模糊关系贴近度的一般形式

刘兆君
LIU Zhao-jun

山东工商学院 数学与信息科学学院,山东 烟台 264005
School of Mathematics and Information Science,Shandong Institute of Business and Technology,Yantai,Shandong 264005,China
E-mail:watertrees2003@yahoo.com.cn

LIU Zhao-jun.General forms on degree of closeness about fuzzy relations.Computer Engineering and Applications,2008,44(30):50-53.

Abstract: According to the theory on degree of closeness of fuzzy sets,the general expression law on degree of closeness of fuzzy relations has been studied,more expression forms of degree of closeness of fuzzy relations have been obtained,and the heavy help has been provided to the use of degree of closeness of fuzzy relations,the theory support has been supplied to the using and development of computer.
Key words: fuzzy set;fuzzy relation;degree of closeness;subordinate function

摘　要:根据模糊集贴近度理论,分析模糊关系贴近度表示的规律,得到一系列的模糊关系贴近度的表示形式,为模糊关系贴近度的实际应用提供了极大的方便,为计算机的应用与发展提供理论支撑。
关键词:模糊集;模糊关系;贴近度;隶属函数
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.30.015　**文章编号:**1002-8331(2008)30-0050-04　**文献标识码:**A　**中图分类号:**TP301

1　引言

贴近度理论是模糊数学中的重要理论,在模糊模式识别、模糊人工智能等模糊信息处理中有极其广泛的应用,已有很多文献[1-2]对贴近度的诸多问题进行了探讨。模糊关系作为一种特殊重要的模糊集,模糊关系之间贴近程度的度量在模糊数学及模糊信息处理中将具有重要的理论和实际意义。本文根据模糊集贴近度的理论,研究并得到了模糊关系贴近度表示形式所具有的规律性,运用该规律,笔者得到了在模糊信息处理中可以使用的模糊关系贴近度的具体表示形式。这极大地丰富了模糊集贴近度理论的内容,更有力地促进了模糊关系在模糊信息处理中的应用。

2　主要结论

为了研究方便,先介绍模糊集贴近度及模糊关系的一般常用定义[4]如下。

定义 1　设 $A,B,C\in F(U)$,若映射 $N:F(U)\times F(U)\to[0,1]$满足下列条件(1)$N(A,B)=N(B,A)$;(2)$N(A,A)=1,N(U,\Phi)=0$;(3)$A\subseteq B\subseteq C$,则 $N(A,C)\leqslant N(A,B)\wedge N(B,C)$。则称映射 N 为 $F(U)$上的贴近度,$N(A,B)$称为模糊集 A 与 B 的贴近度。

定义 2　设论域 U 和 V,若 R 是 $U\times V$ 上的一个模糊子集,它的隶属函数为

$$R:U\times V\to[0,1]$$
$$(u,v)\mapsto R(u,v)$$

则 R 称为从 U 到 V 的一个模糊关系。记为 $U\xrightarrow{R}V$ 或 $R\in F(U\times V)$。

显然由于模糊关系也是模糊集,因此上述关于模糊集的贴近度的定义 1 也适合于模糊关系,在此就不再赘述模糊关系的贴近度定义。下面就讨论模糊关系的贴近度的表示问题。

定理 1　设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,$A,B\in F(U\times V)$,其隶属函数为 $A(u_i,v_j)$,$B(u_i,v_j)$,$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$,令映射 $N:F(U\times V)\times F(U\times V)\to[0,1]$为对任意 $A,B\in F(U\times V)$,有

$$N(A,B)=1-g[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(A(u_i,v_j),B(u_i,v_j))]\tag{1}$$

其中映射 $g:[0,a]\to[0,1]$严格单调增加,$g(0)=0$,$g(a)=1$,$a=mn$,映射 $f:[0,1]^2\to[0,1]$满足下列条件(1)$f(x,y)=f(y,x)$;(2)$x=y$,$f(x,y)=0$;(3)$f(1,0)=1$;(4)$x<y$,$f(x,y)$固定 y 对 x 单调减少,固定 x 对 y 单调增加。则 $N(A,B)=1-g[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(A(u_i,v_j),B(u_i,v_j))]$为模糊关系 A,B 的贴近度。

证明　只需验证贴近度定义中的三个条件即可,此处略去。

据定理 1,当 $f(x,y)=|x-y|^p$,$g(x)=(\frac{x}{mn})^{\frac{1}{p}}$ $(p\geqslant1)$,显然 $f(x,y)$,$g(x)$满足定理 1 的条件,则

$$N_p(A,B)=1-[\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|A(u_i,v_j)-B(u_i,v_j)|^p]^{\frac{1}{p}}\tag{2}$$

