基于蕴涵算子族 L-λ-R_0 的 FMT 三 I 约束算法

阚　婷,张兴芳,王作真
KAN Ting,ZHANG Xing-fang,WANG Zuo-zhen

聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059
School of Mathematics Science,Liaocheng University,Liaocheng,Shandong 252059,China
E-mail:kanting0202@163.com

KAN Ting,ZHANG Xing-fang,WANG Zuo-zhen.Triple I constraint method with respect to FMT model under ramily of implication operator L-λ-R_0.Computer Engineering and Applications,2008,44(25):58-59.

Abstract: The thought of fuzzy reasoning under family of implication operator L-λ-R_0 are introduced,which can contribute to raise the credibility of reasoning result.Triple I constraint method and -triple I constraint method with respect to FMT models has been given.The general formulae of triple I and α-triple I Constraint method with respect to FMT models are discussed.
Key words: fuzzy reasoning;family of implication operator L-λ-R_0;triple I constraint method;α-triple I constraint method

摘　要:提出了基于蕴涵算子族 L-λ-R_0 的模糊推理的思想,这将有助于提高推理结果的可靠性。针对蕴涵算子族 L-λ-R_0 给出了 FMT 模型的三 I 约束算法、α-三 I 约束算法。给出了 FMT 模型的三 I 约束算法、α-三 I 约束算法计算公式。
关键词:模糊推理;蕴涵算子族 L-λ-R_0;三 I 约束算法;α-三 I 约束算法
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.25.018　**文章编号:**1002-8331(2008)25-0058-02　**文献标识码:**A　**中图分类号:**O231

众所周知,模糊推理的核心问题是以下形式 FMP(Fuzzy Modus Ponens)和 FMT(Fuzzy Modus Tollens):

	FMP	FMT
规则	$A\to B$	$A\to B$
输入	A^*	B^*
输出	B^*	A^*

这里 A、A^* 是论域 X 上的模糊集,B、B^* 是论域 Y 上的模糊集。对于上述两类问题,美国控制论专家及模糊集理论的创始人 Zadeh[1]于 1973 年首先提出了模糊分离规则(简称 FMP 规则)并给出了著名的求解 FMP 模型和 FMT 模型的 CRI 算法,并在应用上取得令人瞩目的成就。但这一方法一般不具有还原性,为了克服 CRI 方法的缺陷,王国俊[2]首先提出了支持度理论,并在[3]中提出了完全建立在模糊蕴涵运算基础上的三 I 算法,它有效地改进了 CRI 算法,并将其纳入到模糊逻辑的框架之下。

在模糊推理中,推理的结果与选取的蕴涵算子密切相关。运用不同的蕴涵算子进行推理,结果一般不相等。本文的目的是在作者上一篇文章讨论了基于蕴涵算子族 L-λ-R_0 上 FMT 模型的三 I 支持算法与 α-三 I 支持算法的理论的基础上,来继续研究基于蕴涵算子族 L-λ-R_0 上 FMT 模型的三 I 约束算法与 α-三 I 约束算法的理论。

1　FMT 模型的全蕴涵三 I 约束算法

蕴涵算子族 L-λ-R_0 的模糊蕴涵算子 $R(x,y)=x\to_\lambda y$ 定义如下:

$$x\to y=\begin{cases}1,x\leqslant y\\ 1-x+(2\lambda-1)y,y+x<1\text{ 且 }x>y,(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\\ (1-2\lambda)x+y+2\lambda-1,y+x\geqslant 1\text{ 且 }x>y\end{cases}$$

特别地,$\lambda=1,\frac{1}{2}$时分别对应 R_{Lu} 及 R_0 算子,因此称它为 $R_{L-\lambda-R_0}$算子,又称这些算子的全体为带参数的模糊蕴涵算子族 L-λ-R_0,$\lambda\in[\frac{1}{2},1]$。

首先,给出 FMT 模型的模糊推理全蕴涵三 I 约束原则:

三 I 约束 FMT 原则:设 X,Y 为非空集,$F(X),F(Y)$分别表示 X,Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)\in F(X)$,$B(y),B^*(y)\in F(Y)$,寻求最小的模糊集 $A^*(x)\in F(Y)$,使得

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\tag{1}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 具有最小的可能值。

注 1:$A^*(x)\equiv 1$ 时,式(1)最小

$$(A(x)\to B(y))\to(1\to B^*(y))=$$
$$\left.\begin{cases}1,R(A(x),B(y))\leqslant B^*(y)\\ 1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\quad R(A(x),B(y))+B^*(y)<1\\ (2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+B^*(y)\quad R(A(x),B(y))+B^*(y)\geqslant 1\end{cases}\right\}$$
$$R(A(x),B(y))\leqslant B^*(y)\tag{2}$$

