基于蕴涵算子 L_p 的模糊推理的 FMP 反向三 I 算法

王作真[1],张兴芳[1],张存甲[2]
WANG Zuo-zhen[1],ZHANG Xing-fang[1],ZHANG Cun-jia[2]

1.聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059
2.上海大学 理学院,上海 200444
1.School of Mathematics Science,Liaocheng University,Liaocheng,Shandong 252059,China
2.Department of Science,Shanghai University,Shanghai 200444,China
E-mail:wangzuozhen2006@163.com

WANG Zuo-zhen,ZHANG Xing-fang,ZHANG Cun-jia.Reverse triple I sustaining method for fuzzy reasoning based on implication operator L_p.Computer Engineering and Applications,2008,44(23):65-67.

Abstract: The theory of sustaining degree of reverse triple I method and α-reverse triple I sustaining method for fuzzy reasoning based on implication operator L_p are studied.The general formulae of α-solution of triple I and-solution of triple I method with respect to FMP models are discussed.

Key words: fuzzy reasoning;implication operator L_p;reverse triple I sustaining method;α-reverse triple I sustaining method

摘 要:研究了基于蕴涵算子 L_p 模糊推理的 FMP 反向三 I 支持算法及 α-反向三 I 支持算法,给出了 FMP 模型的反向三 I 算法及 α-反向三 I 算法的计算公式。

关键词:模糊推理;蕴涵算子 L_p;反向三 I 支持算法;α-反向三 I 支持算法
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.23.020 **文章编号**:1002-8331(2008)23-0065-03 **文献标识码**:A **中图分类号**:O231

模糊推理是模糊控制的核心,其推理过程是基于模糊逻辑中的蕴涵关系及推理法则来进行的。Zadeh[1]于 1973 年首先提出了模糊分离规则(简称 FMP 规则)的 CRI 算法(Compositional Rule of Inference)。此后,针对 CRI 方法人们进行了大量的研究并提出了许多新的派生推理方法。王国俊[6]首先指出了 CRI 方法的若干缺陷与不足,并基于逻辑语义蕴涵理论提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法。其基本思想为:已知 $A(B)\in F(X)(F(Y))$ 和 $A^*(B^*)\in F(X)(F(Y))$ 时寻求最优的 $B^*(A^*)\in F(Y)(F(X))$ 使得 $A\to B$ 全力支持 $A^*\to B^*$,即:

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)) \tag{1}$$

对一切 $x\in X, y\in Y$ 具有最大的可能值,其中 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 分别表示 X 和 Y 上的模糊集全体。

Klement 与 Navara 文献[1]中研究了基于参数的 T-范数——Frank T-范数的模糊逻辑系统,文献[2]研究了 Schweizer-Sklar T-范数导出的剩余蕴涵族,文献[3]讨论了基于 Schweizer-Sklar T-范数的模糊逻辑系统 UL^*。具有良好性质的蕴涵算子 L_p 在模糊推理中有重要应用,因此有必要用这一蕴涵算子对三 I 方法进行深入的讨论。本文的目的是研究基于剩余蕴涵 L_p 的反向三 I 支持算法。

1 FMP 模型的反向三 I 支持算法

定义 1 t-模 $\oplus_{L_p}$ 如下:

$$x\oplus_{L_p}y=\begin{cases}(x^p+y^p-1)^{\frac{1}{p}}, & x^p+y^p>1\\ 0, & x^p+y^p\leqslant 1\end{cases},(x,y)\in[0,1]\times[0,1],p\in(0,\infty)$$

其相应的伴随蕴涵算子为:

$$R_{L_p}(x,y)=\begin{cases}(1-x^p+y^p)^{\frac{1}{p}}, & x>y\\ 1, & x\leqslant y\end{cases},(x,y)\in[0,1]\times[0,1],p\in(0,\infty)$$

首先,给出 FMP 模型的模糊推理反向全蕴涵三 I 支持原则:反向三 I 支持 FMP 原则:设 X,Y 为非空集,$F(X),F(Y)$ 分别表示 X,Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x),A^*(x)\in F(X),B(y)\in F(Y)$ 寻求最大的模糊集 $B^*(y)\in F(Y)$,使得:

$$(A^*(x)\to B^*(y))\to(A(x)\to B(y)) \tag{2}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 具有最大的可能值。

