

◎博士论坛◎

分数阶图像去噪变分模型及投影算法

张 军¹, 韦志辉²ZHANG Jun¹, WEI Zhi-hui²

1.南京理工大学 理学院,南京 210094

2.南京理工大学 计算机科学与技术学院,南京 210094

1.School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

2.School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

E-mail: phil_zj@163.com

ZHANG Jun, WEI Zhi-hui. Fractional variational model and projection algorithm for image denoising. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(5): 1-6.

Abstract: It is important to preserve fine scale features such as texture in the process of image denoising. In this paper, a new space of functions of fractional bounded variation is defined. Based on the new space of functions of fractional bounded variation and the negative Sobolev space, a fractional variational model for image denoising and the project algorithm for solving the model are proposed. The convergence of the algorithm has been proved in this paper also. The numerical results show that the fractional variational model are very effective in improving the peak signal to noise ratio of noisy image and preserving more fine scale features in the process of denoising.

Key words: image denoising; fractional derivative; texture; Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)

摘 要: 在图像去噪同时保持图像的纹理等细节是非常重要的。首先利用分数阶导数定义了新的分数阶有界变差函数空间, 然后利用分数阶有界变差空间及负指数 Sobolev 空间, 提出了分数阶变分图像去噪模型, 最后提出了求解分数阶变分模型的投影算法并证明了算法的收敛性。实验结果表明, 分数阶变分模型在提高峰值信噪比和保持图像纹理细节两个方面都非常有效。

关键词: 图像去噪; 分数阶微分; 纹理; 峰值信噪比

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.05.001 **文章编号:** 1002-8331(2009)05-0001-06 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391

1 引言

图像去噪模型及算法的研究, 一直以来都是图像处理领域的重点研究问题之一。目前, 大多数去噪模型都是将带噪声的观测图像 f 分解为两个部分来处理, 即 $f=u+v$, 其中 u 是图像中大尺度的分片光滑的部分, 而 $v=f-u$ 则主要包括噪声以及纹理等小尺度信息。在图像去噪过程中, 如何保持图像中的边缘、纹理等细节信息, 是图像去噪过程中的一个难点。为了在去噪过程中较好地保持图像边缘, 1992 年 Rudin, Osher 和 Fatemi 提出利用 BV 空间(有界变差函数空间)来刻画图像, 并据此提出了著名的 ROF 模型^[1]:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \{F(u) = |u|_{BV} + \frac{\lambda}{2} \|f-u\|^2\} \quad (1)$$

其中 Ω 为图像的紧支撑域, $|u|_{BV} = \int_{\Omega} |\nabla u| = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ 表示

u 的总变分, $BV(\Omega) = \{u \mid |u|_{BV} < +\infty\}$ 为定义在紧支撑域 Ω 上的有界变差函数空间。BV 空间中的函数的最大特点就是允许存在跳跃间断, 因此 ROF 模型可以较好地保持图像的边缘。ROF 模型中等式右端第一项称为正则项, 它在极小化过程中可以起到抑制噪声的作用, 第二项为保真项, 主要作用是在保持去噪图像与原图像的相似性。

虽然用 BV 空间来刻画图像, 有利于保持图像的边缘信息, 但对于图像的纹理的刻画却不够理想。2001 年, Meyer^[2]提出用 BV 空间的共轭空间来刻画纹理信息, 构造了近似于 BV 共轭空间的 G 空间, 并提出在 G 空间中来对 ROF 模型保真项进行改进, 从而兴起了新一轮的函数空间图像建模的研究热潮。由于 G 空间中的范数计算困难, 近年来有许多学者基于 Meyer 的思想, 构造出许多不同的空间来刻画纹理信息, 其中

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863)(the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.2007AA12E142); 国家自然科学基金 (the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60672074); 教育部博士点基金 (the National Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China under Grant No.20060288023)。

作者简介: 张军(1977-), 男, 博士研究生, 讲师, 主要研究方向: 图像建模与算法研究; 韦志辉(1963-), 男, 博士, 教授、博士生导师, 国防科工委“511 工程”青年学术带头人, 研究方向: 图像处理、模式识别、几何多尺度分析。

收稿日期: 2008-10-16 **修回日期:** 2008-11-13

具有代表性的工作是 Osher 等人提出的负指数 Sobolev 空间 H^{-1} 中的 OSV 模型^[3],以及 Linh L 和 Vese L.再次此出上提出的一般负指数 Sobolev 空间 H^{-s} 中推广模型^[4]如下:

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \{F(u) = |u|_{BV} + \frac{\lambda}{2} \|f-u\|_{-s}^2, 0 \leq s \leq 1\} \quad (2)$$

根据该模型使用的函数空间,将式(2)称为 $BV-H^{-s}$ 模型。当 $s=0$ 时,该模型退化为 ROF 模型;当 $s=1$ 时,该模型就退化 OSV 模型。数值试验结果还表明,对于不同的图像选择合适的指数参数 s ,可以达到更好的纹理保持效果。