是模糊关系 A,B 的贴近度,称为 Minkowski 贴近度。特别地,当 $p=1$ 时

作者简介:刘兆君(1965-),副教授,主要研究方向:不确定系统。
收稿日期:2007-11-27　**修回日期:**2008-02-18

$$N_1(A,B)=1-\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|A(u_i,v_j)-B(u_i,v_j)| \tag{3}$$

称为 Haming 贴近度；当 $p=2$ 时

$$N_2(A,B)=1-\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|A(u_i,v_j)-B(u_i,v_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

称为 Euclid 贴近度。

当 U,V 都是实数域上的有限区间且 $D=U\times V$ 为有界闭区域时，记有界闭区域 D 的面积为 S_D，与定理 1 相应有下列定理 2。

定理 2 设 $A,B\in F(D)$，其隶属函数 $A(u,v),B(u,v)$ 为连续函数，令映射 $N:F(D)\times F(D)\to[0,1]$ 为对任意 $A,B\in F(D)$，有

$$N(A,B)=1-g\left[\iint_D f(A(u,v),B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right] \tag{5}$$

其中映射 $g:[0,a]\to[0,1]$ 严格单调增加，$g(0)=0,g(a)=1,a=S_D$，连续映射 $f:[0,1]^2\to[0,1]$，满足下列条件：(1) $f(x,y)=f(y,x)$；(2) $x=y,f(x,y)=0$；(3) $f(1,0)=1$；(4) $x<y,f(x,y)$ 固定 y 对 x 单调减少，固定 x 对 y 单调增加。则 $N(A,B)=1-g\left[\iint_D f(A(u,v),B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]$ 为模糊关系 A,B 的贴近度。

证明 验证贴近度定义中的 3 个条件。

(1) 由于 $f(x,y)=f(y,x)$，显然 $N(A,B)=N(B,A)$；

(2) 由于 $x=y,f(x,y)=0$，显然 $N(A,A)=1$；又 $f(1,0)=1$，则 $N(U,\Phi)=0$；

(3) 若 $A\subseteq B\subseteq C$ 即 $A(u,v)\leqslant B(u,v)\leqslant C(u,v)$，$\forall(u,v)\in D$，由于 $x<y,f(x,y)$ 固定 x 对 y 单调增加，所以

$$f(A(u,v),C(u,v))\geqslant f(A(u,v),B(u,v))$$

那么

$$\iint_D f(A(u,v),C(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\geqslant\iint_D f(A(u,v),C(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则 $g\left[\iint_D f(A(u,v),C(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]\geqslant g\left[\iint_D f(A(u,v),B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]$

因此 $1-g\left[\iint_D f(A(u,v),C(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]\leqslant 1-g\left[\iint_D f(A(u,v),B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]$

则 $N(A,C)\leqslant N(A,B)$，同理可证 $N(A,C)\leqslant N(B,C)$，故 $N(A,C)\leqslant N(A,B)\wedge N(B,C)$，故 $N(A,B)=1-g\left[\iint_D f(A(u,v),B(u,v))\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]$ 为模糊关系 A,B 的贴近度。

据定理 2，当 $f(x,y)=|x-y|^p$，$g(x)=\left(\frac{x}{S_D}\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p\geqslant 1)$ 时，显然 $f(x,y),g(x)$ 满足定理 2 的条件，则

$$N_p(A,B)=1-\left[\frac{1}{S_D}\iint_D|A(u,v)-B(u,v)|^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right]^{\frac{1}{p}}\ (p\geqslant 1) \tag{6}$$

是模糊关系 A,B 的贴近度。称为 Minkowski 贴近度。特别地，当 $p=1$ 时

$$N_1(A,B)=1-\frac{1}{S_D}\iint_D|A(u,v)-B(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{7}$$

称为 Haming 贴近度；当 $p=2$ 时

$$N_2(A,B)=1-\left(\frac{1}{S_D}\iint_D|A(u,v)-B(u,v)|^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

