结合梯度法的混合微粒群优化算法

黄冀卓[1],王　湛[2]
HUANG Ji-zhuo[1],WANG Zhan[2]

1.汕头大学 土木工程系,广东 汕头 515063
2.华南理工大学 土木工程系,广州 510641
1.Shantou University,Shantou,Guangdong 515063,China
2.South China University of Technology,Guangzhou 510641,China
E-mail:jzhuang_fj@sohu.com

HUANG Ji-zhuo,WANG Zhan.Hybrid particle swarm optimization algorithm based on gradient method.Computer Engineering and Applications,2008,44(35):40-42.

Abstract: By introducing the gradient method into the particle swarm optimization algorithm (PSO),a new hybrid particle swarm optimization algorithm named GPSO is proposed.In GPSO,the gradient method is applied to each particle to search further for a better position after each evolution of PSO,and then the particle swarm replaced by the better takes part in the evolution of the next generation.The presented hybrid method incorporates the advantages of the excellent global searching of the PSO and the local speedy convergence of the gradient method.Several numerical examples are used to demonstrate the high optimization efficiency and the robustness of the given method for either low-dimensional multimodal functions or high-dimensional multimodal or pathological functions.

Key words: Particle Swarm Optimization(PSO);gradient method;optimization efficiency;robustness

摘　要:在微粒群优化算法 PSO 中引入梯度算法,提出了一种新型的混合微粒群优化算法——GPSO。该混合优化算法是对 PSO 每一次进化后的所有微粒进一步执行梯度法寻优操作,并以寻找到的更优个体替代当前个体参与群体的下一代进化。GPSO 既利用了 PSO 出色的全局搜索能力,又借助梯度法的快速局部寻优能力,很好地将两者的优势结合在一起。数值实验表明:无论是对于低维的多峰函数,还是高维的多峰和单峰病态函数,GPSO 都表现出很强的优化效率、适用性和鲁棒性。

关键词:微粒群优化算法;梯度法;优化效率;鲁棒性
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.35.012　**文章编号**:1002-8331(2008)35-0040-03　**文献标识码**:A　**中图分类号**:TP18;O221

1　前言

微粒群优化算法(Particle Swarm Optimization,PSO)是继蚁群优化算法提出后的又一种新的群体进化算法,该算法是由美国社会心理学博士 James Kennedy 和电子工程学博士 Russell Eberhart[1]于 1995 年提出。由于微粒群优化算法具有概念简单、容易实现等突出优点,因此一经提出就引起了国内外众多学者的兴趣和关注,并在短短的 10 来年间得到了很大的发展和应用。但是,由于微粒群优化算法仍然是属于启发式的随机进化搜索算法,因此该算法容易陷入局部最优解,而且鲁棒性较差。为了改善微粒群优化算法的上述两个缺点,国内外的众多学者分别提出了许多改进的微粒群优化算法[2-11]。目前对算法的改进大多集中在以下几个方面:(1)PSO 的参数选择(修改)策略;(2)多粒子群的协同进化;(3)与其它智能算法的结合。虽然这些改进的微粒群优化算法在全局最优性方面有一定的改进,但是算法的随机性依然没有改变,所以算法的优化效率和鲁棒性不是太理想。

为了提高微粒群优化算法的全局最优性和鲁棒性,在微粒群优化算法的基础上引入梯度算法,提出了一个结合梯度法的混合微粒群优化算法(GPSO),数值实验证明 GPSO 具有良好的全局寻优能力和鲁棒性。

2　基本微粒群优化算法

设在 D 维空间中,有 m 个粒子组成一个群体。其中第 i 个粒子的位置 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iD})$,$i=1,2,\cdots,m$;速度 $v_i=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{iD})$;微粒所经历过的最好位置 $p_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{iD})$;整个粒子群所经历过的最好位置为 $p_g=(p_{g1},p_{g2},\cdots,p_{gD})$。粒子状态更新策略(或进化方程)为:

$$v_i(t+1)=wv_i(t)+c_1r_1\times(p_i-x_i(t))+c_2r_2\times(p_g-x_i(t)) \quad (1)$$

$$x_i(t+1)=x_i(t)+v_i(t+1) \quad (2)$$

基金项目:广东省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Guangdong Province of China under Grant No.06027195)。
作者简介:黄冀卓(1978-),男,博士,讲师,主要从事结构优化理论和优化设计的研究;王湛(1958-),男,博士后,教授,主要从事钢结构、组合结构和结构优化等研究。
收稿日期:2008-07-03　**修回日期**:2008-08-04