Meyer 等人的工作都是对 ROF 模型保真项的改进,在模型计算实现,它们的作用实际上是从残差 $v=f-u$ 中提取更多的纹理信息补充回去,从而达到纹理保持的目的。但事实上在 ROF 模型中,真正对图像纹理起到破坏作用的是正则项。从数学性质讲,纹理是具有“弱导数”性质的结构,而 BV 空间是基于梯度定义的,因此对于这种具有“弱导数”性质的结构不能很好地刻画。目前,分数阶导数已被用于图像细节的提取和增强方面^[5],取得了较好的成果,这些工作也表明了分数阶导数能更好地处理纹理等细节信息。

因此,为了更好地保持纹理等细节信息,首先将 BV 空间进行推广,基于分数阶导数提出新的分数阶有界变差函数空间,记为 $BV^\alpha(\Omega)$ 空间。然后分别在 $BV^\alpha(\Omega)$ 空间和负指数 Sobolev 空间 H^{-s} 中建立正则项及保真项模型,从而提出分数阶图像去噪分数阶变分模型。为快速实现模型,在 Chambolle^[6]提出的求解 ROF 模型的快速投影算法的基础上,提出针对本文分数阶变分模型的投影算法以及收敛性分析。最后通过数值试验来比较和分析分数阶变分模型的去噪和纹理保持性能。

2 分数阶有界变差空间构造

在 BV 空间基础上,利用分数阶导数来构造分数阶有界变差空间。分数阶导数可以看作是整数阶导数的推广,但目前分数阶导数的定义并不统一,有许多定义形式。文中主要利用 Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义。

首先定义一般实数意义下的二项式系数:

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)} \quad (3)$$

其中 $\Gamma(a) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0 \\ a^{-1} \Gamma(a+1), a < 0 \end{cases}$ 为伽玛函数, a, b 为实数,且规定当 $b < 0$ 时, $\binom{a}{b} = 0$; 当 a 为整数,而且 $b \geq a+1$ 时, $\binom{a}{b} = 0$ 。

Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义为^[7]

$$D^\alpha f = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x-kh) / h^\alpha, \alpha > 0 \quad (4)$$

特别地,当 $\alpha=1$ 时,式(4)定义的实际上就是通常意义下的一阶导数。由于当 α 固定时,随着 k 的增加广义二项式系数 $\binom{\alpha}{k}$ 非常迅速地趋向于 0,因此当取 $h=1$ 时,式(4)定义的分数阶导数可用下面的有限项(取前 K 项)的分数阶差分来近似表示:

$$\Delta^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x-k) \quad (5)$$

特别地当 $\alpha=1$ 时, $K=2$; 当 $\alpha=2$ 时, $K=3$ 。

对于二维情形,设 $X=R^{N \times N}$, $Y=X \times X$, 定义内积及范数:

$$\langle u, v \rangle_X = (u, v)_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_{i,j} v_{i,j}, \|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle_X}, \forall u, v \in X$$

$$\langle p, q \rangle_Y = \sum_{i,j=1}^N ((p_1)_{i,j} (q_1)_{i,j} + (p_2)_{i,j} (q_2)_{i,j})$$

$$\|p\|_Y = \sqrt{\langle p, p \rangle_Y} \quad \forall p=(p_1, p_2), q=(q_1, q_2) \in Y$$

利用式(5),定义离散意义下的分数阶梯度及分数阶散度如下:

定义 1 对于 $u=(u_{ij})_{i,j=1}^N \in X$, 当 $i, j < 1$ 或 $i, j > N$ 时,记 $u_{ij}=0$, 离散分数阶梯度定义为

$$\nabla^\alpha u := ((\nabla^\alpha u)_{ij})_{i,j=1}^N = ((\Delta_1^\alpha u)_{ij}, (\Delta_2^\alpha u)_{ij})_{i,j=1}^N \quad (6)$$

其中

$$(\Delta_1^\alpha u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k} (-1)^k u(i-k, j) \quad (7)$$

$$(\Delta_2^\alpha u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k} (-1)^k u(i, j-k)$$

对于 $p=(p_1, p_2) \in Y$, 离散分数阶散度定义为

$$\text{div}^\alpha p = ((\text{div}^\alpha p)_{ij})_{i,j=1}^N$$

其中

$$(\text{div}^\alpha p)_{i,j} = (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k} (-1)^k p_1(i+k, j) + (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k} (-1)^k p_2(i, j+k) \quad (8)$$

注 在定义 1 中,特别地当 $\alpha=1$ 时,式(7)定义的就是向前差分,它是一阶导数的离散化形式,而式(6)和(8)则与一般离散意义下的梯度和散度定义形式是一样的。容易证明由定义 1 定义的离散化分数阶梯度(6)和散度(8)满足

$$\langle p, \nabla^\alpha u \rangle_Y = \langle (-1)^\alpha \text{div}^\alpha p, u \rangle_X \quad (9)$$

特别地当 $\alpha=1$ 时,式(9)退化为 $\langle p, \nabla^1 u \rangle_Y = \langle -\text{div}^1 p, u \rangle_X$, 这是一般意义下的梯度和散度所应满足的关系^[6]。由此可见,分数阶梯度和散度是一般意义下的梯度和散度定义形式的推广。

