# 基于蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 的反向 α–三 I 支持算法

谷焕春,张兴芳
GU Huan-chun,ZHANG Xing-fang

聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059
School of Mathematics Science,Liaocheng University,Liaocheng,Shandong 252059,China
E-mail:guhuanchun@lcu.edu.cn

**GU Huan-chun,ZHANG Xing-fang.Reverse α-triple I sustaining method under family of implication operator $L\lambda 0\lambda G$. Computer Engineering and Applications,2008,44(16):66-69.**

**Abstract:** In the paper the thought of fuzzy reasoning under family of implication operator $L\lambda 0\lambda G$ is introduced,which can contribute to raise the credibility of reasoning result.Reverse α-Triple I Sustaining method with respect to FMP and FMT models are discussed.

**Key words:** fuzzy reasioning;family of implication operator $L\lambda 0\lambda G$;Reverse α-Triple I Sustaining method

**摘 要:** 提出了基于蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 的模糊推理的思想,这将有助于提高推理结果的可靠性。针对蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 给出了模糊推理的 FMP 模型及 FMT 模型的反向 α–三 I 支持算法。

**关键词:** 模糊推理;蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$;反向 α–三 I 支持算法
**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.16.020 **文章编号:** 1002-8331(2008)16-0066-04 **文献标识码:** A **中图分类号:** O231

## 1 引言

美国控制论专家及模糊集理论创始人 Zadeh 于 1973 年提出了模糊推理中著名的求解 FMP 模型和 FMT 模型的 CRI 算法[1]。从此,以模糊控制为核心的模糊技术已经被广泛地应用于许多工业和科研领域,并且取得了显著的经济效益。然而,模糊推理远较经典逻辑学中的二值推理复杂。从应用的角度看,似乎很难找到一种普遍适用于不同领域的模糊推理方法。而且基于 CRI 方法的模糊系统本质上是一种插值器[2],应用此系统在研究模糊系统的函数逼近模型时,不可避免地出现"规则爆炸"的现象。从理论角度看,Zadeh 的 CRI 算法及其演变[3]的推理机制也似乎有若干值得推敲之处[4]。因此,近年来模糊推理基础和推理方法的模型受到极大的关注。我国学者王国俊于 1999 年提出了著名的模糊推理全蕴涵三 I 算法[4-7],有效地改进了经典的 CRI 算法,并将之纳入到模糊逻辑的框架之中。

在模糊推理中无论是 CRI 算法、三 I 算法还是反向三 I 算法,推理的结果都与选用的模糊蕴涵算子密切相关。文献[8,9]针对几个常见的蕴涵算子分别给出了相应的 FMP 模型和 FMT 模型解的计算公式。运用不同的蕴涵算子进行推理,结果一般不相等,甚至误差很大,这在模糊推理的实际应用中,有一定的冒险性,为此设想运用带参数的蕴涵算子进行模糊推理似乎可以预防冒险性。基于此思想,本文给出了 $\lambda\in(\frac{1}{2},1)$ 时蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 的 FMP 模型及 FMT 模型的反向 α–三 I 支持算法,其余情况另文讨论。本文中如无特别说明,$\lambda$ 的范围为 $(\frac{1}{2},1)$。

## 2 准备知识

蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 的模糊蕴涵算子 $R(x,y)=x\rightarrow_{\lambda}y$ 定义如下:

$$x\rightarrow_{\lambda}y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ 1-x+(2-\frac{1}{\lambda})y, & x>y \text{ 且 } (1-\lambda)y<\lambda(1-x) \quad x,y\in[0,1]\\ y, & x>y \text{ 且 } (1-\lambda)y\geqslant\lambda(1-x)\end{cases}$$

特别地,当 $\lambda=0,\frac{1}{2},1$ 时该算子分别是 Gödel 算子、$R_0$ 算子和 Lukasiewicz 算子,因此称它为含参量 $\lambda$ 的蕴涵算子 $R_{L\lambda 0\lambda G}$,其全体称为蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$,$\lambda\in[0,1]$。

