二值命题逻辑中基于条件真度的近似推理

王廷明
WANG Ting-ming

青岛大学，山东 青岛 266071
Qingdao University，Qingdao，Shandong 266071，China
E-mail：wangtm@qingdaonews.com

WANG Ting-ming.Approximate reasoning based on conditional truth degree of formulas in classical propositional logic. Computer Engineering and Applications，2009，45（9）：51-52.

Abstract： This paper proposes the truth degree expression of the pseudo-metric in two-valued propositional logic，which are based on the truth degree.From the process of approximate reasoning，the equivalence of not greater than ε-value in two kinds of errors has also been proved.Meanwhile，using the finite theory，discuss the principal properties of the error's conclusions which are not greater than ε under the Boolean calculation.
Key words： classical propositional logic；truth degree；conditional truth degree；finite theory；pseudo-metric；approximate reasoning

摘　要：以公式真度为基础，给出了二值命题逻辑中基于条件真度的逻辑度量的真度表示式，提出了两类在信息 Γ 下的误差不大于 ε 结论模式，证明了两类结论模式的等价性，并讨论了基于条件真度和真度的近似推理及其关系问题。
关键词：二值命题逻辑；真度；条件真度；有限理论；伪距离；近似推理
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2009.09.014　**文章编号：**1002-8331（2009）09-0051-02　**文献标识码：**A　**中图分类号：**O141.3

1　引言

自上个世纪 70 年代由 Pavelka 在格值命题逻辑的框架下提出了全面程度化的逻辑理论[1]以来，基于真度的多种逻辑系统的程度化研究正在广泛开展[2-6]。在二值命题逻辑中，文[2,4-5]提出了以数值计算为主要特征的命题公式的真度概念和基于命题公式相似度表示的伪距离概念，从而为二值命题逻辑的程度化研究和近似推理理论构建了理论框架。文[7]基于条件概率的思想，利用真度在二值命题逻辑中引入了条件真度的概念，刻画了公式在信息 Γ 下的真确度，即公式的条件真度，初步讨论了命题公式近似推理问题。本文以公式真度为基础，给出了二值命题逻辑中基于条件真度的逻辑度量的真度表示式，提出了两类在信息 Γ 下的误差不大于 ε 结论模式，利用逻辑度量的真度表示式证明了两类结论模式的等价性，并讨论了基于条件真度和真度的近似推理及其关系问题。

2　公式的真度和条件真度

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 n 个互异的命题变元，$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，$F(S)$ 表示 S 上的命题公式全体。

定义 1[2-3] 设 $A\in F(S)$，$\bar{A}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是 A 诱导的 Boole 函数。称 $\tau(A)=\frac{1}{2^n}\left|\bar{A}^{-1}(1)\right|$ 为 A 的真度。

设 $A\in F(S)$，则 $\bar{A}^{-1}(1)$ 为公式 A 的成真赋值的集合，记 $T(A)=\bar{A}^{-1}(1)$，则 $T(A)$ 为 $\{0,1\}^n$ 的一个子集，从而公式 A 的真度可记为 $\tau(A)=\frac{1}{2^n}|T(A)|$。对公式 $A,B\in F(S)$，显然有 $T(A\vee B)=T(A)\cup T(B)$，$T(A\wedge B)=T(A)\cap T(B)$。设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 为 $F(S)$ 中的有限理论，记 $D(\Gamma)$ 为理论 Γ 的结论集，令 $C_\Gamma=A_1\wedge\cdots\wedge A_m$，$T(\Gamma)=T(A_1)\cap\cdots\cap T(A_m)$。

定义 2[2] 设 $A,B\in F(S)$，称 $\xi(A,B)=\tau((A\to B)\wedge(B\to A))$ 为公式 A,B 的相似度。设 $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)$，则 ρ 是 $F(S)$ 上的伪距离。

引理 1 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$，$A\in F(S)$。则 A 是理论 Γ 的结论当且仅当 $T(\Gamma)\subseteq T(A)$。

引理 2 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$，$A\in F(S)$。则 $\inf\{\rho(A,B)|B\in D(\Gamma)\}=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)$。

证明　$\forall B\in D(\Gamma)$，由引理 1 可设 $T(B)=T(\Gamma)\cup T_1$，其中 $T_1\subseteq U_n-T(\Gamma)$。对 $A\in F(S)$，则 $T(A)=[T(\Gamma)\cap T(A)]\cup T_2$，其中 $T_2=T(A)-T(\Gamma)$。则 $\rho(A,B)=\tau(A\vee B)-\tau(A\wedge B)=\frac{1}{2^n}[|T(\Gamma)|-|T(\Gamma)\cap T(A)|+|T_1\oplus T_2|]$。