注 1 设 $\varphi=\{x\in X/A^*(x)=0\}$,$\Psi=\{x\in X/A(x)>B(y)\}$,当 $B^*(y)\equiv 0$ 时,式(2)最大为:

$$(A^*(x)\to 0)\to(A(x)\to B(y))=$$

基金项目:山东省自然科学基金(the Natural Science Foundation of Shandong Province of China under Grant No.Y2003A01)。
作者简介:王作真(1983-),女,研究生,主要研究领域为模糊逻辑与近似推理;张兴芳(1957-),女,教授,研究生导师,主要研究领域为模糊逻辑与近似推理;张存甲(1983-),男,研究生,主要研究方向为运筹学与控制论。
收稿日期:2007-10-16 **修回日期**:2008-03-03

$$\begin{cases} 1, x\notin\Psi \\ R(A(x),B(y)), x\in\varphi \text{ 且 } x\in\Psi \\ 1, A^{*p}(x))+R^{p}(A(x),B(y))>1 \text{ 且 } x\notin\varphi \text{ 且 } x\in\Psi \\ (A^{*p}(x)+R^{p}(A(x),B(y)))^{\frac{1}{p}}, A^{*p}(x))+R^{p}(A(x),B(y))\leqslant 1 \\ \qquad\qquad \text{且 } x\notin\varphi \text{ 且 } x\in\Psi \end{cases} \tag{3}$$

当 $x\notin\Psi$ 时,式(2)恒为1,最大的 $B^{*}(y)\equiv 1$。当 $x\in\varphi$ 且 $x\in\Psi$ 时,式(2)最大为 $R(A(x),B(y))$,也是最小值,所以式(2)恒为 $R(A(x),B(y))$,最大的 $B^{*}(y)\equiv 1$。其余情况下,有如下FMP模型的反向三I支持解定理。

定理 1(反向三IFMP上确界算法) FMP模型的反向三I支持解 $B^{*}(y)$ 由下式给出 $B^{*}(y)=\inf\limits_{x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y}\{A^{*}(x)\wedge(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}\}\chi_{E_y^c\cap F_y\cap G_y}+0\chi_{E_y\cap F_y\cap G_y}, y\in Y$。其中 $E_y=\{x\in X/A^{*p}(x)+R^{p}(A(x),B(y))<1\}$, $F_y\in\Psi$, $G_y=\{x\in X/x\notin\varphi\}$, E_y^c 为 E_y 的余集,$\chi_{E_y\cap F_y\cap G_y}$ 为 $E_y\cap F_y\cap G_y$ 的特征函数。

证明 一方面,对于任意的 $x\in E_y\cap F_y\cap G_y$, $B^{*}(y)=0$,得 $(A^{*}(x)\to 0)\to(A(x)\to B(y))=(1-A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}\to R(A(x),B(y))=(A^{*p}(x)+R^{p}(A(x),B(y)))^{\frac{1}{p}}$ ($x\in E_y\cap F_y\cap G_y$ 时的最大值)。

对于任意的 $x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$,和满足 $C(y)<B^{*}(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$,得 $C(y)<A^{*}(x)\wedge(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}$ 得 $C(y)<A^{*}(x)$ 同时 $C(y)<(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}$ 所以 $(A^{*}(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=((1-A^{*p}(x))+C^{p}(y))^{\frac{1}{p}}\to R(A(x),B(y))\equiv 1$ ($x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$ 时的最大值)。

另一方面,若存在 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)>B^{*}(y_0)$。则 $D(y_0)$ 不会使得式(2)取最大值。事实上,由 $D(y_0)>B^{*}(y_0)$,分两种情形。