其中,w 为惯性权重,c_1、c_2 为加速度常数,r_1、$r_2\in[0,1]$ 均匀分布的随机数。

3　梯度法

梯度法基本思想是使函数沿它下降速度最快的方向(即负梯度方向,$-\nabla f(x)$)前进,逐步走向最优点,故又称最速下降法。梯度法属于解析法,因此可以较快地寻找到问题的最优解,但它只适用于单峰函数,对于多峰函数,则容易陷入局部最小值。

梯度法的计算步骤如下:

(1)确定初始点 $x^{(0)}$,及精度要求 ε。

(2)计算目标函数的梯度 $\nabla f(x)$。

(3)若 $\|\nabla f(x)\|\leqslant\varepsilon$,则 x 就是最优点或局部最优点,终止迭代。否则进行下一步。

(4)按式(3)求下一迭代点:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\lambda^{(k)}\nabla f(x^{(k)}) \tag{3}$$

其中,步长 $\lambda^{(k)}$ 由沿 $-\nabla f(x^{(k)})$ 方向作一维搜索来确定,即选择 $\lambda^{(k)}$,使得:

$$f(x^{(k)}-\lambda^{(k)}\nabla f(x^{(k)}))=\min_{\lambda>0} f(x^{(k)}-\lambda\nabla f(x^{(k)})) \tag{4}$$

(5)重复步骤(2)~步骤(4)。

4　混合微粒群优化算法(GPSO)

通过式(1)和式(2)可知,微粒群优化算法中各微粒的当前运动方向和运动速度直接受到微粒自身和群体的历史最优位置的影响,因此微粒很容易因个体和群体历史最优位置的误导而错过全局最优点,最终导致算法早熟。

考察图 1 所示的一维函数 $f(x)$,其最优点(即最小值)共有 3 个,其中 1 为全局最优点,2 和 3 分别是局部最优点。如果采用微粒群优化算法进行函数 $f(x)$ 最优解的搜索,其可能的寻优路径如图 1 所示(即 a–b–c–d–2),算法最终收敛于局部最优解 2。事实上,从图 1 可以看到,微粒群优化算法在搜索到 a 点的时候就错过了局部最优点 3,而在搜索到 b 点和 c 点的时候又漏过了全局最优点 1,最终算法只能收敛于局部最优点 2。显然,如果微粒群优化算法中的每一个微粒都能可靠地找到微粒自身所处的局部环境中的局部最优解,则算法的全局收敛性将会得到极大的保证。

由于梯度法是一种比较可靠的局部快速寻优算法,因此在微粒群优化算法的基础上,可对每一个微粒分别实施梯度法,以加强算法的局部搜索能力,进而提高算法的全局寻优能力。图 2 给出了结合梯度法的混合微粒群优化算法对函数 $f(x)$ 的可能寻优过程(寻优路径为 a–3–b–1)。从图 2 可知,当微粒群优化算法搜索到 a 点时,可由梯度法进一步找到局部最优点 3,然后再由微粒群优化算法搜索到 b 点,最后再结合梯度法则可快速找到全局最优解 1。

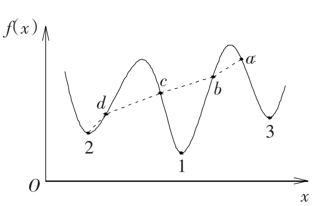

图 1　微粒群优化算法搜索路径

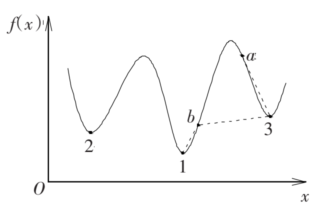

图 2　混合微粒群优化算法搜索路径

基于上述的思路,给出如下的结合梯度法的混合微粒群优化算法(GPSO)求解步骤:

(1)设置微粒群算法的初始参数,并随机生成初始群体。

(2)计算每个微粒的适应度值。

(3)确定各微粒的历史最优位置和群体的历史最优位置。

(4)按照式(1)和式(2)对所有微粒执行进化操作。

(5)对进化后的所有微粒进一步执行梯度法搜索,寻找更优个体。

(6)更新各微粒的历史最优位置和群体的历史最优位置。

(7)重复步骤(4)~步骤(6),直到算法满足终止条件。

需要说明的是,对于一些函数形式比较复杂、导数信息不易求得的优化模型,可按式(5)近似计算函数的梯度,数值实验结果证明效果良好。

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\approx\frac{f(x_{i1},\cdots,x_{ij}+\Delta x_{ij},\cdots,x_{iD})-f(x_{i1},\cdots,x_{ij},\cdots,x_{iD})}{\Delta x_{ij}} \tag{5}$$

