

基于 Pareto 最优概念的多目标进化算法研究

王向慧^{1,2}, 连志春², 徐志英², 唐云岚³

WANG Xiang-hui^{1,2}, LIAN Zhi-chun², XU Zhi-ying², TANG Yun-lan³

1.大连交通大学, 辽宁 大连 116028

2.朝阳师专 数学计算机系, 辽宁 朝阳 122000

3.武警工程学院 通信工程系, 西安 710086

1.School of Software Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian, Liaoning 116028, China

2.Department of Mathematics and Computer, Chaoyang Teachers' College, Chaoyang, Liaoning 122000, China

3.Department of Communication Engineering, Engineering College of the Chinese People's Armed Police Force, Xi'an 710086, China

WANG Xiang-hui, LIAN Zhi-chun, XU Zhi-ying, et al. Research on Pareto optimal-based multiobjective evolutionary algorithms. *Computer Engineering and Applications*, 2008, 44(27): 58-61.

Abstract: The Pareto optimal-based multi-objective evolutionary algorithm which is used to deal with multi-objective optimization problems has become a hot research topic. In this paper, some state-of-the-art algorithms in this research field are described firstly. Then, strategies adopted by various kinds of algorithms about finding the non-dominated set of solutions and distribute them uniformly in the Pareto front are elaborated. Lastly, several research points of performance evaluation which need to be further study are summarized.

Key words: multiobjective evolutionary algorithms; Pareto optimal; nondominated sorting; fitness sharing; elitism; performance measure

摘要: 基于 Pareto 最优概念的多目标进化算法已成为多目标优化问题研究的主流方向。详细介绍了该领域的经典算法, 重点阐述了各种算法在种群快速收敛并均匀分布于问题的非劣最优域上所采取的策略, 并归纳了算法性能评估中需要进一步研究的几个问题。

关键词: 多目标进化算法; Pareto 最优; 非劣解排序; 适应度共享; 精英策略; 性能评估

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.27.019 文章编号: 1002-8331(2008)27-0058-04 文献标识码: A 中图分类号: TP18

1 研究背景介绍

在科学和工程领域存在大量的多目标优化问题 (Multi-objective Optimization Problem, MOP) 与单目标优化问题不同 (Single-objective Optimization Problem, SOP), MOP 的最优解是由所谓 Pareto 最优解^[1]或非劣解^[2]组成的集合。传统的多目标优化方法, 如目标权重法、距离函数法以及转换为最小最大问题法^[3]等, 都是通过特定的方式将 MOP 转换为 SOP, 不仅需要较多的先验知识, 计算效率低, 而且鲁棒性差, 难以处理目标噪声及变量空间不连续的情况, 在实际运用中效果不佳。

进化算法 (Evolutionary Algorithm, EA), 也称演化算法, 是一种模拟自然进化过程的随机优化方法。与传统的优化技术比较, 群体搜索策略和群体间个体之间的信息交换是进化算法的两大特点。它们的优越性主要表现在: 首先, 进化的操作规则是概率性的而非确定性的, 在搜索过程中不易陷入局部最优; 其次, 由于它们固有的并行性, 进化结果不局限于单值解, 非常适合求解复杂的多目标问题; 再次, 进化算法采用自然进化机制来表现复杂现象, 充分利用适应值函数而不需要其它先验知识, 能够快速解决传统方法难以解决的问题。

早在 1967 年, Rosenberg 就曾提出可将遗传搜索策略用于多目标问题^[4]。1984 年, Schaffer^[5]提出了向量评估遗传算法 (Vector Evaluated Genetic Algorithm, VEGA), 第一次实现了 Rosenberg 的思想。在该算法的每一代进化过程中, 规模为 N 的种群被分为 q (目标维数) 个子种群 (规模为 N/q), 每个子种群对应一个目标进行随机选择, 之后重新合并为规模为 N 的新种群, 再进行传统的交叉和变异操作。但是, VEGA 算法本质上仍然是加权和非 Pareto 方法, Richardson 等人^[6]指出, 将子种群合并为一个新种群, 本质上等同于将适应度向量线性组合为一个单值适应度函数, 容易导致搜索向某个特定的目标方向进行, 产生遗传漂移现象。

