二值命题逻辑理论的结论类型和分类

王廷明
WANG Ting-ming

青岛大学 师范学院,山东 青岛 266071
Department Mathematics,College of Teachers,Qingdao University,Qingdao,Shandong 266071,China
E-mail:wangtm@qingdaonews.com

WANG Ting-ming.Type of conclusions and classification of theories in two-valued propositional logic.Computer Engineering and Applications,2009,45(3):64-65.

Abstract: Based on the notion of truth degrees of formulas,type of conclusions deduced by finite theories in two-valued propositional logic is investigated.Classification of theories based on the truth degrees of formulas,respectively,based on logical equivalence is studied.Especially,a theorem about classification is obtained and the similarity relation between conclusions deduced by one theory is given.
Key words: propositional formula;principal disjunctive normal form;truth degree;similarity degree

摘 要:以公式真度为基础,研究了二值命题逻辑系统中有限理论逻辑推出的结论类型和分别基于公式真度以及逻辑等价的分类问题,给出了分类定理以及同一理论结论的相似度的一个下界。
关键词:命题公式;主析取范式;真度;相似度
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.03.018 **文章编号:**1002-8331(2009)03-0064-02 **文献标识码:**A **中图分类号:**O141.3

1 引言

逻辑推理是二值命题逻辑研究的一个基本问题,其理论和方法在相关学科中有着重要的应用。根据推理规则,一个理论一般可以逻辑推出多个结论,这些结论之间有何关系,如何区分同一理论逻辑推出的结论类型,是深入研究理论结构以及逻辑推理的重要问题。在经典的二值命题逻辑系统中,根据公式在各种赋值下的取值情况,可将公式分类为重言式(真度为1)、矛盾式(真度为0)和可满足式。文献[1]利用势为2的均匀概率空间的无穷乘积在经典二值命题逻辑系统中引入命题公式的真度概念,从而把原来只就重言式和矛盾式给出真度的情形推广为每个公式都有真度的情形。文献[2-3]通过由公式诱导的Boole函数给出了公式的真度概念。公式的真度是公式真确度的一种数值表征,也是公式为真程度化的一个数量特征。以公式真度概念为基础,研究二值命题逻辑系统中有限理论逻辑推出的结论类型和分别基于真度以及逻辑等价的分类问题,给出了分类定理并讨论了理论结论的相似度。

2 公式的真度和基本真度等式

设$p_1,p_2,\cdots,p_n$为n个互异的命题变元,$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$,$F(S)$表示S上的命题公式全体。令$m_i=P_1^{e_1}\wedge P_2^{e_2}\wedge\cdots\wedge P_n^{e_n}$,其中$e_k=0$或1,且$P_k^0=\neg P_k$,$P_k^1=P_k$,$k=1,2,\cdots,n$。则称$i=\sum\limits_{k=1}^{n}e_k2^{n-k}$为极小项$m_i$的下标。设$A\in F(S)$,$T(A)$表示公式$A$的主析取范式中极小项的下标集合,则$T(A)$为为$S$上极小项的下标全集$U_n=\{0,1,\cdots,2^n-1\}$的一个子集,且对公式$A,B\in F(S)$,有$T(A\vee B)=T(A)\cup T(B)$,$T(A\wedge B)=T(A)\cap T(B)$。

定义1[2-3] 设$A\in F(S)$,$\overline{A}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$是$A$诱导的Boole函数。称$\tau(A)=\dfrac{1}{2^n}\left|\overline{A}^{-1}(1)\right|$为$A$的真度。

由于$|T(A)|$为公式A的主析取范式中极小项的项数,也是A的成真赋值的个数,即$\left|\overline{A}^{-1}(1)\right|=|T(A)|$。从而$\tau(A)=\dfrac{1}{2^n}|T(A)|$为$A$的真度。关于公式在基本逻辑运算下的真度关系有下列结果。

引理1[1] 设$A,B\in F(S)$。则有下列基本真度等式:

(1)$\tau(\neg A)=1-\tau(A)$。

(2)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$。

引理2 设$A,B\in F(S)$。则$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1=\tau(B)-\tau(A\vee B)+1$。

证明 由$(A\to B)\vee A$是重言式,故由引理1得:$1=\tau((A\to B)\vee A)=\tau(A\to B)+\tau(A)-\tau((A\to B)\wedge A)=\tau((A\to B)+\tau(A)-\tau(A\wedge B)$,移项得$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$。同理可得$\tau(A\to B)=\tau(B)-\tau(A\vee B)+1$。故结论成立。

定义2[4] 设$\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$B\in F(S)$。若公式$(A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\to B$为重言式,称$B$是理论$\Gamma$的有效结论。