**定理 1**[13] 当 $\lambda\in(\frac{1}{2},1)$ 时,蕴涵算子族 $L\lambda 0\lambda G$ 的模糊蕴涵算子 $R(x,y)=x\rightarrow_{\lambda}y$ 关于第一个变量不增,关于第二个变量不减。

**反向三 I 支持 FMP 原则** 设 $X$、$Y$ 为非空集,$F(X)$、$F(Y)$ 分别表示 $X$、$Y$ 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)$,$A^*(x)\in F(X)$,$B(y)\in F(Y)$,寻求最大的模糊集 $B^*(y)\in F(Y)$,使得

$$(A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y)) \tag{1}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 具有最大的可能值。

**基金项目:** 教育部科学技术研究重点项目(the Key Scientific and Technical Research Project of Ministry of Education of China under Grant No.206089)。
**作者简介:** 谷焕春(1967-),女,研究方向为非经典逻辑与近似推理;张兴芳(1957-),女,教授,硕士研究生导师,主要研究方向为模糊推理,模糊逻辑,模糊信息处理等。
**收稿日期:** 2008-02-25 **修回日期:** 2008-04-25

**定理 2** 若 $R=\rightarrow:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 关于第一个变量不增，第二个变量不减，那么公式（1）的最大值为：

$$M(x,y)=(A^*(x)\rightarrow 0)\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))$$

**反向三 I 支持 FMT 原则** 设 $X$、$Y$ 为非空集，$F(X)$、$F(Y)$ 分别表示 $X$、$Y$ 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)\in F(X)$，$B(y)$，$B^*(y)\in F(Y)$，寻求最小的模糊集 $A^*(x)\in F(X)$，使得式（1）对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 具有最大的可能值。

**定理 3** 若 $R=\rightarrow:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 关于第一个变量不增，第二个变量不减，那么公式（1）的最大值为：

$$N(x,y)=(1\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))$$

## 3 FMP 模型的反向 $\alpha$–三 I 支持算法

设 $E_y=\{x\in X|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_y==\{x\in X|1-A^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，由反向三 I 支持 FMP 原则知 $B^*(y)\equiv 0$ 时，式（1）最大为：

$$(A^*(x)\rightarrow 0)\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))=\begin{cases}1 & x\in E_y\\ 1 & x\in E_y^c\cap F_y\\ A^*(x)+(2-\dfrac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)) & x\in E_y^c\cap F_y^c \text{ 且 } (1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda A^*(x)\\ R(A(x),B(y)) & x\in E_y^c\cap F_y^c \text{ 且 } (1-\lambda)R(A(x),B(y))\geqslant\lambda A^*(x)\end{cases}\tag{2}$$

当 $B^*(y)\equiv 1$ 时式（1）最小为 $(A^*(x)\rightarrow 1)\rightarrow R(A(x),B(y))=R(A(x),B(y))$。

**反向 $\alpha$–三 I 支持 FMP 原则** 设 $X$、$Y$ 为非空集，$F(X)$、$F(Y)$ 分别表示 $X$、$Y$ 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)$，$A^*(x)\in F(X)$，$B(y)\in F(Y)$，寻求最大的模糊集 $B^*(y)\in F(Y)$，使得

$$(A^*(x)\rightarrow B^*(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))\geqslant\alpha\tag{3}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立。