基于 Pareto 最优概念的进化算法克服了上述方法的不足, 成为求解多目标问题的有效途径, 其代表性成果有: Fonseca 和 Fleming^[7]提出的基于排序的适应度赋值多目标遗传算法 (Multiple Objective Genetic Algorithm, MOGA), Horn, Nafpliotis 和 Goldberg^[8]提出的小生境 Pareto 遗传算法 (the Niche Pareto Genetic Algorithm, NPGA), Srinivas 和 Deb^[9]提出的非劣解排序遗传算法 (Nondominated Sorting Genetic Algorithm, NSGA),

作者简介: 王向慧 (1968-), 女, 副教授, 研究方向为计算机网络和算法; 连志春 (1964-), 男, 副教授, 研究方向为微分代数系统和计算机网络; 徐志英 (1975-), 女, 讲师, 研究方向为数据库和信息处理; 唐云岚 (1979-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为多目标进化算法、计算智能。

收稿日期: 2007-11-09 修回日期: 2008-03-18

Knowles 和 Corne^[9]提出的 Pareto 解存档进化策略(the Pareto Archived Evolution Strategy, PAES), Zitzler 和 Thiele^[10]提出的 Pareto 浓度进化算法(the Strength Pareto Evolutionary Algorithm, SPEA), Zitzler, Laumanns 和 Thiele^[11]提出的改进 Pareto 浓度进化算法(SPEA2), Deb, Pratap, Agarwal 和 Meyarivan^[12]提出的改进非劣解排序遗传算法(NSGA-II)。

2 多目标优化问题的数学描述

最大化与最小化问题可以相互转化, 因此, 仅以最大化多目标问题为研究对象。一个多目标问题可以表示如下, 其中决策向量 $x \in R^m$, 目标向量 $y \in R^n$: $\text{Max } y=f(x)=[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$ 。

定义 1 (优越性, Superiority/Inferiority) 称目标向量解 $u=[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 优于 $v=[v_1, v_2, \dots, v_n]$, 记为 $up > v$, 如果 u 部分大于 v , 也就是: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, u_i \geq v_i \wedge \exists i \in \{1, 2, \dots, n\}, u_i > v_i$ 。反过来, 称目标向量解 v 劣于 u , 记为 $vp > u$ 。

定义 2 (非劣性, Non-inferiority) 称目标向量解 $u=[u_1, u_2, \dots, u_n]$ 与 $v=[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 互为非劣, 如果 u 既不优于 v , 也不劣于 v 。非劣性也称为 Pareto 性。

定义 3 (非劣最优解, Non-inferior Optimal) 决策变量 $x_u \in R^n$ 称为多目标问题的非劣最优解, 当且仅当不存在决策变量 $x_v \in R^n$, 使得相应的目标向量 $v=[x_v \in R^n]=[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 优于 $u=[x_u \in R^n]=[u_1, u_2, \dots, u_n]$, 即 $vp > u$ 。非劣最优解也称为 Pareto 最优解。

由所有非劣最优解组成的集合称为多目标优化问题的最优解集, 相应非劣最优解的目标向量称为非占优的(non-dominated), 由所有非占优的目标向量构成多目标问题的非劣最优目标域, 即 Pareto 前沿(Pareto Front)。

3 经典的多目标进化算法

基于 Pareto 最优概念的多目标进化算法在实施过程的两个关键性问题是: (1) 如何使种群尽快地向 Pareto 前沿方向搜索, 即种群的收敛性问题; (2) 如何获得 Pareto 前沿均匀分布的非劣解, 即种群的多样性问题。为解决这两个问题, 人们分别提出了非劣解排序、适应度共享、精英策略、拥挤算子等方法, 进而形成了不同的多目标进化算法^[13-14]。

3.1 基于排序的适应度赋值多目标遗传算法

MOGA^[7]利用个体在整个种群内占优的情况确定其优劣性, 提出了基于排序的适应度赋值策略, 使种群快速收敛于 Pareto 前沿。首先, 根据式(1)计算个体的序号:

$$\text{rank}(x_i, t) = 1 + p_i^{(t)} \quad (1)$$

其中, $\text{rank}(x_i, t)$ 表示在第 t 代进化中个体 x_i 的序号, $p_i^{(t)}$ 表示当前种群内优于个体 x_i 的个体数。其次, 选择适当的函数为每个序号的个体赋值, 序号越小, 适应度越大。若相同序号对应多个个体, 则还需通过适应度共享进行适应度赋值。