对于 $u \in X$, 离散意义下的总变分(TV, Total Variation)定义为^[8]:

$$J(u) := \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla^1 u)_{i,j}|$$

利用分数阶梯度定义,将上述 u 的离散化总变分推广,定义离散分数阶变分为:

$$J_\alpha(u) := \sum_{1 \leq i, j \leq N} |(\nabla^\alpha u)_{i,j}| \quad (10)$$

其中 $|(\nabla^\alpha u)_{i,j}| = \sqrt{(\Delta_1^\alpha u)_{i,j}^2 + (\Delta_2^\alpha u)_{i,j}^2}$, 特别地,当 $\alpha=1$ 时,式(10)定义的实际上是离散意义下的总变分。 $J_\alpha(u)$ 满足下面结论。

定理 1 对于 $u=(u_{ij})_{i,j=1}^N \in X$, 并当 $i, j < 1$ 或 $i, j > N$ 时,记 $u_{ij}=0$ 。则 $J_\alpha(u)$ 满足

$$J_\alpha(u) = \sup_p \langle p, \nabla^\alpha u \rangle_Y = \sup_p \langle (-1)^\alpha \text{div}^\alpha p, u \rangle_X \quad (11)$$

其中 $p=(p_1, p_2) \in Y$ 且 $|p_{i,j}| = \sqrt{(p_1)_{i,j}^2 + (p_2)_{i,j}^2} \leq 1$ 。

证明 由凸优化理论可知, 式(11)中的最大值应在区域边界取得, 即在 $|p_{i,j}|=1$ 时取得。对于 $\forall p=(p_1, p_2) \neq 0 \in Y$, 记 $\frac{p}{|p|} = [(\frac{p_1}{|p|})_{i,j=1}^N, (\frac{p_2}{|p|})_{i,j=1}^N]$, 则由 $J_\alpha(u)$ 的定义及关系式(9)可知, 要证明式(11), 只须要证明

$$J_\alpha(u) := \sum_{1 \leq i,j \leq N} |(\nabla^\alpha u)_{i,j}| = \sup_{p \in Y, p \neq 0} \langle \frac{p}{|p|}, \nabla^\alpha u \rangle_Y$$

即可。记

$$L(p) = \langle \frac{p}{|p|}, \nabla^\alpha u \rangle_Y = \sum_{1 \leq i,j \leq N} [\frac{(p_1)_{i,j}}{|p_{i,j}|} \cdot (\Delta_1^\alpha u)_{i,j} + \frac{(p_2)_{i,j}}{|p_{i,j}|} \cdot (\Delta_2^\alpha u)_{i,j}]$$

对于任意 $q \in Y$ 和实数 ε , 构造 $g(\varepsilon) = L(p + \varepsilon q)$, 并令 $g'(0) = 0$ 可得

$$\sum_{1 \leq i,j \leq N} \frac{[(p_2)_{i,j}^2 \cdot (\Delta_1^\alpha u)_{i,j} - (p_1)_{i,j} \cdot (p_2)_{i,j} \cdot (\Delta_2^\alpha u)_{i,j}](q_1)_{i,j} + [(p_1)_{i,j}^2 \cdot (\Delta_2^\alpha u)_{i,j} - (p_1)_{i,j} \cdot (p_2)_{i,j} \cdot (\Delta_1^\alpha u)_{i,j}](q_2)_{i,j}}{|p_{i,j}|^3} = 0$$

由 q 的任意性, 可得

$$\begin{cases} (p_2)_{i,j}^2 \cdot (\Delta_1^\alpha u)_{i,j} - (p_1)_{i,j} \cdot (p_2)_{i,j} \cdot (\Delta_2^\alpha u)_{i,j} = 0 \\ (p_1)_{i,j}^2 \cdot (\Delta_2^\alpha u)_{i,j} - (p_1)_{i,j} \cdot (p_2)_{i,j} \cdot (\Delta_1^\alpha u)_{i,j} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

得到解 $(p_1)_{i,j} = (\Delta_1^\alpha u)_{i,j}$, $(p_2)_{i,j} = (\Delta_2^\alpha u)_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 即 $p = \nabla^\alpha u$,

从而 $\langle \frac{\nabla^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|}, \nabla^\alpha u \rangle_Y = \sum_{1 \leq i,j \leq N} |(\nabla^\alpha u)_{i,j}|$, 即式(11)成立, 证毕。

离散意义下的 BV 空间定义为^[6]

$$BV = \{u \in X | J(u) < +\infty\}$$

作为离散意义下的 BV 空间的推广, 定义离散意义下的分数阶有界变差空间如下

定义 2 称 BV_α 为分数阶有界变差空间, 其中

$$BV_\alpha = \{u \in X | J_\alpha(u) < +\infty\} \quad (12)$$

BV_α 中的半范数定义为:

$$|u|_{BV_\alpha} = J_\alpha(u) \quad (13)$$

特别地, 当 $\alpha=1$ 时, 式(12)定义的就是离散意义下的 BV 空间, 即 $BV_1 = BV$, 式(13)就是离散意义下的总变分。

分数阶变差空间即 BV_α 空间是通常意义下的 BV 空间的推广, BV 空间是定义在梯度基础上的, 而 BV_α 空间是定义在更一般的分数阶导数基础上。现有的一些研究已经表明, 分数阶导数比整数阶导数更适合于对于图像纹理等细节信息的处理, 因此下一章中考虑用 BV_α 空间来对图像进行建模, 以更好地处理纹理等细节信息。