取 B'，令 $T(B')=T(\Gamma)\cup T_2$，则 $B'\in D(\Gamma)$，且 $\rho(A,B')=\frac{1}{2^n}[|T(\Gamma)|-|T(\Gamma)\cap T(A)|]=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)$，故 $\inf\{\rho(A,B)|B\in D(\Gamma)\}=\rho(A,B')=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)$，结论成立。

定义 3 设 $\Gamma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$。称 $\rho(A,D(\Gamma))=\inf\{\rho(A,B)|B\in D(\Gamma)\}$ 为 A 到 $D(\Gamma)$ 的伪距离。若 $\rho(A,D(\Gamma))\leqslant\varepsilon$，称 A 是理论 Γ 的误差不大于 ε 的结论，记为 $A\in D_\varepsilon(\Gamma)$。

作者简介：王廷明（1963-），男，副教授，经典逻辑方向。
收稿日期：2008-02-18　**修回日期：**2008-05-22

定义 4[7] 设 $A\in F(S)$，$\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$为 $F(S)$中的有限理论，令 $\tau(C_\Gamma)>0$。称 $\tau(A|\Gamma)=\dfrac{\tau(C_\Gamma\wedge A)}{\tau(C_\Gamma)}$为公式 A 在信息 Γ 下的条件真度。则$\rho_\Gamma(A,B)=1-\tau((A\to B)\wedge(B\to A)|\Gamma)$是 $F(S)$上的伪距离。

由真度运算以及伪距离的真度表示可得公式在信息 Γ 下的伪距离与公式到结论集伪距离的关系。

引理 3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$，$A,B\in F(S)$。则

$$\rho_\Gamma(A,B)=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\rho(A,D(\Gamma\cup\{B\}))+\rho(B,D(\Gamma\cup\{A\}))]$$

3 基于条件真度逻辑度量的真度表示式

为了讨论在信息 Γ 下的近似推理问题，先给出基于条件真度的相关逻辑度量的真度表示式。

定理 1 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论。则对 $A\in F(S)$，有

(1)$\inf\{\rho_\Gamma(A,B)|B\in D(\Sigma)\}=\dfrac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge A)]$。

(2)$\sup\{\tau(B\to A|\Gamma)|B\in D(\Sigma)\}=1-\dfrac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge A)]$。

证明 (1)对 Γ,Σ 和 A，构造集合 $T_0=T(\Gamma)\cap T(\Sigma)\cap T(A)$，$T_1=[T(\Gamma)\cap T(A)]-T_0$，$T_2=[T(\Sigma)\cap T(A)]-T_0$，$T_3=[T(\Gamma)\cap T(\Sigma)]-T_0$，$T_\Gamma=T(\Gamma)-[T_0\cup T_1\cup T_3]$，$T_\Sigma=T(\Sigma)-[T_0\cup T_2\cup T_3]$，$T_A=T(A)-[T_0\cup T_1\cup T_2]$，$S=\{0,1\}^n-[T(\Gamma)\cup T(\Sigma)\cup T(A)]$。则$\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_\Gamma,T_\Sigma,T_A,S\}$构成集合$\{0,1\}^n$ 的一个划分。$\forall B\in D(\Sigma)$，则由引理 1 得 $T(\Sigma)\subseteq T(B)$。令 $S_1=T(B)\cap T_A$，$S_2=T(B)\cap T_1$，$S_3=T(B)\cap T_\Gamma$，$S_4=T(B)\cap S$。则 $T(B)=T(B)\cap\{0,1\}^n=T(\Sigma)\cup S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$。计算集合的阶得：

$$|T(\Gamma)\cap T(A)|+|T(\Gamma)\cap T(B)|-2|T(\Gamma)\cap T(A)\cap T(B)|=|T_1|+|T_3|+|S_3|-|S_2|$$

取 B'，令 $T(B')=T(\Sigma)\cup S'_1\cup S'_2\cup S'_3\cup S'_4$，其中 $S'_2=T_1$，$S'=\phi$，则 $B'\in D(\Sigma)$，且由

$$|T_3|=|[T(\Gamma)\cap T(\Sigma)]-[T(\Gamma)\cap T(\Sigma)\cap T(A)]|=|T(\Gamma)\cap T(\Sigma)|-|T(\Gamma)\cap T(\Sigma)\cap T(A)|$$

以及引理 3 得

$$\inf\{\rho_\Gamma(A,B)|B\in D(\Sigma)\}=\rho_\Gamma(A,B')=\frac{1}{|T(\Gamma)|}[|T(\Gamma)\cap T(\Sigma)|-|T(\Gamma)\cap T(\Sigma)\cap T(A)|]=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge A)]$$