适应度共享技术已被证实可有效防止遗传漂移^[15-16], 其难点在于如何确定共享参数 σ_{share} 。现有方法在设置 σ_{share} 时, 均基于两点假设: (1) Pareto 最优解集中解的个数是有限的; (2) Pareto 最优解集中解的分布是均匀的。在此基础上, Fonseca 和 Fleming^[7]将问题转化为对两个超立方体体积的分析, 并得到一个求解 σ_{share} 的 $q-1$ 次多项式(式(2)):

$$N\sigma_{share}^{q-1} - \frac{\prod_{i=1}^q (M_i - m_i + \sigma_{share}) - \prod_{i=1}^q (M_i - m_i)}{\sigma_{share}} = 0 \quad (2)$$

其中, N 为解空间的大小, q 为目标个数, M_i 和 m_i 分别为第 i 个目标在当前解空间的最大值与最小值。显然, σ_{share} 随着解空间的变化也是动态变化的。

Goldberg^[17]指出, MOGA 的适应度赋值方法是一种静态适应度赋值策略, 容易产生较大的选择压力, 导致早熟收敛。MOGA 所采用的适应度共享, 是在目标函数空间的共享, 而不是参数空间的共享, 因此, 它可以保证 Pareto 最优解的多样性, 却无法实现决策者更关心的决策参数多样性。此外, 在求解多目标优化问题时, MOGA 容易遗失部分 Pareto 最优解^[18]。

3.2 小生境 Pareto 遗传算法

NPGA 采用基于 Pareto 占优的锦标赛选择策略, 克服了一般锦标赛选择算子收敛到单一解的缺点; 采用 Goldberg 和 Richardson^[16]提出的适应度共享技术, 来辨识非劣解的优劣性, 使 Pareto 最优解的分布尽可能地均匀。首先, 在每次选择操作前, 从当前种群中随机挑选 t_{dom} 个个体组成比较集; 其次, 取当前种群中的任意两个个体与比较集中所有个体进行比较, 若其中一个非劣, 而另一个劣于比较集中所有个体, 则非劣的个体为优胜者, 若两个都非劣或劣于比较集, 则分别计算它们的小生境数, 小生境数小的个体为优胜者。该算法中, 比较集的大小 t_{dom} 是影响 NPGA 性能的关键因素, t_{dom} 太小, 容易导致进化过程中出现过多的非劣解, 影响算法收敛速度; t_{dom} 太大, 又容易导致早熟收敛。

3.3 基于小生境技术的非劣解排序策略

在 NSGA 中, 同一个小生境内的个体适应度共享, 从而降低该小生境内个体的竞争力, 防止种群在收敛过程中陷入局部最优, 实现种群多样性。首先, 对种群内个体按非劣性排序, 为获得的 Pareto 最优解赋予相同的适应度; 其次, 根据 Goldberg^[16]和 Deb^[19]等提出的共享方法, 按式(3)和式(4)计算出每一个 Pareto 最优解的小生境数, 将该个体原适应度除以小生境数, 就得到它的共享适应度。这样, 处于同一个 Pareto 前沿的非劣解, 由于各自的小生境数不同, 最后的共享适应度也不同。

$$Sh(d_{ij}) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{d_{ij}}{\sigma_{share}}\right)^2, & \text{if } d_{ij} < \sigma_{share} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

其中, d_{ij} 表示个体 i 与个体 j 的距离, σ_{share} 是同一个小生境中个体间的最大允许距离, $Sh(d_{ij})$ 表示距离为 d_{ij} 时的共享函数值。

$$m_i = \sum_{j \in Pop} Sh(d_{ij}) \quad (4)$$

其中, m_i 表示个体 i 的小生境数。

NSGA 主要有 3 个缺点: (1) 高计算复杂度; (2) 非精英策略; (3) 需设置共享参数。按照 NSGA 的非劣解排序方法, 每一个个体都要与其他个体针对每个目标进行比较, 最多需要进行 MN^2 (M 为目标数, N 为种群大小) 次比较。为降低计算复杂度, Deb, Pratap, Agarwal 和 Meyarivan^[12]在 NSGA-II 中提出了一种快速非劣解排序算法, 该算法采用精英策略, 最多只需进行 MN^2 次比较, 大大提高了计算速度。不过, 该算法对系统的存储性能提出了更高的要求。