当 $x\in F_y$ 时，式（1）值恒为 1，对任意的 $\alpha\in[0,1]$，使式（3）成立的最大的 $B^*(y)$ 为 1；$x\in E_y^c\cap F_y$ 时，式（1）的最大值为 1，最小值为 $R(A(x),B(y))$，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最大的 $B^*(y)$ 为 1，对于式（1）的 FMP 模型的一般化问题，式（3）应满足的 $\alpha$ 的范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$，此时有如下定理 4；$x\in E_y^c\cap F_y^c$ 且 $(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda A^*(x)$ 时，式（1）的最大值为 $A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))$，最小值为 $R(A(x),B(y))$，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最大的 $B^*(y)$ 为 1，$\alpha\in(A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)),1]$ 时，式（3）不成立，对于式（1）的 FMP 模型的一般化问题，式（3）应满足的 $\alpha$ 的范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))]$，此时有如下定理 5；$x\in E_y^c\cap F_y^c$ 且 $(1-\lambda)R(A(x),B(y))\geqslant\lambda A^*(x)$ 时，式（1）的值恒为 $R(A(x),B(y))$，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最大的 $B^*(y)$ 为 1，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$ 时，式（3）不成立。

**定理 4**（反向 $\alpha$–三 IFMP 上确界算法 I） FMP 模型的反向 $\alpha$–三 I 支持解的上确界 $B^*(y)$ 由下式给出：

$$B^*(y)=\inf_{x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y}\{A^*(x)\wedge(\frac{R(A(x),B(y))+A^*(x)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}\vee(\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y))))\},y\in Y$$

其中 $E_y=\{x\in X|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_y==\{x\in X|1-A^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，$G_y=\{x\in X|A^*(x)<\lambda\}$，$E_y^c$ 分别为 $E_y$ 的余集，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$，$\lambda\in(\frac{1}{2},1)$。

**证明**

（1）一方面，对任意的 $y\in Y$ 和满足 $C(y)<B^*(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$，$C(y)$ 使得式（3）成立。事实上，对于任意的 $x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$，由 $C(y)<B^*(y)$，得 $C(y)<A^*(x)$，同时

$$C(y)<(\frac{R(A(x),B(y))+A^*(x)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}\vee(\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y))))$$

分两种情形：

（1.1）当 $\frac{R(A(x),B(y))+A^*(x)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}\geqslant\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y))$ 时，得 $C(y)<A^*(x)$ 同时 $C(y)<\frac{R(A(x),B(y))+A^*(x)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}$。

由 $x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$ 知 $A^*(x)<\lambda$，于是 $A^*(x)<\frac{\lambda}{1-\lambda}(1-A^*(x))$，$C(y)<\frac{\lambda}{1-\lambda}(1-A^*(x))$，则

$$(A^*(x)\rightarrow C(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))=(1-A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})C(y))\rightarrow R(A(x),B(y))=1\geqslant\alpha$$

（1.2）当 $\frac{R(A(x),B(y))+A^*(x)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}<\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y))$，即 $1-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))>R(A(x),B(y))$ 时，得 $C(y)<A^*(x)$（由（1）知此时有 $C(y)<\frac{\lambda}{1-\lambda}(1-A^*(x))$）同时 $C(y)<\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y))$，则有

$$\begin{aligned}&(A^*(x)\rightarrow C(y))\rightarrow(A(x)\rightarrow B(y))=\\&(1-A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})C(y))\rightarrow R(A(x),B(y))\geqslant\\&(1-A^*(x)+A^*(x)-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))\rightarrow R(A(x),B(y))=\\&(1-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))\rightarrow R(A(x),B(y))\end{aligned}$$

因为 $(1-\lambda)R(A(x),B(y))-\lambda(\alpha-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))=\lambda(R(A(x),B(y))-\alpha)<0$，所以 $(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda(\alpha-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))$，于是

$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))\geqslant$

$(1-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))\to R(A(x),B(y))=$

$\alpha-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))=\alpha$

（2）另一方面，若存在 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)>B^*(y_0)$，则 $D(y_0)$ 不会使式（3）成立。事实上，若 $D(y_0)>B^*(y_0)$，则存在 $x_0\in E^c_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$ 使得

$D(y_0)>A^*(x_0)\wedge(\frac{R(A(x_0),B(y_0))+A^*(x_0)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}\vee(\frac{A^*(x_0)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x_0),B(y_0))))$

