三种近似推理模式的等价性

惠小静[1,2]
HUI Xiao-jing[1,2]

1.延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000
2.陕西师范大学 数学与信息科学学院,西安 710062
1.College of Mathematics and Computer Science,Yan'an University,Yan'an,Shaanxi 716000,China
2.Institute of Mathematics,Shaanxi Normal University,Xi'an 710062,China
E-mail:hui.xiaojing@gmail.com

HUI Xiao-jing.Equivalence of three different types of approximate reasoning patterns.Computer Engineering and Applications,2008,44(27):56-57.

Abstract: It is proved that the approximate reasoning pattern I is equivalent to the approximate reasoning pattern II,and the approximate reasoning pattern I is also equivalent to the approximate reasoning pattern III.Thus the three different types of approximate reasoning patterns are equivalent to each other.
Key words: logic truth degree;pseudo-metric space;approximate reasoning

摘 要:论证了伪距离空间中近似推理模式 I 与模式 II 是等价的;证明了模式 I 与模式 III 也是等价的,从而得出三种近似推理模式是等价关系。
关键词:逻辑真度;伪距离空间;近似推理
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.27.018 **文章编号:**1002-8331(2008)27-0056-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**O159

1 引言

文献[1-4]从把逻辑概念程度化入手,提出了真度概念并引发了一系列后继研究[5-9],逐步形成了计量逻辑学[10-11]。文献[11]在建立了伪距离空间之后,在其中展开了近似推理,提出了三种近似推理模式并探讨了三者的关系。最后提出一个问题:三种近似推理模式是否等价。对此,本文首先论证了模式 I 与模式 II 是等价的,然后又证明了模式 I 与模式 III 也是等价的,从而对该问题给出了肯定的回答。

2 预备知识

设 $S=\{q_1,q_2,\cdots\}$ 为原子公式集,$F(S)$ 是 S 生成的 $(\neg,\rightarrow)$ 型自由代数,称 $F(S)$ 中的元为公式。设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)\in F(S)$,则 A 对应一个 n 元 Boole 函数 $f_A:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$ 如下:$\forall\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$,用 x_k 取代 $A(q_1,\cdots,q_n)$ 中的 $q_k(k=1,\cdots,n)$,并按 $\neg x_k=1-x_k$ 和 $x_k\rightarrow x_l=(1-x_k)\vee x_l$ 解释逻辑连接词 $\neg$ 与 $\rightarrow$,则得 $f_A(x_1,\cdots,x_n)$。称 f_A 为 A 诱导的 Boole 函数。有时 f_A 也表示为 $\bar{A}$。对于 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的某些赋值,A 的赋值等于 1。上述赋值的个数用函数表示就是 $|\bar{A}^{-1}(1)|$ 或 $|f^{-1}(1)|$。

定义 1[11] 设 $A(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是系统 L 中含有 n 个原子公式的合式公式,则 A 的真度 $\tau(A)$ 定义如下:$\tau(A)=\dfrac{|\bar{A}^{-1}(1)|}{2^n}$。

简言之,$\tau(A)$ 就是公式 A 中所含的原子公式 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 的总赋值中使得 A 取值为 1 的赋值所占的比重。为了证明的需要,该定义可以换种方式考虑:对 $\forall\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$,令 $\varphi(\alpha)=\dfrac{1}{2^n}$,则得一映射 $\varphi:\{0,1\}^n\rightarrow\dfrac{1}{2^n}$。下面就可以利用映射 φ 给出真度的等价刻画:

定义 2 设 $A=A(q_1,\cdots,q_n)\in F(S)$,令 $[A]=f_A^{-1}(1)$,$\mu([A])=\sum\{\varphi(\alpha):\alpha\in f_A^{-1}(1)\}$,显然这里的 $\mu([A])$ 与定义 1 给出的 $\tau(A)$ 是等价的,所以也将 $\mu([A])$ 记为 $\tau(A)$。

定理 1[11] 设 $A\in F(S)$,则 A 是重言式当且仅当 $\tau(A)=1$,A 是矛盾式当且仅当 $\tau(A)=0$。

命题 1[11] 设 $A,B\in F(S)$,则 $\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$。

推论 1[11] 设 $A\in F(S)$,则 $\tau(\neg A)=1-\tau(A)$。

利用真度可以引入相似度与距离的概念:

定义 3[11] 设 $A,B\in F(S)$,令 $\xi(A,B)=\tau((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$,称 $\xi(A,B)$ 为公式 A 与 B 的相似度。显然 $\xi(A,B)=\xi(B,A)$。

定理 2[11] 设 $A,B,C\in F(S)$,则:(1)$A\approx B$ 当且仅当 $\xi(A,B)=1$;(2)$\xi(A,B)+\xi(B,C)\leqslant1+\xi(A,C)$。

定理 3[11] 设 $A,B\in F(S)$,则:$\xi(A,B)=\tau(A\wedge B)+\tau(\neg A\wedge\neg B)=1+\tau(A\wedge B)-\tau(A\vee B)$。