称为 Euclid 贴近度。

模糊关系的贴近度除了上述的一般形式外，还有一些常用的一般表示形式。

定理 3 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\},V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},A,B\in F(U\times V)$，其隶属函数为 $A(u_i,v_j),B(u_i,v_j),i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$，令映射 $N:F(U\times V)\times F(U\times V)\to[0,1]$ 为对任意 $A,B\in F(U\times V)$，有

$$N(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]} \tag{9}$$

其中映射 $f:[0,1]^2\to[0,+\infty)$，$g:[0,1]^2\to[0,+\infty)$ 满足下列条件

(1) $f(x,y)=f(y,x),g(x,y)=g(y,x),f(x,y)\leqslant g(x,y)$；

(2) $x=y,f(x,y)=g(x,y)$；

(3) $x<y,f(x,y)=h(x),h:[0,1]\to[0,1]$ 严格增加，$h(0)=0,h(1)=1$；$g(x,y)=s(y),s:[0,1]\to[0,1]$ 严格增加，$s(0)=0,s(1)=1$。

则映射 $N(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}$ 为模糊关 A,B 的贴近度。其中 A,B 不同时为 Φ。

证明 验证贴近度定义中的 3 个条件即可，略去。

据定理 3，当 $f(x,y)=(x\wedge y)^p,g(x,y)=(x\vee y)^p(p>0)$ 可验证 $f(x,y),g(x,y)$ 满足定理 3 的条件，那么

$$N_p(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A(u_i,v_j)\wedge B(u_i,v_j)]^p}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A(u_i,v_j)\vee B(u_i,v_j)]^p} \tag{10}$$

就是模糊关系 A,B 的贴近度。特别地，当 $p=1$

$$N_1(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A(u_i,v_j)\wedge B(u_i,v_j)]}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A(u_i,v_j)\vee B(u_i,v_j)]} \tag{11}$$

即为通常所使用的离散型最小–最大贴近度。

当 U,V 都是实数域上的有限区间且 $D=U\times V$ 为有界闭区域时，与定理 3 相应有下面的定理 4。

定理 4 设 $A,B\in F(D)$，其隶属函数为 $A(u,v),B(u,v)$ 皆连续函数，令映射 $N:F(D)\times F(D)\to[0,1]$ 为对任意 $A,B\in F(D)$，有

$$N(A,B)=\frac{\iint_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \tag{12}$$

其中映射 $f:[0,1]^2\to[0,+\infty)$，$g:[0,1]^2\to[0,+\infty)$ 皆连续函数，满足下列条件

(1) $f(x,y)=f(y,x),g(x,y)=g(y,x),f(x,y)\leqslant g(x,y)$；

(2) $x=y,f(x,y)=g(x,y)$；

(3) $x<y,f(x,y)=h(x),h:[0,1]\to[0,1]$ 严格增加连续，$h(0)=0,h(1)=1$；$g(x,y)=s(y),s:[0,1]\to[0,1]$ 严格增加连续，$s(0)=0,s(1)=1$。

则映射 $N(A,B)=\dfrac{\iint\limits_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$ 为模糊关系 A，B 的贴近度。其中 A，B 不同时为 Φ。

证明 验证贴近度定义中的 3 个条件即可(略去)。

据定理 4，当 $f(x,y)=(x\wedge y)^p$，$g(x,y)=(x\vee y)^p(p>0)$可以验证 $f(x,y)$，$g(x,y)$满足定理 4 的条件，那么

$$N_p(A,B)=\frac{\iint\limits_D [A(u,v)\wedge B(u,v)]^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D [A(u,v)\vee B(u,v)]^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \tag{13}$$

就是模糊关系 A，B 的贴近度。特别地，当 $p=1$

$$N_1(A,B)=\frac{\iint\limits_D [A(u,v)\wedge B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D [A(u,v)\vee B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \tag{14}$$

即为通常所使用的连续型最小–最大贴近度。

模糊关系的贴近度还有另外两种一般表示形式。

定理 5 设 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$A,B\in F(U\times V)$，其隶属函数为 $A(u_i,v_j)$，$B(u_i,v_j)$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，令映射 $N:F(U\times V)\times F(U\times V)\to[0,1]$为对任意 $A,B\in F(U\times V)$，有

$$N(A,B)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}f[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}g[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]} \tag{15}$$

其中映射 $f:[0,1]^2\to[0,+\infty)$，$g:[0,1]^2\to[0,+\infty)$满足下列条件

(1)$f(x,y)=f(y,x)$，$g(x,y)=g(y,x)$，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$；

(2)$x=y$，$f(x,y)=g(x,y)$；

(3)$x<y$，$f(x,y)=h(x)$，$h:[0,1]\to[0,1]$严格增加，$h(0)=0$，$h(1)=1$；而 $g(x,y)=\dfrac{1}{2}h(x)+\dfrac{1}{2}h(y)$。