(1)存在 $x_0\in E_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$,使 $D(y_0)>0$,则 $(A^{*}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))$。若 $D(y_0)\geqslant A^{*}(x_0)$ 时,$(A^{*}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))$,注意到 $x_0\in E_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$,得 $A^{*p}(x_0)+R^{p}(A(x_0),B(y_0))<1$,所以 $R(A(x_0),B(y_0))<(A^{*p}(x_0)+R^{p}(A(x_0),B(y_0)))^{\frac{1}{p}}$ ($x_0\in E_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$ 时的最大值);若 $D(y_0)<A^{*}(x_0)$ 时,$(A^{*}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^{*p}(x_0)+D^{p}(y_0))^{\frac{1}{p}}\to(A(x_0)\to B(y_0))$,注意到 $x_0\in E_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$,得 $A^{*p}(x_0)+R^{p}(A(x_0),B(y_0))<1$,所以 $(1-A^{*p}(x_0)+D^{p}(y_0))^{\frac{1}{p}}>(A(x_0)\to B(y_0))(1-A^{*p}(x_0)+D^{p}(y_0))^{\frac{1}{p}}\to(A(x_0)\to B(y_0))=(A^{*p}(x_0)-D^{p}(y_0)+R^{p}(A(x_0),B(y_0))^{\frac{1}{p}}<(A^{*p}(x_0)-0+R^{p}(A(x_0),B(y_0))^{\frac{1}{p}}=(A^{*p}(x_0)+R^{p}(A(x_0),B(y_0))^{\frac{1}{p}}$ ($x_0\in E_{y_0}\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$ 时的最大值)。

(2)存在 $x_0\in E_{y_0}^c\cap F_{y_0}\cap G_{y_0}$,使 $D(y_0)>A^{*}(x)\wedge(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}$ 得 $D(y_0)>A^{*}(x_0)$ 或 $D(y_0)>(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}$。

分两种情况讨论:若 $D(y_0)>A^{*}(x_0)$,则 $(A^{*}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))\leqslant(A^{*}(x_0)\to A^{*}(x_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to R(A(x_0),B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))$,注意到 $x_0\in\Psi$,得 $R(A(x_0),B(y_0))<1$ ($x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$ 时的最大值);若 $D(y_0)>A^{*}(x_0)$ 不成立,则 $D(y_0)\leqslant A^{*}(x_0)$ 同时 $D(y_0)>(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)^{\frac{1}{p}}$,则 $(A^{*}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^{*p}(x_0)+D^{p}(y_0))^{\frac{1}{p}}\to(A(x_0)\to B(y_0))=(A^{*p}(x_0)-D^{p}(y_0)+R^{p}(A(x_0)\to B(y_0)))^{\frac{1}{p}}<(A^{*p}(x_0)-(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)+R^{p}(A(x_0),B(y_0)))^{\frac{1}{p}}=1$ ($x\in E_y^c\cap F_y\cap G_y$ 时的最大值)。

综上所述,B^{*} 应是 $F(Y)$ 中具有上述性质的最大模糊集。

2 FMP模型的 α-反向三I支持算法

α-反向三I支持FMP原则:设 X、Y 为非空集,$F(X)$、$F(Y)$ 分别表示 X、Y 上的模糊子集的全体构成的集合。已知 $A(x)$, $A^{*}(x)\in F(X)$, $B(y)\in F(Y)$,寻求最大的模糊集 $B^{*}(y)\in F(Y)$,使得:

$$(A^{*}(x)\to B^{*}(y))\to(A(x)\to B(y))\geqslant\alpha \tag{4}$$

对一切 $x\in X$ 与 $y\in Y$ 成立。

注 2 由式(3)知,当 $x\in\varphi$ 时,式(2)值恒为 $R(A(x),B(y))$,使式(4)成立的最大的 $B^{*}(y)$ 为1;当 $x\notin\Psi$ 时式(2)值恒为1,使式(4)成立的最大的 $B^{*}(y)$ 为1;当 $A(x)>B(y)$ 且 $x\notin\varphi$ 时,式(2)最大值为

$$(A^{*}(x)\to 0)\to R(A(x),B(y))=$$
$$\begin{cases} 1, & R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)\geqslant 1 \\ (A^{*p}(x)+R^{p}(A(x),B(y)))^{\frac{1}{p}}, & R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)<1 \end{cases}$$