命题 2[11] 设 $A,B,C\in F(S)$,则:(1)$\xi(A,B)+\xi(A,\neg B)=1$;(2)$\xi(A,B)=0$ 当且仅当 $A\sim\neg B$。

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771129)。
作者简介:惠小静(1973-),女,博士研究生,研究方向:不确定性推理。
收稿日期:2007-11-12 **修回日期:**2007-12-27

命题 3[11] 设 $A,B\in F(S)$，令 $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)$。则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离，称为 $F(S)$ 上的自然伪距离，简称伪距离。称 $(F(S),\rho)$ 为伪距离空间。

命题 4[11] 设 $A,B,C\in F(S)$，$\alpha,\beta\in[0,1]$。若 $\tau(A)\geqslant\alpha$，$\tau(A\to B)\geqslant\beta$ 则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$。

推论 2[11] 若 $\vdash A\to B$，则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$。

3　三种近似推理模式之间的关系

文献[11]在建立了逻辑度量空间 $(F(S),\rho)$ 之后，在其中展开了近似推理，提出了三种近似推理模式并探讨了三者的关系。该文最后提出一个问题：三种近似推理模式是否等价。本文对此作出了肯定的回答。

定义 4[11] 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，

（I）如果 $\inf\{\rho(A,B)|B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$ 也即 $\rho(A,D(\Gamma))<\varepsilon$，则称 A 为 Γ 的 I-型误差小于 ε 的结论，记做 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$。

（II）如果 $1-\sup\{\tau(B\to A)|B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$ 也即 $1-\sup\{\tau(\wedge\Sigma\to A)|\Sigma$ 是 Γ 的有限子集$\}<\varepsilon$，则称 A 为 Γ 的 II-型误差小于 ε 的结论，记做 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$。

（III）如果 $\inf\{H((D(\Gamma),D(\Sigma))|\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash A\}<\varepsilon$，则称 A 为 Γ 的 III-型误差小于 ε 的结论，记做 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$。这里 H 是 $\rho(F(S))-\{\varnothing\}$ 上的 Hausdorff 距离。

下面首先说明模式 I 与模式 II 是等价的。

命题 5[11] $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，如果 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$，则 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$。

引理 1 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$B_1\in D(\Gamma)$，$\alpha\in[0,1]$，如果 $\tau(B_1\to A)=\alpha$，那么一定存在 $B_2\in D(\Gamma)$ 使得 $\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))=\alpha$。

证明 根据 $B_1\in D(\Gamma)$，$\vdash B_1\to B_1\vee A$ 及 MP 规则便知 $B_1\vee A\in D(\Gamma)$。令 $B_2=B_1\vee A$，那么 $\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))=\Sigma\{\varphi(\alpha)|\alpha\in f^{-1}_{(B_2\to A)\wedge(A\to B_2)}(1)\}=\Sigma\{\varphi(\alpha)|f_{B_2}(\alpha)=f_A(\alpha)\}=\Sigma\{\varphi(\alpha)|\alpha\in f^{-1}_{B_2}(0)\cup(f^{-1}_{B_1}(1)\cap f^{1}_{A}(1))\}=\tau(B_1\to A)=\alpha$。

定理 4 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，如果 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$，则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$。

证明 设 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$，则有 $1-\sup\{\tau((B\to A)|B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$，从引理 1 可以看出，任取 $B_1\in D(\Gamma)$，若 $\tau(B_1\to A)=\alpha$，那么一定存在 $B_2\in D(\Gamma)$，使得 $\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))=\alpha$。所以一定有：$\sup\{\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))|B_2\in D(\Gamma)\}\geqslant\sup\{\tau(B_1\to A)|B_1\in D(\Gamma)\}$，也即：$1-\sup\{\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))|B_2\in D(\Gamma)\}\leqslant 1-\sup\{\tau(B_1\to A)|B_1\in D(\Gamma)\}$，所以 $1-\sup\{\tau((B_2\to A)\wedge(A\to B_2))|B_2\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$，等价于 $\inf\{\rho(A,B)|B\in D(\Gamma)\}<\varepsilon$，故 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$。

推论 3 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，$A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$ 当且仅当 $A\in D_\varepsilon^2(\Gamma)$。接下来论证模式 I 与模式 III 的等价性：

命题 6[11] 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，如果 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$，则 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$。

定理 5 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$，如果 $A\in D_\varepsilon^1(\Gamma)$，则 $A\in D_\varepsilon^3(\Gamma)$。

证明 令 $\Sigma'=\Gamma\cup A$，显然 $\Sigma'\subset F(S)$，$\Sigma'\vdash A$。下面分两步说明 $H(D(\Gamma),D(\Sigma'))<\varepsilon$。