则映射 $N(A,B)=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}f[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}g[A(u_i,v_j),B(u_i,v_j)]}$ 为模糊关系 A，B 的贴近度。其中 A，B 不同时为 Φ。

证明 验证贴近度定义中的 3 个条件即可，略去。

据定理 5，当 $f(x,y)=(x\wedge y)^p$，$g(x,y)=\dfrac{1}{2}x^p+\dfrac{1}{2}y^p(p>0)$时，可以验证 $f(x,y)$，$g(x,y)$满足定理 5 的条件，那么

$$N_p(A,B)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}f[A(u_i,v_j)\wedge B(u_i,v_j)]^p}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}(A(u_i,v_j))^p+\frac{1}{2}(B(u_i,v_j))^p]} \tag{16}$$

就是模糊关系 A，B 的贴近度。特别地，当 $p=1$

$$N_1(A,B)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}[A(u_i,v_j)\wedge B(u_i,v_j)]}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}A(u_i,v_j)+\frac{1}{2}B(u_i,v_j)]} \tag{17}$$

即为通常使用的离散型最小–平均贴近度。

当 U，V 都是实数域上的有限区间且 $D=U\times V$ 为有界闭区域时，与定理 5 相应有下面的定理 6。

定理 6 设 $A,B\in F(D)$，其隶属函数为 $A(u,v)$，$B(u,v)$皆连续函数，令映射 $N:F(D)\times F(D)\to[0,1]$为对任意 $A,B\in F(D)$，有

$$N(A,B)=\frac{\iint\limits_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v} \tag{18}$$

其中映射 $f:[0,1]^2\to[0,+\infty)$，$g:[0,1]^2\to[0,+\infty)$ 皆连续函数，满足下列条件

(1)$f(x,y)=f(y,x)$，$g(x,y)=g(y,x)$，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$；

(2)$x=y$，$f(x,y)=g(x,y)$；

(3)$x<y$，$f(x,y)=h(x)$，$h:[0,1]\to[0,1]$严格增加连续，$h(0)=0$，$h(1)=1$；而 $g(x,y)=\dfrac{1}{2}h(x)+\dfrac{1}{2}h(y)$。

则映射 $N(A,B)=\dfrac{\iint\limits_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$ 为模糊关系 A，B 的贴近度。其中 A，B 不同时为 Φ。

证明 验证贴近度定义中的 3 个条件即可。

(1)由于 $f(x,y)=f(y,x)$，$g(x,y)=g(y,x)$则显然有 $N(A,B)=N(B,A)$。

(2)由于 $x=y$，$f(x,y)=g(x,y)$，则 $N(A,A)=1$。又由条件(3)得 $f(0,1)=0$，$g(0,1)\neq0$，所以 $N(U,\Phi)=0$。

(3)若 $A\subseteq B\subseteq C$ 即 $A(u,v)\leqslant B(u,v)\leqslant C(u,v)$，$\forall(u,v)\in D$。

因为 $x<y$，$f(x,y)=h(x)$，$h:[0,1]\to[0,1]$严格增加连续，$h(0)=0$，$h(1)=1$；$g(x,y)=\dfrac{1}{2}h(x)+\dfrac{1}{2}h(y)$。所以

$$N(A,C)=\frac{\iint\limits_D f[A(u,v),C(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),C(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=\frac{\iint\limits_D h[A(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D \{\frac{1}{2}h[A(u,v)]+\frac{1}{2}h[C(u,v)]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

$$N(B,C)=\frac{\iint\limits_D f[B(u,v),C(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[B(u,v),C(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=\frac{\iint\limits_D h[B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D \{\frac{1}{2}h[B(u,v)]+\frac{1}{2}h[C(u,v)]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

$$N(A,B)=\frac{\iint\limits_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=$$

$$\frac{\iint\limits_D h[A(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D\{\frac{1}{2}h[A(u,v)]+\frac{1}{2}h[B(u,v)]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$

由于 $h[B(u,v)]\leqslant h[C(u,v)]$，$(u,v)\in D$ 则 $N(A,C)\leqslant N(A,B)$，又因为

$$\frac{\iint\limits_D h[A(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D\{\frac{1}{2}h[A(u,v)]+\frac{1}{2}h[C(u,v)]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}-$$

$$\frac{\iint\limits_D h[B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D\{\frac{1}{2}h[B(u,v)]+\frac{1}{2}h[C(u,v)]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\iint\limits_D h[C(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\{\iint\limits_D h[A(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\iint\limits_D h[B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\}}{\iint\limits_D\frac{h[A(u,v)]+h[C(u,v)]}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\iint\limits_D\frac{h[B(u,v)]+h[C(u,v)]}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\leqslant 0$$