3 分数阶变分模型及投影算法

对于大小为 $N \times N$ 的离散观测含噪声图像 $I = (I_{i,j})_{i,j=1}^N$, 仍将图像 I 分解为 $I = u + v$, 其中 $u = (u_{i,j})_{i,j=1}^N$ 表示图像的结构部分, $v = (v_{i,j})_{i,j=1}^N$ 表示图像的噪声及纹理部分。此时, 离散意义下的 ROF 模型可表示为

$$\min_{u \in BV_1} \{F(u) = |u|_{BV_1} + \frac{\lambda}{2} \|I - u\|_{L^2}^2\}$$

将上式中的 BV 空间推广到分数阶有界变差空间 BV_α , 可以建立分数阶变分模型

$$\min_{u \in BV_\alpha} \{E(u) = |u|_{BV_\alpha} + \frac{\lambda}{2} \|I - u\|_{L^2}^2\} \quad (14)$$

根据使用的函数空间, 称分数阶变分模型(14)为 $BV_\alpha - L^2$ 模型。若将式(14)进一步与负指数 Sobolev 空间中的模型(3), 即 $BV - H^{-s}$ 进行偶合, 建立统一的分数阶变分模型如下

$$\min_{u \in BV_\alpha} \{E(u) = |u|_{BV_\alpha} + \frac{\lambda}{2} \|I - u\|_{H^{-s}}^2\}$$

由于式中的 H^{-s} 范数计算比较复杂, 考虑更加易于计算的等价模型。利用正交小波对 $I - u$ 进行 $L+1$ 层正交小波分解, 即

$$I - u = \sum_{l=0}^L (I - u)_l \quad (15)$$

其中 $(I - u)_0$ 为通过第 0 层小波系数重构得到的近似图像, $(I - u)_l$ 则是由第 l 层小波系数重构得到的第 l 层细节图像。Meyer 已经证明, H^{-s} 中有等价范数^[10]:

$$\|I - u\|_{H^{-s}}^2 \sim \sum_{l=0}^L 2^{-2ls} \|(I - u)_l\|_2^2$$

于是, 可得到下面的等价分数阶变分模型

$$\min_{u \in BV_\alpha} \{E(u) = |u|_{BV_\alpha} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=0}^L 2^{-2ls} \|(I - u)_l\|_2^2\} \quad (16)$$

称模型(16)为 $BV_\alpha - H^{-s}$ 模型, 特别地, 当 $\alpha=1, s$ 取不同值时, 可以得到不同的模型:

(1) 当 $\alpha=1, s=0$ 时, 模型(16)就退化为 ROF 模型;

(2) 当 $\alpha=1, s=1$ 时, 模型(16)等价于 OSV 模型;

(3) 当 $\alpha=1, s \in (0, 1)$ 时, 模型(16)等价于 $BV - H^{-s}$ 模型。

对于 ROF 模型的求解, 已经有许多算法, 其中 Chambolle 提出的投影算法^[6]是一种快速有效的算法。在这个算法基础上, 针对分数阶变分模型(16), 提出相应的投影算法。

定义 3^[8] 设 V 为 Banach 空间, 泛函 $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸的, 则点 u 处的次梯度定义为

$$\partial J(u) := \{p \in V^* | J(w) \geq J(u) + \langle p, w - u \rangle, \forall w \in V\}$$

其中 V^* 为 V 的共轭空间。

定义 4^[8] 设泛函 $J: V \rightarrow \mathbb{R}, J^*: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 J 凸共轭, 定义为

$$J^*(v) := \sup_{u \in V} \{\langle u, v \rangle - J(u)\}$$

且有性质:

(1) 设 V 为 Banach 空间, 泛函 $J: V \rightarrow \mathbb{R}$, 则 $J^*: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ 是凸的(无论 J 是否为凸);

(2) 当且仅当 J 为凸的时候, 有 $J^{**} = J$;

(3) $p \in \partial J(u) \Rightarrow u \in \partial J^*(p)$ 。

根据定义 3 及定义 4, 对于分数阶有界变差空间 BV_α 及由式(10)定义的算子 J_α , 可以定义相应的凸共轭 J_α^* 为

$$J_\alpha^*(v) := \sup_{u \in BV_\alpha} \{\langle u, v \rangle_X - J_\alpha(u)\}, v \in X$$

易证明, J_α^* 满足定义 4 中的性质。特别地, 算子 J_α^* 还满足下面性质

定理 2 若记

$$K_\alpha := \{(-1)^\alpha \text{div}^\alpha p : p \in Y, |p_{i,j}| \leq 1, \forall i, j = 1, 2, \dots, N\} \quad (17)$$

则有

$$J_\alpha^*(v) = \begin{cases} 0 & v \in K_\alpha \\ +\infty & v \notin K_\alpha \end{cases} \quad (18)$$

证明 设 $L(u, v) = \langle u, v \rangle_X - J_\alpha(u) = \langle u, v \rangle_X - \sup_{p \in Y, |p_{ij}| \leq 1} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}$, $u >_X$, 则 $J_\alpha^*(v) := \sup_u L(u, v)$.