（I）因为 $\Gamma\subset\Sigma'$，所以 $D(\Gamma)\subset D(\Sigma')$。对任意 $B^*\in D(\Gamma)$，均有 $\rho(B^*,D(\Sigma'))=0$。那么 $H_1(D(\Gamma),D(\Sigma'))=\sup\{\rho(B^*,D(\Sigma'))|B^*\in D(\Gamma)\}=0<\varepsilon$。

（II）设 $A^*\in D(\Sigma')$，对任意 $B\in D(\Gamma)$，均存在 $\{B_{i_1},\cdots,B_{i_k}\}\subset\Gamma$，使得 $\{B_{i_1},\cdots,B_{i_k}\}\vdash B$，也存在 $\{B_{j_1},\cdots,B_{j_m}\}\subset\Gamma$，使得 $\{B_{j_1},\cdots,B_{j_m},A\}\vdash A^*$。令 $B^*=A^*\vee B_{km}$，这里 $B_{km}=B_{i_1}\wedge\cdots\wedge B_{i_k}\wedge B_{j_1}\wedge\cdots\wedge B_{j_m}$，显然 $B^*\in D(\Gamma)$，且 $\tau((A^*\to B^*)\wedge(B^*\to A^*))=\Sigma\{\varphi(\alpha)|\alpha\in f^{-1}_{(A^*\to B^*)\wedge(B^*\to A^*)}(1)\}=\Sigma\{\varphi(\alpha)|f_{A^*}(\alpha)=f_{B^*}(\alpha)\}$。

当 $f_A(\alpha)=f_B(\alpha)=0$ 时，根据 $\vdash B_{km}\to B$ 有 $f_{B_{km}}(\alpha)=0$，那么 $f_{A^*}(\alpha)=f_{B^*}(\alpha)$；

当 $f_A(\alpha)=f_B(\alpha)=1$ 时，如果 $f_{B_{km}}(\alpha)=0$，那么 $f_{A^*}(\alpha)=f_{B^*}(\alpha)$；如果 $f_{B_{km}}(\alpha)=1$，根据 $\vdash A\wedge B_{km}\to A^*$ 得 $f_{A^*}(\alpha)=1$，根据 $B^*=A^*\vee B_{km}$ 知 $f_{B^*}(\alpha)=1$，此时也有 $f_{A^*}(\alpha)=f_{B^*}(\alpha)$。可见 $\tau((A^*\to B^*)\wedge(B^*\to A^*))\geqslant\tau((A\to B)\wedge(B\to A))$。这等同于 $\rho(A^*,B^*)\leqslant\rho(A,B)$。所以 $\rho(A^*,D(\Gamma))\leqslant\rho(A,D(\Gamma))$，对任意 $A^*\in D(\Sigma')$ 均成立。即 $H_2(D(\Gamma),D(\Sigma'))=\sup\{\rho(A^*,D(\Gamma))|A^*\in D(\Sigma')\}\leqslant\rho(A,D(\Gamma))<\varepsilon$。

综合（I）、（II）可得 $H(D(\Gamma),D(\Sigma'))<\varepsilon$。故有 $\inf\{H(D(\Gamma),D(\Sigma'))|\Sigma\subset F(S),\Sigma\vdash A\}\leqslant H(D(\Gamma),D(\Sigma'))<\varepsilon$

证明完毕。

综上所述，有如下结论成立：

结论 1 带有 3 种不同类型的-误差的结论为同一类公式。

4　结束语

本文通过给出真度的一个等价定义，从而用简练的方法解决了三种近似推理模式的等价性这一公开问题，在此基础上对逻辑度量空间中相容理论的细致划分及拓扑性质都是值得深入研究的课题。

参考文献：

[1] 王国俊，傅丽，宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论[J].中国科学：A 辑，2001，31（11）：998-1008.

[2] Wang G J，Leung Y.Integrated semantics and logic metric spaces[J].Fuzzy Sets and Systems，2003，136（1）：71-91.

[3] 王国俊，李璧镜.Łukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J].中国科学：E 辑，2005，35（6）：561-569.

[4] 王国俊，王伟.逻辑度量空间[J].数学学报，2001，44（1）：159-168.

[5] 王国俊，秦晓燕，周湘南.一类二值谓词逻辑中公式的准真度理论[J].陕西师范大学学报，2005，33（1）：1-6.

[6] 王国俊，宋建社.命题逻辑中的程度化方法[J].电子学报，2006，34（2）：252-257.

[7] Wang G J，Zhang W X.Consistency degrees of finite theories in lukasiewicz propositional fuzzy logic[J].Fuzzy Sets and Systems，2005，149：275-284.

[8] Zhou X N，Wang G J.consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic[J].Fuzzy Sets and Systems，2005，152：321-331.

[9] Zhou H J，Wang G J.A new theory index based on deduction theorems in several logic systems[J].Fuzzy Sets and Systems，2006，157：427-443.

[10] 王国俊.计量逻辑学（I）[J].工程数学学报，2006，23（2）：191-215.

[11] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].2 版.北京：科学出版社，2006.