其中,x_{ij} 为第 i 个微粒的第 j 维变量,$j=1,2,\cdots,D$;Δx_{ij} 为一足够小的正增量。

混合微粒群优化算法流程图如图 3 所示。

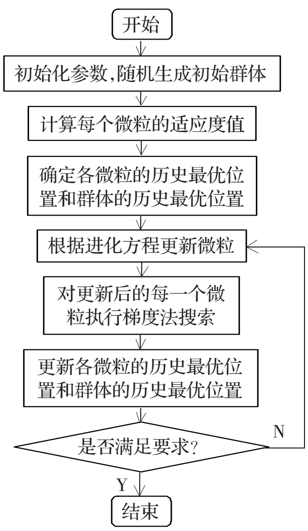

图 3　混合微粒群优化算法流程图

5　数值实验和结果分析

5.1　测试函数

选取了如下 4 个经典函数对 GPSO 算法的寻优性能进行测试。

(1)LevyNo.5 函数

$$\min f_1(x_1,x_2)=\left\{\sum_{i=1}^{5} i\cos[(i-1)x_1+i]\right\}\left\{\sum_{j=1}^{5} j\cos[(j+1)x_2+j]\right\}+(x_1+1.425\ 13)^2+(x_2+0.800\ 32)^2$$

自变量取值范围:$-10\leqslant x_1,x_2\leqslant 10$。此函数有 760 个局部极小点,其中只有($-1.306\ 853$,$-1.424\ 845$)为全局最优点,最小值为 $-176.137\ 578$。

(2)Schaffer's F_6 函数

$$\min f_2(x_1,x_2)=\frac{\sin^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-0.5}{[1+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2}-0.5$$

自变量取值范围为:$-100\leqslant x_1,x_2\leqslant 100$。此函数有无数个局部极小点,其中只有一个(0,0)为全局最小,最小值为 -1。此

函数的最小值峰周围有一圈脊，它们的取值均为-0.990 283，因此很容易停滞在此局部极小带上。由于该函数的强烈震荡性质以及它的全局最优点被局部最优点所包围的特性使得一般算法很难找到它的全局最优解。

（3）Rastrigin 函数

$$\min f_3(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10)$$

自变量取值范围为：$-5.12\leqslant x_i\leqslant 5.12$。此函数大约有 $10n$ 个局部极小点，在 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 时达到全局极小点 0。

（4）Rosenbrock 函数

$$\min f_4(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(100(x_{i+1}-x_i^2)^2+(x_i-1)^2)$$

自变量取值范围为：$-100\leqslant x_i\leqslant 100$。Rosenbrock 函数是一个单峰病态函数，在（1，1，…，1）处取到全局最小值 0。它的全局最优点位于一个平滑、狭长的抛物线形山谷内，很难极小化。

5.2 实验结果和分析

为了更好地说明算法的性能，使用非对称的初始化方法。所用测试函数的搜索空间和初始化范围如表 1 所示。

表 1 测试函数的搜索空间和初始化范围

函数	搜索空间	初始化范围
f_1	$-10\leqslant x_i\leqslant 10$	$-8\leqslant x_i\leqslant 10$
f_2	$-100\leqslant x_i\leqslant 100$	$-80\leqslant x_i\leqslant 100$
f_3	$-5.12\leqslant x_i\leqslant 5.12$	$-5.12\leqslant x_i\leqslant 4.12$
f_4	$-100\leqslant x_i\leqslant 100$	$-70\leqslant x_i\leqslant 60$

数值实验中，算法参数的选取如下：$w=0.0$，$c_1=1.0$，$c_2=1.5$，最大进化代数为 2 000。4 个函数各进行 50 次仿真实验，对各种情况的收敛率和平均收敛代数进行统计，并与其它文献中已给出的数值实验结果进行比较，所得结果列于表 2。

表 2 测试函数实验结果和比较

函数	群体规模	变量维数	算法	精度	平均收敛率	平均收敛代数
f_1	20	2	GPSO	10^{-5}	50/50	41.10
	20	2	改进 PSO[4]	10^{-4}	97/100	99.57
f_2	20	2	GPSO	10^{-4}	50/50	5.78
	20	2	SPSO2[2]	10^{-1}	48/50	72.96
	20	2	DAMPSO[5]	10^{-2}	48/50	43.00
f_3	30	20	GPSO	10^{-5}	50/50	19.34
	30	20	DB-SPSO[3]	10^{-2}	6/50	1 065.51
	30	10	GPSO	10^{-5}	50/50	19.28
	30	10	SM-SPSO[6]	10^{-2}	22/50	1 931.95
f_4	10	10	GPSO	10^{-5}	50/50	2.00
	30	10	RIW-PSO[8]	5.0	–	1 185.00
	20	2	DAMPSO[5]	10^{-5}	50/50	99.00