式(2)的最小值为 $(A^{*}(x)\to 1)\to R(A(x),B(y))=R(A(x),B(y))$,因此当 $A(x)>B(y)$, $x\notin\varphi$ 且 $(1-A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}\leqslant R(A(x),B(y))$ 时,对于式(2)的FMP模型的一般化问题,式(4)应满足的 α 之范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),1]$,此时有如下定理2。当 $A(x)>B(y)$, $x\notin\varphi$ 且 $(1-A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}>R(A(x),B(y))$ 时,式(2)的最大值为 $(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}$,因此对于式(2)的FMP模型的一般化问题,式(4)应满足的 α 之范围为 $\alpha\in(R(A(x),B(y)),(R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}]$,此时有定理3。

定理 2(α-反向三IFMP上确界算法I) FMP模型的 α-反向三I支持解 $B^{*}(y)$ 由下式给出 $B^{*}(y)=\inf\limits_{x\in E_y}\{A^{*}(x)\wedge((R^{p}(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)\vee(A^{*p}(x)+R^{p}(A(x),B(y))-\alpha^{p})^{\frac{1}{p}}), y\in Y$。其中 $E_y=\{x\in X/A(x)>B(y), x\notin\varphi, (1-A^{*p}(x))^{\frac{1}{p}}\leqslant R(A(x),B(y))\}$, $\lambda\neq 0$。

证明 一方面,对任意的 $y\in Y$ 和满足 $C(y)\leqslant B^{*}(y)$ 的 $C(y)\in F(Y)$, $C(y)$ 使得式(4)成立。事实上,对于任意的 $x\in E_y$,由

$C(y)\leqslant B^*(y)$，得 $C(y)\leqslant A^*(x)\wedge((R^p(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1)\vee(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}})$，即 $C(y)\leqslant A^*(x)$同时 $C(y)\leqslant(R^p(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1),\vee(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$。

分两种情形：(1)当 $R^p(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1\geqslant(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$时，得 $C(y)<A^*(x)$同时 $C(y)<R^p(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1$，则$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x),B(y))=(1-A^{*p}(x)+C^p(y))^{\frac{1}{p}}\to(A(x)\to B(y))\equiv 1\geqslant\alpha$；(2)当 $R^p(A(x),B(y))+A^{*p}(x)-1<(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$时，得 $C(y)<A^*(x)$同时 $C(y)<(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$。

注意算子 L_p 的性质：关于第一变量不增，关于第二变量不减。则$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=(1-A^{*p}(x)+C^p(y))^{\frac{1}{p}}\to(A(x)\to B(y))=(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-C^p(y))^{\frac{1}{p}}\geqslant\alpha$。

另一方面，若存在 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)>B^*(y_0)$。则 $D(y_0)$不会使式(4)成立。事实上，若 $D(y_0)>B^*(y_0)$，则存在 $x_0\in E_{y_0}$使得 $D(y_0)>A^{*p}(x_0)\wedge((R^p(A(x_0),B(y_0))+A^{*p}(x_0)-1)\vee(A^{*p}(x_0)+R^p(A(x_0),B(y_0))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}})$。

分两种情形：(1)若 $D(y_0)>A^{*p}(x_0)$，注意蕴涵算子族 L_p 的性质：关于第一变量不增，关于第二变量不减。则$(A^{*p}(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))\leqslant(A^*(x_0)\to A^*(x_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to R(A(x_0),B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$；(2)若 $D(y_0)\leqslant A^*(x_0)$则 $D(y_0)>R^p(A(x_0),B(y_0))+A^{*p}(x_0)-1$ 同时 $D(y_0)>(A^{*p}(x_0)+R^p(A(x_0),B(y_0))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$，$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^{*p}(x_0)+D^p(y_0))^{\frac{1}{p}}\to(A(x_0)\to B(y_0))=(A^{*p}(x_0)-D^p(y_0)+(A(x_0)\to B(y_0))^p)^{\frac{1}{p}}<\alpha$。

综上所述并注意到 B^* 应是 $F(Y)$中具有上述性质的最大模糊集。

定理 3(α-反向三 IFMP 上确界算法 II) FMP 模型的 α-反向三 I 支持解 $B^*(y)$由下式给出 $B^*(y)=\inf\limits_{x\in F_y}\{A^*(x)\wedge A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}\}$，$y\in Y$。其中 $F_y=\{x\in X/A(x)>B(y),x\notin\varphi,(1-A^{*p}(x_0))^{\frac{1}{p}}>R(A(x),B(y))\}$，$\lambda\neq 0$。