当 $u=0$ 时, $L(u, v)=0$, 所以 $J_\alpha^*(v) \geq 0$.

(1) 当 $v \in K_\alpha$ 时, $L(u, v) \leq 0$, 从而 $J_\alpha^*(v) = \sup_u L(u, v) \leq 0$, 又

$J_\alpha^*(v) \geq 0$, 因此 $J_\alpha^*(v) = 0$.

(2) 当 $v \notin K_\alpha$ 时, 对任意 $w \in X$, 和实数 ε , 构造

$$g(\varepsilon) = L(u + \varepsilon w, v) = \langle u + \varepsilon w, v \rangle - J_\alpha(u + \varepsilon w)$$

若 $J_\alpha^*(v) < +\infty$, 则 $g(\varepsilon)$ 一定有极值, 令 $g'(0) = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, w \rangle_X - \left\langle \frac{\nabla^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|}, \nabla^\alpha w \right\rangle_Y = \\ &\langle v, w \rangle_X - \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha \left(\frac{\nabla^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right)}, w \rangle_X = \\ &\langle v - \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha \left(\frac{\nabla^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right)}, w \rangle_X \end{aligned}$$

当 $v \notin K_\alpha$ 时, $v - \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha \left(\frac{\nabla^\alpha u}{|\nabla^\alpha u|} \right)} \neq 0$, 而 w 为任意, 因此

$g'(0) = 0$ 无解, 这与 $g(\varepsilon)$ 一定有极值矛盾, 从而 $J_\alpha^*(v) = +\infty$. 即

$$J_\alpha^*(v) = \begin{cases} 0 & v \in K_\alpha \\ +\infty & v \notin K_\alpha \end{cases}$$

证毕.

对于分数阶变分模型(16), 其 Euler-Lagrange 方程为

$$\partial J_\alpha(u) - \lambda \sum_{l=0}^L 2^{-2ls} (I-u)_l = 0$$

从而有

$$u = \partial J_\alpha^* \left(\lambda \sum_{l=0}^L 2^{-2ls} (I-u)_l \right)$$

记 $w = \lambda \sum_{l=0}^L 2^{-2ls} (I-u)_l$, 并设 w 的正交小波分解为 $w = \sum_{l=0}^L w_l$,

由小波分解正交性可得

$$w_l = \lambda 2^{-2ls} (I-u)_l, u = I - \frac{\sum_{l=0}^L 2^{2ls} w_l}{\lambda}$$

从而有

$$\partial J_\alpha^*(w) + \left(\frac{\sum_{l=0}^L 2^{-2ls} w_l}{\lambda} - I \right) = 0$$

它可以看作是

$$\inf_w \{E(w) = J_\alpha^*(w) + \frac{1}{2\lambda} \langle \sum_{l=0}^L (2^{ls} w_l - \lambda 2^{-ls} I_l), \sum_{l=0}^L (2^{ls} w_l - \lambda 2^{-ls} I_l) \rangle_X\} \quad (19)$$

的 Euler-Lagrange 方程. 根据定理 2, 上述问题的极小解 $w \in K_\alpha$, 因此式(19)可以转化为

$$\inf_{w \in K_\alpha} \{G(w) = \langle \sum_{l=0}^L (2^{ls} w_l - \lambda 2^{-ls} I_l), \sum_{l=0}^L (2^{ls} w_l - \lambda 2^{-ls} I_l) \rangle_X\} \quad (20)$$

这样, 通过式(20)求解得到极小解 $w \in K_\alpha$, 就可由 $u = I - \frac{\sum_{l=0}^L 2^{2ls} w_l}{\lambda}$ 得到分数阶变分模型(16)的解. 利用 K_α 的定义, 极小化问题(20)可以进一步转化为

$$\min_p \left\{ \langle \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p})_l - \lambda 2^{ls} I_l \rangle_X : p \in Y, |p_{ij}| \leq 1, i, j = 1, 2, \dots, N \right\} \quad (21)$$

由 Lagrange 乘子法求解式(21), 可得

$$\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j} + \alpha_{i,j} p_{i,j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\alpha_{i,j} \geq 0$ 为 Lagrange 乘子. 上式要求对任意 $\alpha_{i,j} \geq 0$ 且 $|p_{i,j}| = 1$, 或者 $\alpha_{i,j} = 0$ 且 $|p_{i,j}| < 1$ 都成立. 显然, 可取

$$\alpha_{i,j} = |\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j}|$$

从而得到

$$\begin{aligned} &\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j} + \\ &|\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j}| \cdot p_{i,j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (22) \end{aligned}$$

用不动点迭代法求解式(22):

取步长 $\tau > 0$, 给定初值 $p^{(0)} = 0 \in Y$, 构造隐式迭代格式:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n+1)} &= p_{i,j}^{(n)} - \tau \left[\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j} + \right. \\ &\left. |\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j}| \cdot p_{i,j}^{(n+1)} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

即

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{p_{i,j}^{(n)} - \tau \langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j}}{1 + \tau |\langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}} \right)_l - \lambda I \rangle_{i,j}|}, i, j = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

通过迭代格式可得到近似去噪图像 $u^{(n)} = I -$

$$\frac{\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}_l}{\lambda}.$$

对于这个迭代格式, 有如下收敛性定理

定理 3 当 $\tau \leq (2^{L_s} \cdot 2K \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k})^{-1}$ 时, 迭代格式(24)收敛.

