(-1)},\Psi_i^{(-1)}\}=-2\delta_{i,2}\\
&\{\Psi_0^{(+1)},\Psi_i^{(+1)}\}=-2\delta_{i,2}\Psi_B^{(+2)},
\end{aligned}\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Psi_2^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=-2\delta_{i,4}+2\delta_{i,1}+2\delta_{i,0},\\
&\{\Psi_2^{(-1)},\Psi_i^{(-1)}\}=-2\delta_{i,3}+2\delta_{i,1}+2\delta_{i,0},
\end{aligned}\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_j^{(+2)},\Psi_i^{(+1)}\}=&-2\delta_{i,j+2}\theta(r-3-j)+\\
&2\delta_{i,j-1}\theta(r-2-j),
\end{aligned}\tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_j^{(+1)},\Psi_i^{(+1)}\}=&-2\delta_{i,j+1}\theta(r-2-j)\Psi_j^{(+2)}+\\
&2\delta_{i,j-1}\theta(r-1-j)\Psi_{j-1}^{(+2)},
\end{aligned}\tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_j^{(-1)},\Psi_i^{(-1)}\}=&-2\delta_{i,j+1}\theta(r-2-j)+\\
&2\delta_{i,j-1}\theta(r-1-j),
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_2^{(+1)},\Psi_i^{(+1)}\}=&-2\delta_{i,3}\Psi_2^{(+2)}+2\delta_{i,1}\Psi_1^{(+2)}+\\
&2\delta_{i,0}\Psi_B^{(+2)},
\end{aligned}\tag{30}
$$

$$
\{\Psi_{r-2}^{(-1)},\Psi_i^{(-1)}\}=-2\delta_{i,r-1}+2\delta_{i,r-3}-2\delta_{i,r},\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Psi_{r-2}^{(+1)},\Psi_i^{(+1)}\}=&-2\delta_{i,r-1}\Psi_{r-2}^{(+2)}+\\
&2\delta_{i,r-3}\Psi_{r-3}^{(+2)}-2\delta_{i,r}\Psi_A^{(+2)}.
\end{aligned}\tag{32}
$$

其余泊松括号为零.计算表明,这些泊松括号是封闭的,满足 Jacobi 恒等式.(20)式的哈密顿量和这些泊松括号的确使(19)式成立.由此,建立了这个系统的哈密顿结构.

3　结论

我们对 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$上具有长程相互用的 Toda 力学系统进行推广,给出了(3,2)Toda 力学系统的运动方程和哈密顿结构.这些结果可推广到(3,1),(2,2)等其他情形:

1)如果略去 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$上(3,2)Toda 链中的二级负根,可得到 nested 约化下的(3,1)Toda 链模型的 Lax Pair、运动方程、哈密顿量和泊松括号.

2)nested 约化下的 Loop 代数 $\mathscr{L}(D_r)$上的(2,2)Toda 链模型可由(3,2)Toda 链略去 Lax Pair 中的三级正根实现.

如果用对易关系代替上述的泊松括号,即$\{,\}\to -i[,]$,就可以对该推广 Toda 链进行正则量子化处理.按照本文的途径,很容易将 Toda 力学系统推广到更长程相互作用的情形,我们希望这些多体系统能够描述某种 $N=1$ 或 $N=2$ 超对称规范理论或一些复杂物理现象.

参考文献(References)

1 Toda M. J. Phys. Soc. Japan, 1967, **22**: 431—436; J. Phys. Soc. Japan, 1967, **23**: 501—506

2 Calogero F. J. Math. Phys., 1971, **12**: 419—436; Erratum, 1996, **37**: 3646; Lett. Nuovo Cimento, 1975, **13**: 411—416

3 Moser J. Adv. Math., 1975, **16**: 197—220; Prog. in Math., 8, Birkhauser, Basel, 1980, 233—289

4 Ruijsenaars S N M. Schneider. Ann. Phys., 1986, **170**: 370—405

5 Donagi R, Witten E. Nucl. Phys., 1996, **B460**: 299—334; hep-th/9510101

6 Dijkgraaf R, Vafa C. Nucl. Phys., 2002, **B664**: 3—20; hep-th/0206255

7 Toda M. J. Phys. Soc. Japan, 1967, **23**: 501—506

8 Castro-Alvarcdo O A, Fring A. Applications of Quantum Integrable Systems, arXiv: hep-th/0301102.

9 JIANG Jin-Huan, LI Ai-Min, LI Zi-Ping. HEP & NP, 2003, **27**(6): 489—492 (in Chinese)
(江金环,李爱民,李子平.高能物理与核物理,2003,**27**(6):489—492)

10 YANG Zhan-Ying, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(6): 484—489 (in Chinese)
(杨战营,甄翼.高能物理与核物理,2000,**24**(6):484—489)

11 YANG Zhan-Ying, ZHAO Liu, ZHEN Yi. HEP & NP, 2000, **24**(4): 1—7 (in Chinese)
(杨战营,赵柳,甄翼.高能物理与核物理,2000,**24**(4):1—7)

12 CHAO L. Commun. Theore. Phys., 1993, **15**: 221; CHAO L., YANG Z Y. Commun. Theore. Phys., 2001, **35**: 435; Hollowood T. Nucl. Phys., 1992, **B384**: 523

13 LIU Wang-Yun, YANG Zhan-Ying, ZHAO Liu. HEP & NP, 2004, **28**(4): 359—364 (in Chinese)
(刘王云,杨战营,赵柳.高能物理与核物理,2004,**28**(4):359—364)

14 ZHAO Liu, LIU Wang-Yun. Commun. Theore. Phys., 2004, **42**: 9—18

15 YANG Zhan-Ying, ZHAO Liu, LIU Wang-Yun et al. Generalized Toda Mechanics Associated with Loop Algebras $\mathscr{L}(C_r)$ and $\mathscr{L}(D_r)$ and Their Reductions. Commun. Theore. Phys., 2004, (in press)

Study on Generalized Toda Mechanics System with Loop Algebra $\mathscr{L}(D_r)$ *

ZHU Qiao[1)] YANG Zhan-Ying[2)] SHI Kang-Jie

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

Abstract In this paper, we generalize the Toda mechanics system with long range interaction to the case of Loop algebra $\mathscr{L}(D_r)$. By using a pair of ordered positive integer (X, Y) to describe Toda chains, we extract the equation of motion and the Hamiltonian structure of this system for (3,2) Toda chain. It turns out that both extra coordinates and standard Toda variables are Poisson non-commutative in the case of nontrivial generalization, and for some case, extra variables appear linearly on the right hand side of the Poisson bracket.

Key words Toda many body mechanics system, Lax Pair, equation of motion, Poisson bracket

Received 21 May 2004, Revised 21 July 2004

* Supported by NSFC(10347005)

1) E-mail: zhu_cheese0477@sina.com.cn

2) E-mail: zyyang@nwu.edu.cn