证明 一方面，对任意的 $y\in Y$ 和满足 $C(y)\leqslant B^*(y)$的 $C(y)\in F(Y)$，$C(y)$使得(4)式成立。事实上，对于任意的 $x\in E_y$，由 $C(y)\leqslant B^*(y)$，得 $C(y)\leqslant A^*(x)\wedge(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$，即 $C(y)\leqslant A^*(x)$同时 $C(y)\leqslant(A^{*p}(x)+R^p(A(x),B(y))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$。从而$(A^*(x)\to C(y))\to(A(x)\to B(y))=(1-A^{*p}(x)+C^p(y))^{\frac{1}{p}}\to(A(x)\to B(y))=(A^{*p}(x)-C^p(y))+R^p(A(x),B(y)))^{\frac{1}{p}}\geqslant\alpha$。

另一方面，若存在 $y_0\in Y$ 满足 $D(y_0)>B^*(y_0)$。则 $D(y_0)$不会使式(4)成立。事实上，若 $D(y_0)>B^*(y_0)$，则存在 $x_0\in E_{y_0}$使得 $D(y_0)>A^*(x_0)\wedge(A^{*p}(x_0)+R^p(A(x_0),B(y_0))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$。

分三种情形：(1)若 $D(y_0)>A^*(x_0)$，则$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to(A(x_0)\to B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$；(2)若 $D(y_0)=A^*(x_0)$，则 $D(y_0)>(A^{*p}(x_0)+R^p(A(x_0),B(y_0))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$，$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=1\to(A(x_0)\to B(y_0))=R(A(x_0),B(y_0))<\alpha$；(3)若 $D(y_0)<A^*(x_0)$，则 $D(y_0)>(A^{*p}(x_0)+R^p(A(x_0),B(y_0))-\alpha^p)^{\frac{1}{p}}$，$(A^*(x_0)\to D(y_0))\to(A(x_0)\to B(y_0))=(1-A^{*p}(x_0)+D^p(y_0))^{\frac{1}{p}}\to(A(x_0)\to B(y_0))=(A^{*p}(x_0)-D^p(y_0))+R^p(A(x_0),B(y_0)))^{\frac{1}{p}}<\alpha$。

综上所述并注意到 B^* 应是 $F(Y)$中具有上述性质的最大模糊集。

3 结束语

本文采用了具有良好性质的蕴涵算子 L_p：给出了一般化的反向三 I 支持算法及 α-反向三 I 支持算法的 FMP 公式。所得结果进一步完善和丰富了三 I 方法的理论。进而可望为实现新型模糊控制器的某些性能指标提供必要的理论依据。

参考文献：

[1] Klement E P，Navara M.Propositional fuzzy logics based on frank t-norms：a comparison[M]//Dubois D.Fuzzy Sets，Logics and Reasoning about Knowledge.[S.l.]：Kluwer Academic Publishers，1999.

[2] Whale T.Parameterized R-implications[J].Fuzzy Sets and Systems，2003，134：231-281.

[3] 张小红.基于 Schweizer-Sklar 范数的模糊逻辑系统 *UL*[J].中国科学：E 辑，2005，35(12)：1314-1326.

[4] 王琼.基于剩余蕴涵的模糊三 I 方法的支持度[J].西南交通大学学报，2004，4：50-53.

[5] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J].中国科学：E 辑，1999，29(1)：43-53.

[6] 袁和军，李骏.推广形式下的三 I 算法[J].陕西师范大学学报，2002，1：22-26

[7] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2000.

[8] 吴望名.参数 Kleene 系统中的广义重言式[J].模糊系统与数学，2000，14(1)：1-7.

[9] 王国俊.模糊推理的一个新方法[J].模糊系统与数学，1999，13(3).

[10] 王国俊.一种新型的三 I 算法及其逻辑基础[J].自然科学进展，2003，13(6)：575.

[11] Dubois D.Fuzzy sets in approximate reasoning，Part 2：logic approaches[J].Fuzzy Sets and Systems，1991，40(1)：143.

[12] 彭家寅.基于某些常见蕴涵算子的反向三 I 算法[J].自然科学进展，2005，15(4)：404.