分两种情形：

（2.1）若 $D(y_0)\geqslant A^*(x_0)$，则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to R(A(x_0),B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$

（2.2）若 $D(y_0)<A^*(x_0)$（由前知此时有 $D(y_0)<\frac{\lambda}{1-\lambda}(1-A^*(x_0))$），则 $D(y_0)>\frac{R(A(x_0),B(y_0))+A^*(x_0)-1}{2-\frac{1}{\lambda}}$ 且 $D(y_0)>\frac{A^*(x_0)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x_0),B(y_0))$，则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^*(x_0)+(2-\frac{1}{\lambda})D(y_0))\to R(A(x_0),B(y_0))$

若 $(1-\lambda)R(A(x_0),B(y_0))<\lambda(A^*(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})D(y_0))$，则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=$

$A^*(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})D(y_0)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))<$

$A^*(x_0)-(A^*(x_0)-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0)))+$

$(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))=\alpha$

若 $(1-\lambda)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant\lambda(A^*(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})D(y_0))$，则

$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$

综上所述，$B^*$ 应是 $F(Y)$ 中具有上述性质的最大模糊集。

**定理 5**（反向 $\alpha$–三 IFMP 上确界算法 II） FMP 模型的反向 $\alpha$–三 I 支持解的上确界 $B^*(y)$ 由下式给出：

$$B^*(y)=\inf_{x\in E^c_y\cap F^c_y\cap H_y}\{A^*(x)\wedge(\frac{A^*(x)-\alpha}{2-\frac{1}{\lambda}}+R(A(x),B(y)))\},y\in Y$$

其中 $E_y=\{x\in X|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_y==\{x\in X|1-A^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，$H_y=\{x\in X|(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda A^*(x)\}$。$E^c_y$、$F^c_y$ 分别为 $E_y$、$F_y$ 的余集，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),A^*(x)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))]$，$\lambda\in(\frac{1}{2},1)$。

**证明** 与定理 4 证明完全类似。

## 4 FMT 模型的反向 $\alpha$–三 I 支持算法

**反向 $\alpha$–三 I 支持 FMT 原则** 设 $X$、$Y$ 为非空集，$F(X)$、$F(Y)$ 分别表示 $X$、$Y$ 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)\in F(X)$，$B(y)$，$B^*(y)\in F(Y)$，寻求最小的模糊集 $A^*(x)\in F(X)$，使得

$$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))\geqslant\alpha \tag{3}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立。

设 $E_x=\{y\in Y|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_x=\{y\in Y|B^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，$G_x==\{y\in Y|(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda(1-B^*(x))\}$，由反向三 I 支持 FMT 原则知，当 $A^*(x)\equiv1$ 时，式（1）最大为：

$(1\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=$

$$\begin{cases}1 & y\in E_x\\ 1 & y\in E^c_x\cap F_x\\ 1-B^*(y)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)) & y\in E^c_x\cap F^c_x\cap G_x\\ R(A(x),B(y)) & y\in E^c_x\cap F^c_x\cap G^c_x\end{cases} \tag{4}$$

当 $A^*(x)=0$ 时，式（1）的最小值为：

$(0\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=R(A(x),B(y))$

所以当 $y\in E_x$ 时，式（1）恒为 1，对任意的 $\alpha\in[0,1]$，使式（3）成立的最小的 $A^*(x)\equiv0$。当 $y\in E^c_x\cap F_x$ 时，式（1）的最小值为 $R(A(x),B(y))$，最大值为 1，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最小的 $A^*(x)\equiv0$，对于式（1）的 FMT 模型的一般化问题，式（3）应满足的 $\alpha$ 的范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$，此时有如下定理 6；当 $y\in E^c_x\cap F^c_x\cap G_x$ 时，式（1）的最小值为 $R(A(x),B(y))$，最大值为 $1-B^*(y)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))$，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最小的 $A^*(x)\equiv0$，$\alpha\in(1-B^*(y)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)),1]$ 时，式（3）不成立，对于式（1）的 FMT 模型的一般化问题，式（3）应满足的 $\alpha$ 的范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),1-B^*(y)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))]$，此时有如下定理 7；当 $y\in E^c_x\cap F^c_x\cap G^c_x$ 时，式（1）的值恒为 $R(A(x),B(y))$，$\alpha\in[0,R(A(x),B(y))]$ 时，使式（3）成立的最小的 $A^*(x)\equiv0$，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$ 时，式（3）不成立。