所以 $N(A,C)\leqslant N(B,C)$，那么 $N(A,C)\leqslant N(A,B)\wedge N(B,C)$，故

$$N(A,B)=\frac{\iint\limits_D f[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D g[A(u,v),B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$$为模糊关系 A，B 的贴近度。

据定理 6，当 $f(x,y)=(x\wedge y)^p$，$g(x,y)=\frac{1}{2}x^p+\frac{1}{2}y^p(p>0)$，可以验证 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 满足定理 6 的条件，那么

$$N_p(A,B)=\frac{\iint\limits_D[A(u,v)\wedge B(u,v)]^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\iint\limits_D[\frac{1}{2}(A(u,v))^p+\frac{1}{2}(B(u,v))^p]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\qquad(19)$$

就是模糊关系 A，B 的贴近度。特别地，当 $p=1$

$$N_1(A,B)=\frac{\iint\limits_D[A(u,v)\wedge B(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\frac{1}{2}\iint\limits_D A(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\iint\limits_D B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\qquad(20)$$

即为通常使用的连续型最小–平均贴近度。

特别声明的是，为了模糊关系贴近度理论和应用的需要，定理 3、4、5、6 中，当 $A=B=\Phi$ 时，若出现 $N(\Phi,\Phi)=Q\left(\frac{0}{0}\right)$，规定 $N(\Phi,\Phi)=Q\left(\frac{0}{0}\right)=Q(1)=1$。

3 结束语

在上述讨论中，反映了常见的多种模糊关系贴近度的一般表示规律，并利用此规律推广了常用的模糊关系贴近度的表达式，从而使模糊关系贴近度的计算更具灵活性，为模糊关系贴近度理论在模糊信息处理中的广泛应用做出了贡献。

参考文献：

[1] 陈抗，蔡经球.Fuzzy 性度量与贴近度[J].厦门大学学报，1983，22(3)：281–292.

[2] 魏勇.单侧贴近度，双侧贴近度及其与普通贴近度的转换[J].模糊系统与数学，1996，10(3)：49–56.

[3] 王翠香.模糊集合的模糊度的一种表示形式[J].数学的实践与认识，2006，2：267–269.

[4] 杨纶标.模糊数学原理及应用[M].广州：华南理工大学出版社，2001.

[5] 刘普寅.模糊理论及其应用[M].长沙：国防科技大学出版社，2000.

（上接 25 页）

表 1　测试数据

T_s	T_b	p_s^{min}	p_s^{max}	p_b^{min}	p_b^{max}	${}^{bs}b(t)$	${}^{sb}b(t)$	${}^{bs}p(t)$	${}^{sb}p(t)$
20	22	15	50	10	18	$1-\frac{t}{T_b}$	$1-\frac{t}{T_s}$	$\frac{1}{p_b^{max}-p_b^{min}}$	$\frac{1}{p_s^{max}-p_s^{min}}$

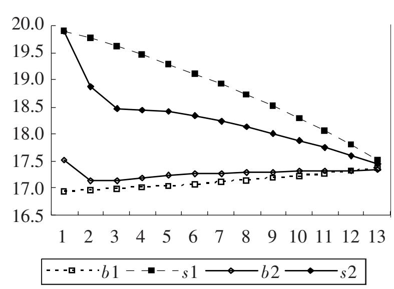

图 1　实验结果

4 总结

本文对现有的基于增强学习的协商策略进行优化，在协商过程中，充分利用已获得的对手协商历史信息，对对手协商历史进行学习，综合历史学习策略和增强学习策略进行协商。实验结果证明加入了历史学习策略的增强学习策略能够更快的达到协商解。

参考文献：

[1] Jennings N R，Faratin P，Lomuscio A R，et al.Automated negotiation：prospects，methods and challenges[J].International Journal of Group Decision and Negotiation，2001，10(2)：199–215.

[2] Minghua H，Jennincs N R，Ho–Fung L.On agent–mediated electronic commerce[J].IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering，2003，15(4)：985–1003.

[3] Stone P，Veloso M.Multiagent systems：a survey from a machine learning perspective[J].Autonomous Robots，2000，3(8)：345–383.

[4] 张化祥，黄上腾.基于增强学习的代理协商模型[J].计算机工程，2004，30(10)：137–139.

[5] 张少魁，王黎明.协商 Agent 的历史学习算法研究[J].计算机工程与应用，2005，41(12)：44–46.