关于 FMT 模型的三 I 约束解有如下定理。

定理 1(三 IFMT 下确界算法) FMT 模型的三 I 约束解 $A^*(x)$

基金项目:山东省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Shandong Province of China under Grant No.Y2003A01)。
作者简介:阚婷(1983-),女,硕士研究生,研究方向为非经典数理逻辑;张兴芳(1957-),女,教授,研究生导师,主要研究方向为模糊推理,模糊逻辑,模糊信息处理等;王作真(1983-),女,硕士研究生,研究方向为非经典数理逻辑。
收稿日期:2007-10-31　**修回日期:**2008-01-02

由下式给出 $A^*(x)=1\chi_{E_x}+0\chi_{E_x^c}, x\in X$,其中 $E_x=\{y\in Y/R(A(x),B(y))>B^*(y)\}$。$\chi_{E_x}$ 为 E_x 的特征函数,E_x^c 为 E_x 的余集。

证明 对任意的 $x\in X$,当 $y\in E_x$ 时,一方面 $A^*(x)\equiv 1$ 则 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))=R(A(x),B(y))\to(1\to B^*(y))=R(A(x),B(y))\to B^*(y)=\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+B^*(y)\end{cases}$(最小值)。

另一方面,若存在 $x_0\in X$,满足 $C(x_0)<1$,对于任意 $y\in E_x$,则不会使式(1)取最小值。

若 $C(x_0)\leqslant B^*(y)$,则 $(A(x_0)\to B(y))\to(C(x_0)\to B^*(y))\equiv 1$(不是最小值)。

若 $C(x_0)>B^*(y)$,则 $(A(x_0)\to B(y))\to(C(x_0)\to B^*(y))>R(A(x_0)\to B(y))\to(1\to B^*(y))>\begin{cases}1-R(A(x_0),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x_0),B(y)))+B^*(y)\end{cases}$(最小值)。

当 $y\in E_x^c$ 时,$A^*(x)\equiv 0$ 则 $(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))=(A(x)\to B(y))\to(0\to B^*(y))\equiv 1$(最小值)。而对于任意 $x\in X$,比 0 小的 $A^*(x)$ 不存在。

综上所述,$A^*(x)$ 应是 $F(X)$ 中具有上述性质的最小模糊集。

2 FMT 模型的全蕴涵 α-三 I 约束算法

α-三 I 约束 FMT 原则:设 X,Y 为非空集,$F(X),F(Y)$ 分别表示 X,Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)\in F(X)$,$B(y),B^*(y)\in F(Y)$,寻求最小的模糊集,使得

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\leqslant\alpha \tag{3}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立,α 是[0,1]中给定的数。

注 2:由式(2)知,当 $R(A(x),B(y))\leqslant B^*(y)$ 时式(1)的最小值为 1,若 α 的值限定为 1,此时最小的模糊集 $A^*(x)\equiv 0$。当 $R(A(x),B(y))>B^*(y)$ 时,若 α 的值限定为 1,此时使式(3)成立的最小的模糊集仍为 $A^*(x)\equiv 0$,式(3)最小值为

$$\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+B^*(y)\end{cases}$$

此时式(1)的 FMT 模型的一般化问题,式(3)应满足的 α 之范围为 $\alpha\in(\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+B^*(y)\end{cases},1]$,仅就 $\alpha\in(\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+B^*(y)\end{cases},1]$ 时进行讨论,此时有如下的定理。

定理 2(α-三 IFMT 下确界算法 I) FMT 模型的 α-三 I 约束解 $A^*(x)$ 由下式给出

$$\begin{aligned}A^*(x)=&\sup_{y\in E_x\cap E_y}\{B^*(y)\vee(1+(2\lambda-1)B^*(y)-R(A(x),B(y)))\vee\\&(\frac{2\lambda-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)^2B^*(y)-\alpha}{2\lambda-1}\wedge\\&((2\lambda-1)(B^*(y)-R(A(x),B(y)))+2\lambda-\alpha))\}+\\&\sup_{y\in E_x\cap E_y^c}\{B^*(y)\vee\frac{R(A(x),B(y))-B^*(y)-2\lambda-1}{1-2\lambda}\vee\\&(\frac{1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)B^*(y)+(2\lambda-1)^2-\alpha}{(2\lambda-1)^2}\wedge\\&\frac{(2\lambda-1)+(2-R(A(x),B(y)))+B^*(y)-\alpha}{2\lambda-1})\}\end{aligned}$$

$x\in X$,其中 $E_x=\{y\in Y/R(A(x),B(y))>B^*(y)\}$,$E_y=\{y\in Y|B^*(y)<\frac{1}{2}\}$,$\lambda\neq\frac{1}{2}$。