从表 2 可知，不论是对低维的多峰测试函数（f_1 和 f_2），还是高维的多峰和单峰病态测试函数（f_3 和 f_4），GPSO 均体现出了很高的收敛精度、收敛率和收敛速度。这就说明：结合梯度法的混合微粒群优化算法（GPSO）具有很强的优化效率和适用性。

值得注意的是，对于 Rosenbrock 单峰函数（f_4），采用一般的微粒群优化算法往往很难找到全局最优点，但是对于 GPSO 算法，由于其内引入了梯度算法，而梯度算法又是一种很有效的局部搜索算法，因此在本次实验中，采用 GPSO 算法只需迭代一次就能快速寻找到全局最优解。这也说明了将全局随机优化算法和可靠、快速的局部优化算法相结合的合理性。

在通常的微粒群优化算法中，惯性权重和加速度常数的大小往往会对算法的优化性能产生较大的影响。为了探讨不同参数的设置对本文 GPSO 算法的影响，以 Schaffer's F_6 函数（f_2）和 Rastrigin 函数（f_3）为例进行分析。对于每一组不同的给定参数，算法都各自运行 50 次，对各种情况的收敛率和平均收敛代数进行统计，表 3 给出了相应的优化结果。

表 3 惯性权重和加速度常数对优化结果的影响

函数	群体规模	变量维数	精度	惯性权重 w	加速度常数 c_1	加速度常数 c_2	平均收敛率	平均收敛代数
f_2	20	2	10^{-4}	0.0	1.0	1.5	50/50	5.78
				0.0	3.0	4.0	50/50	5.58
				0.0	6.0	5.0	50/50	4.96
				0.5	1.0	1.5	50/50	5.32
				0.5	3.0	4.0	50/50	5.44
				0.5	6.0	5.0	50/50	5.30
				0.9	1.0	1.5	50/50	5.70
				0.9	3.0	4.0	50/50	5.80
				0.9	6.0	5.0	50/50	5.24
f_3	30	20	10^{-5}	0.0	1.0	1.5	50/50	19.34
				0.0	3.0	4.0	50/50	27.52
				0.0	6.0	5.0	50/50	24.76
				0.5	1.0	1.5	50/50	16.92
				0.5	3.0	4.0	50/50	21.22
				0.5	6.0	5.0	50/50	17.20
				0.9	1.0	1.5	50/50	21.68
				0.9	3.0	4.0	50/50	20.36
				0.9	6.0	5.0	50/50	18.36

从表 3 可以看出，无论是 Schaffer's F_6 函数（f_2）还是 Rastrigin 函数（f_3），惯性权重和加速度常数的大小对算法的收敛率和收敛速度影响都不大，算法的收敛率和收敛速度始终保持在一个比较稳定的状态，这说明了给出的 GPSO 算法具有较好的鲁棒性。

6 结论

提出了一种新型的微粒群优化算法——结合梯度法的混合微粒群优化算法（GPSO）。该算法将微粒群算法的强大全局搜索能力和梯度法的可靠、快速局部寻优能力很好地结合在一起，这使得算法具有很好的优化性能。由数值实验结果表明，GPSO 算法既适用于低维的多峰函数，也适用于高维的多峰和单峰病态函数，具有很强的优化效率和适用性。此外，GPSO 算法还表现出很好的鲁棒性。

参考文献：

[1] Eberhart R C，Kennedy J.A new optimizer using particle swarm theory[C]//Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science.Nagoya：IEEE Piscataway，1995：39-43.
[2] 曾建潮，崔志华.一种保证全局收敛的 PSO 算法[J].计算机研究与发展，2004，41（8）：1333-1338.
[3] 夏桂梅，曾建潮.双群体随机微粒群算法[J].计算机工程与应用，2006，42（24）：46-48.
[4] 冯春丽，唐毅谦，赵悦.一种改进的微粒群优化算法[J].南京航空航天大学学报（增刊），2006，38：58-61.
[5] 崔志华，曾建潮.一种动态调整的改进微粒群算法[J].系统工程学报，2005，20（6）：657-660.

（下转 58 页）