由真度定义可知,B是理论Γ的有效结论当且仅当

作者简介:王廷明(1963-),男,副教授,主要研究领域为经典逻辑。
收稿日期:2008-01-07 **修回日期:**2008-04-28

$\tau((A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow B)=1$。$\Gamma$ 的有效结论集记为 $D(\Gamma)$。

引理 3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$B\in F(S)$。则 B 是理论 Γ 的有效结论当 $T(\Gamma)\subseteq T(B)$ 且仅当。

证明 设 $T(\Gamma)=T(A_i)\cap\cdots\cap T(A_m)$,则对 $B\in F(S)$,由引理 2 得:$\tau((A_1\wedge\cdots\wedge A_m)\rightarrow B)=\tau(A_1\wedge\cdots\wedge A_m\wedge B)-\tau(A_1\wedge\cdots\wedge A_m)+1=\frac{1}{2^n}[|T(A_i)\cap\cdots\cap T(A_m)\cap T(B)|-|T(A_i)\cap\cdots\cap T(A_m)|]+1=\frac{1}{2^n}[|T(\Gamma)\cap T(B)|-|T(\Gamma)|]+1$。故 B 是 Γ 的有效结论当且仅当 $|T(\Gamma)\cap T(B)|=|T(\Gamma)|$,即 $T(\Gamma)\subseteq T(B)$。

定义 3[1] 设 $A,B\in F(S)$,称 $\xi(A,B)=\tau((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$ 为公式 A,B 的相似度。当 $\xi(A,B)=1$ 时,称 A,B 相似。令 $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)$,则 $\rho(A,B)$ 为 A,B 的伪距离。

3 理论 Γ 的有效结论的类型和分类

首先给出 $D(\Gamma)$ 的按公式真度的分类定理。

定理 1 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$。令 $T(\Gamma)=T(A_i)\cap\cdots\cap T(A_m)$,$T_r\subseteq U_n-T(\Gamma)$ 且 $|T_r|=r$,$r=0,1,\cdots,2^n-k$,$k=|T(\Gamma)|$,并规定 $T_0=\phi$。则:

(1)$D(\Gamma)$ 按真度可分为 2^n-k+1 类:$H_r=\{B\in D(\Gamma)|\tau(B)=\frac{k+r}{2^n}\}$,$r=0,1,\cdots,2^n-k$,即 $\{H_0,H_1,\cdots,H_{2^n-k}\}$ 构成集合 $D(\Gamma)$ 的一个划分。

(2)公式 $B_r=\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r}m_i$ 是 H_r 的一个代表,$r=0,1,\cdots,2^n-k$。

证明 对 $B\in D(\Gamma)$,由引理 3 得 $T(\Gamma)\subseteq T(B)$。令 $T(B)=T(\Gamma)\cup S'(B)$,其中 $S'(B)\subseteq U_n$ 且 $S'(B)\cap T(\Gamma)=\phi$。则 $\max_{B\in D(\Gamma)}\{|S'(B)|\}=2^n-k$,其中 $k=|T(\Gamma)|$。因而对 $T_r\subseteq U_n-T(\Gamma)$,设 $B'=\bigvee_{i\in T_r}m_i$,则 $\tau(B')=\frac{r}{2^n}$,故由 $T(\Gamma)\cap T_r=\phi$ 以及引理 1 得:

$$\tau(\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r}m_i)=\tau(\bigvee_{i\in T(\Gamma)}m_i)+\tau(B')=\frac{k+r}{2^n},r=0,1,\cdots,2^n-k$$

令 $H_r=\{B\in D(\Gamma)|\tau(B)=\frac{k+r}{2^n}\}(r=0,1,\cdots,2^n-k)$,则 $H_0,H_1,\cdots,H_{2^n-k}$ 均为 $D(\Gamma)$ 的子集,且由真度关系得 $H_i\cap H_j=\phi,i\neq j,i,j=0,1,\cdots,2^n-k$。$\forall B\in D(\Gamma)$,则 $\tau(B)\geqslant\frac{k}{2^n}$,故可设 $\tau(B)=\frac{k}{2^n}+l$,其中 $l\geqslant 0$。由于 $F(S)$ 中公式的真度只有 $\frac{h}{2^n}(h\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ 的形式,故可设上述 $l=\frac{r}{2^n}$,此时 $\tau(B)=\frac{k+r}{2^n}$,且由 $0\leqslant\tau(B)\leqslant 1$ 可知 $0\leqslant r\leqslant 2^n-k$。这样,必存在 H_r,使 $B\in H_r$。从而 $B\in\bigcup_{r=0}^{2^n-k}H_r$,即 $D(\Gamma)\subseteq\bigcup_{r=0}^{2^n-k}H_r$。而 $\bigcup_{r=0}^{2^n-k}H_r\subseteq D(\Gamma)$ 是显然的,故 $D(\Gamma)=\bigcup_{r=0}^{2^n-k}H_r$。从而 $\{H_0,H_1,\cdots,H_{2^n-k}\}$ 构成集合 $D(\Gamma)$ 的一个划分,即(1)成立。