此外, NSGA-II 提出了拥挤比较算子 $<_n$, 用以解决非劣解排序时等级相同的个体排序问题, 从而避免了共享参数 σ_{share}

的设置。当存在几个等级相同的非劣解时,由式(5)决定它们的偏序优先关系:

$$i <_n j \text{ if } (i_{rank} < j_{rank}) \vee ((i_{rank} = j_{rank}) \wedge (i_{distance} > j_{distance})) \quad (5)$$

其中,rank 为非劣解排序等级,distance 为拥挤距离^[12]。

3.4 Pareto 解存档进化策略

在一些实际的多目标优化领域,模拟退火和禁忌搜索等局部搜索算法,通过加权的形式将多目标问题转化为单目标问题,显示出比遗传算法更优的性能^[20]。因此,PAES 尝试采用局部搜索获得新的候选解,并利用种群信息进行选择。PAES 由三部分组成:候选解发生器,候选解接受函数和非劣解存档机制。候选解发生器类似于简单的随机变异爬山算法,在每次循环中通过随机变异为种群产生一个新的候选解。若新的候选解优于当前解,则再与已存档的非劣解进行比较,优胜劣汰,由此不断更新当前解和非劣解列表。当比较过程中候选解与当前解或非劣解互为非劣时,则通过拥挤算子来决定优胜者(处于拥挤区域的解应被淘汰)。可见,PAES 是一种基于精英策略的多目标进化算法,非劣解存档机制一方面不断地存储和更新当前种群的非劣解,并提供最终的优化结果;另一方面,作为当前种群的非劣前沿,有助于判定当前解和候选解的优劣。此外,拥挤算子提供了一种新的非劣解排序思路,它与适应度共享技术在本质上都是为了保持 Pareto 解的多样性,使其分布地更均匀。

3.5 Pareto 浓度进化算法

SPEA 将进化过程中发现的非劣解存储到外部集,并引入浓度的概念分别对外部非劣解集和当前种群中的个体进行适应度赋值。设当前种群为 P ,外部非劣解集为 P' ,对任一 $i \in P'$, $j \in P$,有:

$$f_i = s_i \quad (6)$$

$$f_j = 1 + \sum_{i: i <_n j} s_i \quad (7)$$

其中, $s_i = \frac{n}{N+1}$ 称之为浓度, n 表示 P 中劣于个体的个体数, N

表示 P 中个体总数。显然 $f_i \in [0, 1)$, $f_j \in [1, N)$ 。在 SPEA 中,适应度小的个体被选择的概率越大。在这种赋值策略下,一个小生境内的个体越多,导致与该小生境关联的非劣解的浓度越高,反过来又使该小生境内的个体适应度更大,因此, SPEA 不必设置距离参数也能达到适应度共享的目的。考虑到外部非劣解集 P' 太大会带来选择压力减小、搜索速度降低以及局部搜索等一系列问题, SPEA 采用平均联接度聚类方法来控制 P' 的规模。

在 SPEA 中,一种极端的情形是非劣解集只包含一个个体,则当前种群中所有个体具有相同的适应度,选择哪一个个体进行复制完全是随机的。显然,这种当前种群中个体的优劣完全取决于外部非劣解集的做法,会导致选择压力降低,算法收敛性差。此外,基于密度评估技术的聚类方法,只用于外部非劣解集中的个体排序,而没有用于当前种群中的个体排序,且容易造成边界解的丢失^[11]。因此, SPEA2 主要作了以下 3 方面改进:(1)在个体的适应度分配策略中,不仅考虑了当前个体优于其他个体的情况,还考虑了劣于其他个体的情况;(2)采用最近相邻个体密度评估技术改进搜索精度;(3)提出一种新的外部非劣解集更新算法,确保边界解得以保留。