证明 记 $p \frac{(n+1)}{\tau} - p^{(n)} = \eta \in Y$,

$$\begin{aligned} &\| \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n+1)}})_l - \lambda 2^{-ls} I_l \|^2 = \\ &\| \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}})_l - \lambda 2^{-ls} I_l + \tau \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha \eta})_l \|^2 \leq \\ &\| \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}})_l - \lambda 2^{-ls} I_l \|^2 + 2\tau \langle \nabla^\alpha \left(\sum_{l=0}^L 2^{2ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}} \right)_l - \lambda I, \eta \rangle_Y + \tau^2 \|\eta\|_Y^2 = \\ &\| \sum_{l=0}^L (2^{ls} \overline{(-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)}})_l - \lambda 2^{-ls} I_l \|^2 + \end{aligned}$$

$$\tau \cdot \sum_{i,j=1}^M [2(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} \cdot \eta_{ij} + \tau \kappa^2 |\eta_{ij}|^2]$$

其中 $\kappa = \sup_{p \in Y, p \neq 0} \frac{\|\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}_l\|_X}{\|p\|_Y}$ 。若记 $\rho_{i,j} = (\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \times$

$\overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}$, 由式(24)可知, $(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \times$

$\overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} + \rho_{i,j} = -\eta_{i,j}$, 从而有

$$2(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} \cdot \eta_{i,j} + \tau \kappa^2 |\eta_{ij}|^2 =$$

$$(\tau \kappa^2 - 1) |\eta_{ij}|^2 + |\eta_{ij}|^2 + 2 \cdot (\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} \cdot \eta_{i,j} =$$

$$(\tau \kappa^2 - 1) |\eta_{ij}|^2 + [(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} + \rho_{i,j}] \cdot$$

$$[(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} + \rho_{i,j}] -$$

$$2 \cdot [(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j}] \cdot$$

$$[(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j} + \rho_{i,j}] =$$

$$(\tau \kappa^2 - 1) |\eta_{ij}|^2 + [(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda I))_{i,j}]^2 \cdot (|p_{i,j}^{(n+1)}|)^2 - 1)$$

由于 $|p_{i,j}^{(n+1)}| \leq 1$, 若 $\tau \kappa^2 - 1 \leq 0$, 则 $2(\nabla^\alpha (\sum_{l \geq 0} 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l -$

$\lambda I))_{i,j} \cdot \eta_{i,j} + \tau \kappa^2 |\eta_{ij}| \leq 0$, 从而有

$$0 \leq \|\sum_{l=0}^L 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n+1)})}_l - \lambda 2^{-2l} I_l\|_X^2 \leq$$

$$\|\sum_{l=0}^L (2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l - \lambda 2^{-2l} I_l)\|_X^2$$

由单调有界准则可知, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{l=0}^L (2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p^{(n)})}_l -$

$\lambda 2^{-2l} I_l)\|_X^2$ 必定存在, 即存在 $p \in Y$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)} = p$, 从而迭代格式(24)是收敛的。下面证明 $\tau \kappa^2 - 1 \leq 0$ 。

对于 $\forall p = (p_1, p_2) \in Y$, 且 $p \neq 0$, 有

$$\|\sum_{l=0}^L 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}_l\|_X^2 =$$

$$\sum_{l=0}^L 2^{2l} \|\overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}_l\|_X^2 \leq 2^{2L} \|\overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}\|_X^2 =$$

$$2^{2L} \sum_{i,j=1}^M [(\sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} (p_1(i+k, j) + p_2(i, j+k)))^2] \leq$$

$$2^{2L} \sum_{i,j=1}^M [(\sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k})^2 \cdot \sum_{k=0}^{K-1} (p_1(i+k, j) + p_2(i, j+k))^2] \leq$$

$$2^{2L} \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k}^2 \cdot \sum_{i,j=1}^M \sum_{k=0}^{K-1} 2(p_1(i+k, j)^2 + p_2(i, j+k)^2) \leq$$

$$2^{2L} \cdot 2K \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k}^2 \cdot \sum_{i,j=1}^M (p_1(i, j)^2 + p_2(i, j)^2) =$$

$$2^{2L} \cdot 2K \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k}^2 \cdot \|p\|_Y^2$$

$$\text{从而 } \kappa = \sup_{p \in Y, p \neq 0} \frac{\|\sum_{l=0}^L 2^{2l} \overline{((-1)^\alpha \operatorname{div}^\alpha p}_l\|_X}{\|p\|_Y} \leq \sqrt{2^{2L} \cdot 2K \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k}^2}。$$