(2)计算得$|T(B)\cap[T(A)\cup T(\Gamma)]|-|T(A)\cap T(B)|=|T_3|+|S_3|$。故由引理 3 得

$$\tau(B\to A|\Gamma)=1-\frac{1}{|T(\Gamma)|}[|T(B)\cap[T(A)\cup T(\Gamma)]|-|T(A)\cap T(B)|]=1-\frac{1}{|T(\Gamma)|}[|T_3|+|S_3|]$$

取 B''，令 $T(B'')=T(\Sigma)\cup S''_1\cup S''_2\cup S''_3\cup S''_4$，其中 $S''_3=\phi$，则 $B'\in D(\Sigma)$，且

$$\sup\{\tau(B\to A|\Gamma)|B\in D(\Sigma)\}=\tau(B''\to A|\Gamma)=1-\frac{|T_3|}{|T(\Gamma)|}=1-\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge A)]$$

故结论成立。

定义 5 设 $\Gamma,\Sigma\subset F(S)$，$A\in F(S)$。称 $\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))=\inf\{\rho_\Gamma(A,B)|B\in D(\Sigma)\}$为在信息 Γ 下 A 到 $D(\Sigma)$的伪距离。

利用定理 1 给出的伪距离的真度表示式可以得到在信息 Γ 下伪距离的下列性质。

推论 1 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论。则对 $A,B\in F(S)$，有

(1)$\rho_\Gamma(A\vee B,D(\Sigma))=\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))+\rho_\Gamma(B,D(\Sigma))-\rho_\Gamma(A\wedge B,D(\Sigma))$。

(2)$\rho_\Gamma(A\to B,D(\Sigma))=\rho_\Gamma(B,D(\Sigma\cup\{A\}))$。

(3)$\rho_\Gamma(\neg A,D(\Sigma))=1-\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))$。

推论 2 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论，$A\in F(S)$。则

$$\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\rho(A,D(\Gamma\cup\Sigma))$$

4 基于条件真度的近似推理

定义 6 设 $\Gamma,\Sigma\subset F(S)$，$A\in F(S)$，$\varepsilon>0$。若

(1)$\inf\{\rho_\Gamma(A,B)|B\in D(\Sigma)\}\leqslant\varepsilon$，称 A 是信息 Γ 下的 Ⅰ-型误差不大于 ε 的结论，记为 $A\in D^{\mathrm{I}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

(2)$1-\sup\{\tau(B\to A|\Gamma)|B\in D(\Sigma)\}\leqslant\varepsilon$，称 A 是信息 Γ 下 Σ 的Ⅱ-型误差不大于 ε 的结论，记为 $A\in D^{\mathrm{II}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

定理 2 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论，$\varepsilon>0$。则 $D^{\mathrm{I}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)=D^{\mathrm{II}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

证明 由定理 1 得

$$1-\sup\{\tau(B\to A|\Gamma)|B\in D(\Sigma)\}=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge A)]=\inf\{\rho_\Gamma(A,B)|B\in D(\Sigma)\}$$

故 $A\in D^{\mathrm{I}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$与 $A\in D^{\mathrm{II}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$等价，即 $D^{\mathrm{I}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)=D^{\mathrm{II}}_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

由定理 2 知 A 是信息 Γ 下的理论 Σ 的Ⅰ,Ⅱ-型误差不大于 ε 的结论是等价的，这样可以将 A 是信息 Γ 下的理论 Σ 的Ⅰ,Ⅱ-型误差不大于 ε 的结论通称为 A 是信息 Γ 下的理论 Σ 的误差不大于 ε 的结论，并记为 $A\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。关于信息 Γ 下的理论 Σ 的误差不大于 ε 结论的充要条件以及在基本逻辑运算下的基本性质有下列结论。

定理 3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论，$A\in F(S)$。则 $A\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$ 的充要条件是$|T(\Gamma\cup\Sigma)|-|T(\Gamma\cup\Sigma\cup\{A\})|\leqslant\varepsilon|T(\Gamma)|$。

定理 4 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论，$A\in F(S)$。若 $B\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$，则 $A\to B\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

证明 由 $B\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$，则$\rho_\Gamma(B,D(\Sigma))\leqslant\varepsilon$。由定理 1 得

$$\rho_\Gamma(A\to B,D(\Sigma))=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau((C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge B)\vee(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge\neg A))]\leqslant\rho_\Gamma(B,D(\Sigma))\leqslant\varepsilon$$

故 $A\to B\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

定理 5 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}$均为 $F(S)$中的有限理论，$A,B\in F(S)$且 $A\in D_{\Gamma,\varepsilon_1}(\Sigma)$，$B\in D_{\Gamma,\varepsilon_2}(\Sigma)$。令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则 $A\vee B\in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$。

证明 由定理 1 得

$$\rho_\Gamma(A\vee B,D(\Sigma))=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}[\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma)-\tau(C_\Gamma\wedge C_\Sigma\wedge(A\vee B))]=$$

(下转 66 页)