SPEA2 按照式(8)重新对浓度进行了定义:

$$s_i = \{ |j| j \in P_r + P_l \wedge i >_j \} \quad (8)$$

其中, i 和 j 均表示当前种群 P_l 和外部非劣解集 \bar{P}_l 中的任一个体, s_i 为个体 i 的浓度。

式(9)定义了个体 i 的原始适应度:

$$r_i = \sum_{j \in P_r + P_l, j >_i} s_j \quad (9)$$

为区分具有相同的原始适应度的个体,式(10)定义了个体的密度:

$$d_i = \frac{1}{\sigma_i + 2} \quad (10)$$

其中, σ_i^k 表示与个体 i 距离最近的 k 个个体与个体 i 的距离之和, k 一般取 $\sqrt{N + \bar{N}}$, N 和 \bar{N} 分别为当前种群和外部非劣解集的大小。

则个体 i 的适应度为:

$$f_i = r_i + d_i \quad (11)$$

SPEA2 外部非劣解集更新算法的主要思想是:设外部非劣解集的大小为 \bar{N} ,每次进化后从当前种群和原非劣解集中选择适应度最小的 \bar{N} 个个体代替原非劣解集中的个体。一种特殊情形是对具有相同适应度的个体进行选择,一般做法是:依次求出与其距离最近的 l ($0 < l < |\bar{P}_{r+l}|$) 个个体的 l 次距离和,保留距离和大的个体,若所有次的距离和相等,则随机选择。

4 算法性能评估研究

随着研究的深入发展,各种各样的多目标进化算法层出不穷。如何评估这些算法的优劣,成为多目标进化算法研究领域的一个新热点^[21]。

4.1 性能评估测度

多目标进化算法的研究目标是使算法种群快速收敛并均匀分布于问题的非劣最优域。为了测试多目标进化算法的有效性和便于比较,定义一个好的算法性能评估测度非常重要。目前,多目标进化算法还没有统一的性能评估准则,研究人员提出了各种各样的性能测度^[3, 10-12, 22-23]。这些性能测度大致可以归纳为收敛性测度和多样性测度两类,常用的收敛性测度有,多样性测度有 Δ 。

(1) 收敛性测度

在多目标进化算法研究领域,人们采用了大量的测试函数或测试问题,这些函数或问题的 Pareto 最优解集往往是已知的。设 H 由 Pareto 最优解集中 500 个在目标空间均匀分布的解组成,算法获得解集为 P , $i \in P, j \in H$, d_{ij} 表示 i 和 j 之间的 Euclidean 距离,则收敛性测度 γ 可由式(12)定义:

$$\gamma = \frac{\sum_{j \in P} \min\{d_{ij} | j \in H\}}{|P|} \quad (12)$$

显然, γ 反映了算法获得解向一个已知 Pareto 最优解集的收敛程度, γ 越小,算法的收敛性能越好。

(2) 多样性测度

如何评价算法获得解在整个 Pareto 前沿的分布情况,也是研究者们感兴趣的。多样性测度 Δ 反映了算法在这方面的性能。

$$\Delta = \frac{d_1 + d_1 \sum_{i=1}^{N-1} |d_i - d_i|}{d_1 + d_1 + (N-1)d} \quad (13)$$

其中, N 为获得解集的大小, d_i 为相邻的两个获得解之间的 Euclidean 距离, \bar{d} 为所有相邻解间 Euclidean 距离的平均值, d_f 和 d_l 为获得解集的边界解与问题极值解之间的 Euclidean 距离。理想分布情况下, d_i 与 \bar{d} 相等, d_f 和 d_l 均为 0, 则 Δ 为 0。

4.2 客观评估条件

生物进化本身就是必然与偶然的矛盾统一。因此, 基于生物进化原理发展而来的多目标进化算法领域, 从来都没有形成一个与其他算法相比绝对占优的算法。现有的多目标进化算法, 本身也构成了一个目标函数为性能评估测度的 Pareto 解集。通过对现有算法性能的比较研究得知^[10-12], 对于不同的测试函数和遗传参数, 被比较算法的优劣性有着很大差别。

(1) 测试函数, 测试函数从是否约束的角度可分为无约束的测试函数和有约束的测试函数, 从 Pareto 前沿的特性可分为凸函数和非凸函数、连续函数和非连续函数、均匀分布函数和不均匀分布函数等。Deb 等人^[12]通过仿真实验发现, 利用不同的算法求解不同类型的测试函数, 所获得的解的优劣性并不是一致的; (2) 遗传参数, 遗传参数是另一个影响算法性能的重要因素。研究人员发现, 对同一个算法, 改变交叉概率、种群规模等遗传参数的设置, 算法获得的解的收敛性和多样性会有很大不同。目前, 人们在比较各种算法的性能时, 都采用统一设置遗传参数的方式。显然, 这种方法难以保证所有的算法都发挥出最佳性能。