**定理 6**（反向 $\alpha$–三 IFMT 下确界算法 I） FMT 模型的反向 $\alpha$–三 I 支持解的下确界 $A^*(x)$ 由下式给出：

$$A^*(x)=\sup_{y\in E^c_x\cap F_x}\{B^*(y)\vee((1-R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y))\wedge(\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))))\},x\in X$$

其中 $E_x=\{y\in Y|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_x=\{y\in Y|B^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，$E^c_x$ 为 $E_x$ 的余集，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$，$\lambda\in(\frac{1}{2},1)$。

**证明**

（1）一方面，对任意的 $x\in X$ 和满足 $C(x)>A^*(x)$ 的 $C(x)\in F(X)$，$C(x)$ 使得式（3）成立。事实上，对于任意的 $y\in E^c_x\cap F_x$，由 $C(x)>A^*(x)$，得 $C(x)>B^*(y)$ 且

$C(x)>((1-R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y))\wedge(\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))))$

分两种情形：

(1.1) $1-R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)\geqslant\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))$ 即 $1-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))\geqslant R(A(x),B(y))$ 时，有 $C(x)>B^*(y)$ 且 $C(y)>\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))$，再分两种情形：

①$(1-\lambda)B^*(y)<\lambda(1-C(x))$

由 $R(A(x),B(y))<\alpha$ 可推出 $(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda(\alpha-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))$，于是

$$\begin{aligned}&(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=\\&(1-C(x)+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y))\to R(A(x),B(y))>\\&(1-(\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))+\\&(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y))\to R(A(x),B(y))=\\&(1-\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))\to R(A(x),B(y))=\\&\alpha-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))=\alpha\end{aligned}$$

②$(1-\lambda)B^*(y)\geqslant\lambda(1-C(x))$

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=B^*(y)\to R(A(x),B(y))=1\geqslant\alpha$

(1.2) $1-R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)<\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))$ 时，有 $C(x)>B^*(y)$ 且 $C(x)>1-R(A(x),B(y))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)$，即 $C(x)>B^*(y)$ 且 $1-C(x)+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)<R(A(x),B(y))$，再分两种情形：

①$(1-\lambda)B^*(y)<\lambda(1-C(x))$

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=(1-C(x)+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y))\to R(A(x),B(y))=1\geqslant\alpha$

②$(1-\lambda)B^*(y)\geqslant\lambda(1-C(x))$

$(C(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y))=B^*(y)\to R(A(x),B(y))=1\geqslant\alpha$

(2) 另一方面，若存在 $x_0\in X$ 满足 $D(x_0)<A^*(x_0)$，则 $D(x_0)$ 不会使式(3)成立。事实上，若 $D(x_0)<A^*(x_0)$，则存在 $y_0\in E^c_{x_0}\cap F_{x_0}$ 使

$$D(x_0)<\{B^*(y_0)\vee((1-R(A(x_0),B(y_0))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0))\wedge(\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))))\}$$

分两种情形：

(2.1) 若 $D(x_0)\leqslant B^*(y_0)$，则 $(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to R(A(x_0),B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$

(2.2) 若 $D(x_0)>B^*(y_0)$，则 $D(x_0)<1-R(A(x_0),B(y_0))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0))$ 且 $D(y_0)<\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))$，即 $1-D(x_0)+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)>R(A(x_0),B(y_0))$ 且 $D(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$。