要使得 $\tau \kappa^2 - 1 \leq 0$, 即 $\tau \leq \frac{1}{\kappa^2}$, 只需 $\tau \leq (2^{2L} \cdot 2K \sum_{k=0}^{K-1} \binom{\alpha}{k}^2)^{-1}$ 即可, 证毕。

注 当 $\alpha=1, s=0$ 时, 模型(16)退化为 ROF 模型, 此 $K=2$ 时, 由定理 3, 当 $\tau \leq \frac{1}{8}$ 时, 相应迭代格式(24)收敛, 这个结论与 Chambolle 在[6]中得到的结论完全一致。

通过式(24)迭代求解, 就可得到近似去噪图像。对于图像去噪问题, 峰值信噪比是衡量图像去噪效果的重要量化指标, 以去噪图像峰值信噪比达到最大作为迭代终止条件。这里的峰值信噪比定义为:

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{\max_{0 \leq i,j \leq M-1} |I_{i,j}|^2}{\frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (I_{i,j} - u_{i,j})^2}$$

4 数值实验及比较

实验 1: 对大小为 256×256 的含有纹理的简单图像, 加上方差为 $\sigma=20$ 的高斯白噪声(如图 1), 采用我们的算法, 选取不同的参数进行去噪处理, 并从纹理保持及峰值信噪比提高两方面进行对比。

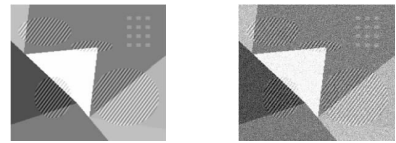


图 1 原图像及带方差为 $\sigma=20$ 的高斯白噪声的噪声图像

首先, 在 $BV_\alpha - H^s$ 模型(16)中, 取 $\alpha=1, s \in [0, 1]$, 此时得到的 $BV_1 - H^s$ 模型等价于[4]中所提出的 $BV - H^s$ 模型(3)。图 2 给出了该模型分别取 $s=0, 0.3, 0.5, 0.8, 1$ 时得到的去噪图像 u 及残差图像 $v=I-u+100$ (为了更清楚地显示差别, 给残差图像增加了亮度)。由于当 $\alpha=1$ 时, $BV_\alpha - H^s$ 模型(16)的正则项就是总变分, 此时相对于 ROF 模型而言, 只改变了保真项, 特别地 $\alpha=1, s=0$ 时, $BV_\alpha - H^s$ 模型就是 ROF 模型, 因此图 2 中(a)图显示的就是 ROF 模型的去噪图像及残差图像。表 1 则给出了图 2 中去噪图像的峰值信噪比。

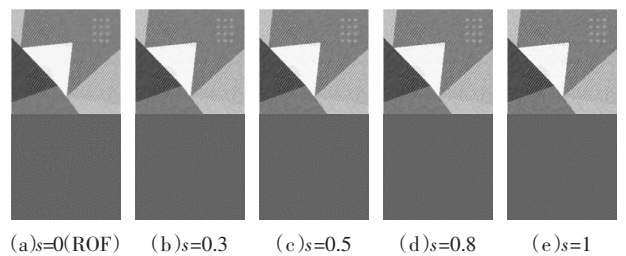


图 2 $BV_1 - H^s$ 模型不同参数去噪及残差图像比较

表 1 $BV_1 - H^s$ 模型不同参数时的去噪图像峰值信噪比的比较

参数	噪声图像	$s=0$ (ROF)	$s=0.3$	$s=0.5$	$s=0.8$	$s=1$
PSNR	22.401 2	28.031 6	28.463 9	28.637 2	28.731 9	28.724 5

比较图 2 中的残差图像,可以看到当取 $0 < s \leq 1$ 时,残差图像中所含的纹理比 ROF 模型的残差图像所包含纹理要少一些,说明 BV_1-H^{-s} 模型在纹理保持方面比 ROF 模型好,而且 s 越大,纹理保持效果越好。表 1 数据表明, BV_1-H^{-s} 模型在峰值信噪比方面比 ROF 模型有明显改善,随着 s 的增加,峰值信噪比变化是先上升再降低的。在这组实验中,综合考虑纹理保持和峰值信噪比提高,取 $s=0.8$ 是最佳的。

BV_1-H^{-s} 模型是对 ROF 模型的保真项进行了改进,与它不同的是,提出的分数阶变分模型 $BV_\alpha-L^2$ 模型(14)则只改变了 ROF 模型的正则项。下面比较 $BV_\alpha-L^2$ 模型的去噪及纹理保持效果。图 3 和表 2 分别给出了 $BV_\alpha-L^2$ 模型在不同 α 取值时的去噪、残差图像及相应的峰值信噪比的比较。

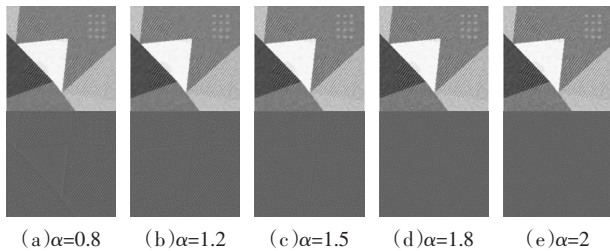


图 3 $BV_\alpha-L^2$ 模型不同参数去噪及残差图像比较

表 2 $BV_\alpha-L^2$ 模型不同参数时的去噪图像峰值信噪比的比较

参数	$\alpha=0.8$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.5$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2$
PSNR	27.339 0	28.202 7	28.542 8	28.655 9	28.640 2