此外, 一些算法中涉及到外部非劣解集规模、共享参数、拥挤距离等概念, 如何设置这些参数, 还需要进一步研究。

5 结束语

由于基于 Pareto 最优概念的方法直接处理多个目标, 而没有诸多限制, 如 Pareto 前端非凸等, 基于 Pareto 最优概念的多目标进化算法已成为多目标优化问题研究的主流方向。本文详细介绍了该领域的经典算法, 重点阐述了各种算法在种群快速收敛并均匀分布于问题的非劣最优域上所采取的策略, 并归纳了算法性能评估中需要进一步研究的几个问题。需要进一步指出的是, 已有的研究成果仅仅局限于采用仿真的方式验证算法种群的收敛性和多样性, 严格的理论证明还处于空白状态, 这也是当前乃至将来一段时期内多目标进化算法研究的难点和热点。

参考文献:

- [1] Chankong V, Haimes Y Y. Multiobjective decision making theory and methodology[M]. New York: North-Holland, 1983.
- [2] Hans A E. Multicriteria optimization for highly accurate systems[M]. New York: Plenum Press, 1988.
- [3] Srinivas N, Deb K. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms[J]. Evolutionary Computation, 1995, 2(3): 221-248.
- [4] Rosenberg R S. Simulation of genetic populations with biochemical properties[D]. Michigan: University of Michigan, 1967.
- [5] Schaffer J D. Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms[D]. Tennessee: Vanderbilt University Electrical Engineering, 1984.
- [6] Richardson J T, Palmer M R, Liepins G, et al. Some Guidelines for genetic algorithms with penalty functions[C]//Proc 3rd Int Conf on Genetic Algorithms.[S.l.]: Morgan Kaufmann, 1989.
- [7] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithm[C]//Proceedings of the Fifth International Conference, San Mateo, 1993.
- [8] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization[C]//Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation. Piscataway, New Jersey: IEEE World Congress on Computational Intelligence, 1994: 82-87.
- [9] Knowles J, Corne D. The pareto archived evolution strategy: a new baseline algorithm for multiobjective optimization[C]//Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway, New Jersey: IEEE Service Center, 1999: 98-105.
- [10] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.
- [11] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength pareto evolutionary algorithm[R]. 2001.
- [12] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6: 182-197.
- [13] Shin S Y, Lee I H, Kim D, et al. Multiobjective evolutionary optimization of DNA sequences for reliable DNA computing[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2005, 9(2): 143-158.
- [14] Osman M S, Abo-Sinna M A, Mousa A A. IT-CEMOP: an iterative co-evolutionary algorithm for multiobjective optimization problem with nonlinear constraints[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183: 373-389.
- [15] Deb K, Goldberg D E. An investigation of niche and species formation in genetic function optimization[C]//Proc the Third Int Conf Genetic Algorithms. California: Morgan Kaufmann, 1989.
- [16] Goldberg D E, Richardson J. Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization[C]//Proc of the 2nd Int'l Conf on Genetic Algorithms. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1987: 41-49.
- [17] Goldberg D E, Deb K. A comparison of selection schemes used in genetic algorithms[M]//Rawlins G E. Foundation of Genetic Algorithms.[S.l.]: Morgan Kaufmann, 1991.
- [18] Srinivas N. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms[D]. Kanpur: Indian Institute of Technology, 1994.
- [19] Deb K. Genetic algorithms in multimodal function optimization[D]. Tuscaloosa: University of Alabama, 1989.
- [20] Mann J W, Smith G D. A comparison of heuristics for telecommunications traffic routing[M]//Rayward S V J, Osman I H, Reeves C R, et al. Modern heuristic search methods. New York: John Wiley and Sons Ltd, 1996.
- [21] Laumanns M, Thiele L, Deb K, et al. Combining convergence and diversity in evolutionary multi-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2002, 10(3).
- [22] Deb K. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms[M]. UK: Chichester, 2001.
- [23] Zitzler E. Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: methods and applications[D]. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology (ETH), 1999.