因为 $y_0\in E^c_{x_0}\cap F_{x_0}$，所以 $B^*(y_0)\leqslant R(A(x_0),B(y_0))$，于是有

$$\begin{aligned}&\lambda(1-D(x_0))>\lambda(1-(1-R(A(x_0),B(y_0))+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)))>\\&\lambda R(A(x_0),B(y_0))-(2\lambda-1)B^*(y_0)\geqslant\lambda B^*(y_0)-(2\lambda-1)B^*(y_0)=\\&(1-\lambda)B^*(y_0)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=\\&(1-D(x_0)+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0))\to R(A(x_0),B(y_0))\end{aligned}$$

若 $(1-\lambda)R(A(x_0),B(y_0))<\lambda(D(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0))$，则

$$\begin{aligned}&(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=\\&D(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x_0),B(y_0))<\alpha\end{aligned}$$

若 $(1-\lambda)R(A(x_0),B(y_0))\geqslant\lambda(D(x_0)-(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y_0))$，则

$$(D(x_0)\to B^*(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$$

综上所述，$A^*$ 应是 $F(X)$ 中具有上述性质的最小模糊集。

**定理7**（反向$\alpha$–三IFMT下确界算法II）FMT模型的反向$\alpha$–三I支持解的下确界 $A^*(x)$ 由下式给出：

$$A^*(x)=\sup_{y\in E^c_x\cap F^c_x\cap G_x}\{B^*(y)\vee(\alpha+(2-\frac{1}{\lambda})B^*(y)-(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y)))\},x\in X$$

其中 $E_x=\{y\in Y|A(x)\leqslant B(y)\}$，$F_x=\{y\in Y|B^*(x)\leqslant R(A(x),B(y))\}$，$E^c_x$、$F^c_x$ 分别是 $E_x$、$F_x$ 的余集，$G_x==\{y\in Y|(1-\lambda)R(A(x),B(y))<\lambda(1-B^*(x))\}$，$\alpha\in(R(A(x),B(y)),1-B^*(y)+(2-\frac{1}{\lambda})R(A(x),B(y))]$，$\lambda\in(\frac{1}{2},1)$。

**证明** 与定理6证明完全类似.

## 参考文献：


[1] Zadeh L A.Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J].IEEE Trans on Sys ManCybern，1973，3(1)：28–33.

[2] 李洪兴.模糊控制的插值机理[J].中国科学：E辑，1998，28(3)：259–267.

[3] Dubois D.Fuzzy sets in approximate reasoning，part 2：logic approaches[J].Fuzzy Sets and Systems，1991，40(1)：203–244.

[4] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2000.

[5] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三I算法[J].中国科学：E辑，1999，29(1)：43–53.

[6] 王国俊.模糊推理的一个新方法[J].模糊系统与数学，1999，13(3)：1–10.

[7] 王国俊，宋庆燕.一种新型的三I算法及其逻辑基础[J].自然科学进展，2003，13(6)：575–581.

[8] 彭家寅，侯健，李洪兴.基于某些常见蕴涵算子的反向三I算法[J].自然科学进展，2005，15(4)：404–410.

[9] 彭家寅.基于某些常见蕴涵算子的模糊推理全蕴涵三I约束算法[J].自然科学进展，2005，15(5)：539–546.

[10] 宋士吉，吴澄.模糊推理的反向三I算法[J].中国科学：E辑，2002，32(2)：230–246.

[11] 王国俊，兰蓉.系统 $H_\alpha$ 中的广义重言式理论[J].陕西师范大学学报，2003，31(2)：1–11.

[12] 吴望名.参数Kleene系统中的广义重言式[J].模糊系统与数学，2000，14(1)：1–7.

[13] 张凤霞.含参量的蕴涵算子及其性质[J].聊城大学学报，2006(1).