由于当 $\alpha=1$ 时, $BV_\alpha-L^2$ 模型就是 ROF 模型,其去噪、残差图像以及峰值信噪比见图 2 及表 2 中相应的结果。通过对图 3 及表 2 结果进行比较,可以看到随着 α 的增加,纹理保持效果越好,峰值信噪比变化也是先增大再减小。与 BV_1-H^{-s} 模型进行比较,此时 $BV_\alpha-L^2$ 模型的纹理保持及峰值信噪比提高方面都略差。但与 ROF 模型进行比较,当 $\alpha < 1$ 时,此时的纹理保持及峰值信噪比都不如 ROF 模型,而当 $1 < \alpha < 2$ 时, $BV_\alpha-L^2$ 模型的纹理保持及峰值信噪比相对于 ROF 模型都要好。

实验 2: 对于一幅 256×256 的含有丰富纹理的自然图像 (Barbara 头像),加上方差为 $\sigma=20$ 的高斯白噪声(如图 4),同样采用我们的算法,选取不同的参数进行去噪处理。



图 4 Barbara 头像及带方差为 $\sigma=20$ 的高斯白噪声的噪声图像

首先取 $\alpha=1, s \in [0, 1]$,来比较 BV_1-H^{-s} 模型在峰值信噪比改善及纹理保持方面的效果。图 5 给出了去噪及残差图像,而表 3 则给出了相应的去噪图像的峰值信噪比。

图 5 及表 3 结果显示, BV_1-H^{-s} 模型在保持纹理及峰值信噪比方面比 ROF 模型要好,而且随着 s 的增大,纹理保持效果

越好,峰值信噪比变化是先增加后降低,综合纹理保持及信噪比改善,此时 $s=0.3$ 是最好的。但和实验 1 中的相应结果比较,对于纹理丰富的自然图像而言, BV_1-H^{-s} 模型在峰值信噪比提高幅度上大大降低。实验还表明,当 $s=0.8$ 和 $s=1$ 的时候,虽然 BV_1-H^{-s} 模型的纹理保持效果很好,但去噪图像峰值信噪比 ROF 模型还要差。由此可以看到,对于纹理丰富的自然图像, BV_1-H^{-s} 模型或者[4]中的 $BV-H^{-s}$ 模型的局限性是比较大的。

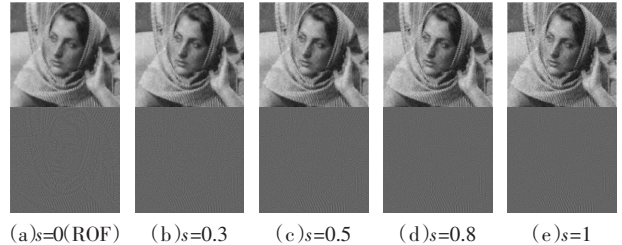


图 5 BV_1-H^{-s} 模型不同参数 Barbara 头像去噪及残差图像比较

表 3 BV_1-H^{-s} 模型不同参数时的 Barbara 头像去噪图像峰值信噪比的比较

参数	噪声图像	$s=0$ (ROF)	$s=0.3$	$s=0.5$	$s=0.8$	$s=1$
PSNR	22.168 9	27.488 8	27.566 5	27.498 8	27.297 6	27.137 2

下面比较分数阶变分模型 $BV_\alpha-L^2$ 模型的效果。图 6 和表 4 分别给出了 $BV_\alpha-L^2$ 在不同 α 取值时的去噪、残差图像及相应的峰值信噪比。



图 6 $BV_\alpha-L^2$ 模型不同参数 Barbara 去噪及残差图像比较

表 4 $BV_\alpha-L^2$ 模型不同参数时的 Barbara 去噪图像峰值信噪比的比较

参数	$\alpha=0.8$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.5$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2$
PSNR	27.199 6	27.618 8	27.700 5	27.675 2	27.616 3

从图 6 及表 4 中的比较中可以看到,对于相对比较复杂自然图像而言,分数阶变分模型 $BV_\alpha-L^2$ 模型无论在纹理保持还是峰值信噪比改善方面,都比 ROF 模型有明显的改善;与 $BV-H^{-s}$ 模型相比较,两者在纹理保持效果上差不多,但在峰值信噪比的改善方面, $BV_\alpha-L^2$ 模型要好得多。

综合上面两个实验结果可以看到,提出的分数阶变分模型 $BV_\alpha-L^2$ 模型当 $1 < \alpha < 2$ 时在纹理保持和峰值信噪比提高方面都明显优于 ROF 模型,与[4]中提出的 $BV-H^{-s}$ 模型相比较, $BV_\alpha-L^2$ 模型在处理相对复杂的自然图像的时候,虽然两者在纹理保持方面效果差别不大,但在峰值信噪比提高方面, $BV_\alpha-L^2$ 模型具有更好的效果。