证明 一方面,对任意的 $x\in X$ 和满足 $C(x)>A^*(x)$ 的 $C(x)\in F(X)$,$C(x)$ 使得式(3)成立。

事实上,对于任意的 $y\in E_x$,由 $C(x)>A^*(x)$,得

$$(A(x)\to B(y))\to(C(x)\to B^*(y))=$$

$$R(A(x),B(y))\to\begin{cases}1-C(x)+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-C(x))+B^*(y)\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)(1-C(x))+(2\lambda-1)^2B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+(1-C(x))+(2\lambda-1)B^*(y)\end{cases}\\\begin{cases}1-R(A(x),B(y))+(2\lambda-1)^2(1-C(x))+(2\lambda-1)B^*(y)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x),B(y)))+(2\lambda-1)+(1-C(x))+B^*(y)\end{cases}\end{cases}<\alpha$$

另一方面,若存在 $x_0\in X$ 满足 $D(x_0)<A^*(x_0)$。$D(x_0)$ 则不会使式(3)成立。

事实上,若 $D(x_0)<A^*(x_0)$,则存在 $y_0\in E_{x_0}$,分如下二种情况讨论:

(1)若 $D(x_0)<B^*(y_0)$ 时,$(A(x_0)\to B(y_0))\to(D(x_0)\to B^*(y_0))=1>\alpha$。

(2)若 $D(x_0)\geqslant B^*(y_0)$ 时,

$$(A(x_0)\to B(y_0))\to(C(x_0)\to B^*(y_0))=$$

$$R(A(x_0),B(y_0))\to\begin{cases}1-D(x_0)+(2\lambda-1)B^*(y_0)\\(2\lambda-1)(1-D(x_0))+B^*(y_0)\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\begin{cases}1-R(A(x_0),B(y_0))+(2\lambda-1)(1-D(x_0))+(2\lambda-1)^2B^*(y_0)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x_0),B(y_0)))+(1-D(x_0))+(2\lambda-1)B^*(y_0)\end{cases}\\\begin{cases}1-R(A(x_0),B(y_0))+(2\lambda-1)^2(1-D(x_0))+(2\lambda-1)B^*(y_0)\\(2\lambda-1)(1-R(A(x_0),B(y_0)))+(2\lambda-1)+(1-D(x_0))+B^*(y_0)\end{cases}\end{cases}<\alpha$$

综上所述 $A^*(x)$ 应是 $F(X)$ 中具有上述性质的最小模糊集。

注 3 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是蕴涵算子族 $L\text{-}\lambda\text{-}R_0$ 的模糊蕴涵算子 $R(x,y)=x\to_\lambda y$ 的特殊情形,此时蕴涵算子族 $L\text{-}\lambda\text{-}R_0$ 为 R_0 算子。即

$$x\to y=\begin{cases}1, x\leqslant y\\(1-x)\vee y, x>y\end{cases}\quad x,y\in[0,1]$$

当 $A^*(x)\equiv 1$ 时,式(1)最小为

$$(A(x)\to B(y))\to(1\to B^*(y))=$$

$$\begin{cases}1, R(A(x),B(y))<B^*(y)\\(1-R(A(x),B(y)))\vee B^*(y), R(A(x),B(y))\geqslant B^*(y)\end{cases}$$

当 $R(A(x),B(y))<B^*(y)$ 时,式(1)恒为 1,若限制 α 的值为 1,则使式(3)成立的最小的 $A^*(x)\equiv 0$。当 $R(A(x),B(y))\geqslant B^*(y)$ 时,若限制 α 的值为 1 时,则使式(3)成立的最小的 $A^*(x)\equiv 0$。式(1)的 FMT 的一般化模型,式(3)应满足的 α 之范围为 $\alpha\in((1-R(A(x),B(y)))\vee B^*(y),1]$,仅就 $\alpha\in((1-R(A(x),B(y)))\vee B^*(y),1]$ 时进行讨论,此时有如下的定理。

定理 3(α-三 IFMT 下确界算法 II) FMT 模型的 α-三 I 约束解 $A^*(x)$ 由下式给出 $A^*(x)=\sup\limits_{y\in E_x}\{C(x)|(1-C(x))\cup(1-R(A(x),B(y)))\cup B^*(y)\leqslant\alpha\}, x\in X, \lambda=0$。

3 结束语

本文针对具有含参数的蕴涵算子族 $L\text{-}\lambda\text{-}R_0$ 给出了一般化的三 I 约束方法和 α-三 I 约束方法的 FMT 公式,所得结果进一步完善和丰富了三 I 方法的理论。进而可望为实现新型模糊控制器的某些性能指标提供必要的理论依据。

(下转 85 页)