令 $B_r=\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r}m_i$,则 $\tau(B_r)=\frac{k+r}{2^n}$,故 $B_r\in H_r$,从而 B_r 是 H_r 的一个代表,$r=0,1,\cdots,2^n-k$。即(2)成立。

下面讨论 $D(\Gamma)$ 按真度所分的类中公式的相似度问题。

定理 2 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$H_r(r=0,1,\cdots,2^n-k)$ 如定理 1 所设。则对 $0\leqslant r\leqslant 2^n-k$,$\forall B,C\in H_r$,均有 $\xi(B,C)\geqslant 1-\frac{r}{2^{n-1}}$。

证明 令 $A=A_1\wedge\cdots\wedge A_m$。对 $0\leqslant r\leqslant 2^n-k$,$\forall B,C\in H_r$,则由引理 3 可设 $B\approx A\vee G\vee B_1$,$C\approx A\vee G\vee C_1$,其中 G 为 B,C 的主析取范式中下标属于 $U_n-T(\Gamma)$ 的公共极小项的析取式且设 $|T(G)|=s$,而 B_1、C_1 是 B、C 的主析取范式中下标属于 $U_n-T(\Gamma)$ 的非公共极小项的析取式。从而 $T(A),T(G),T(B_1),T(C_1)$ 两两不相交且 $B\wedge C\approx A\vee G$。由 $\tau(B)=\frac{k+r}{2^n}$,而 $\tau(B)=\tau(A\vee G)+\tau(B_1)=\frac{k+s}{2^n}+\tau(B_1)$,故 $\tau(B_1)=\frac{r-s}{2^n}$。由引理 2 得:$\xi(B,C)=\tau(B\wedge G)-\tau(B\vee G)+1=1-\tau(B_1\vee G_1)=1-2\tau(B_1)=1-\frac{r-s}{2^{n-1}}\geqslant 1-\frac{r}{2^{n-1}}$ 从而结论得证。

由定理 2 可知,随着 r 由 0 增加到 2^n-k,H_r 中任意两个公式的相似度的下界相应地减小。特别地,H_0 中任意两个公式的相似度为 1,即它们是相似的。在定理 2 的证明中取 $G=\phi$,并令 $B'\approx A\vee B'_1$,$C'\approx A\vee C'_1$,则 H_r 中公式的最大伪距离为 $\sup\{\rho(B,C)|B,C\in H_r\}=\rho(B',C')=\frac{r}{2^{n-1}}$。关于 $D(\Gamma)$ 的按逻辑等价分类,有下列分类定理。

定理 3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$。令 $T(\Gamma)=T(A_i)\cap\cdots\cap T(A_m)$,$T_r(j_1,\cdots,j_r)\subseteq U_n-T(\Gamma)$,其中 $j_1,\cdots,j_r$ 是 $U_n-T(\Gamma)$ 中任取 r 个元素的排列,$r=0,1,\cdots,2^n-k$,$k=|T(\Gamma)|$,并规定 $T_0=\phi$。则 $D(\Gamma)$ 可按逻辑等价分为 2^{2^n-k} 类:$H_r(j_1,\cdots,j_r)=\{B\in D(\Gamma)|B\approx\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(j_1,\cdots,j_r)}m_i\}$,$r=0,1,\cdots,2^n-k$。

证明 由定理 1 可知,公式 $B_r=\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r}m_i$ 是 H_r 的一个代表,$r=0,1,\cdots,2^n-k$。故在 $U_n-T(\Gamma)$ 中任取 r 个元素 $j_1,\cdots,j_r(j_1<\cdots<j_r)$ 作为极小项的下标,并令 $H_r(j_1,\cdots,j_r)=\{B\in D(\Gamma)|B\approx\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(j_1,\cdots,j_r)}m_i\}$,则这样的 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$ 共有 $C_{2^n-k}^{r}(r=0,1,\cdots,2^n-k)$ 个。下面证明所有的 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$ 构成 $D(\Gamma)$ 按逻辑等价的划分 $\{H_r(j_1,\cdots,j_r)|j_1<\cdots<j_r,j_1,\cdots,j_r\in U_n-T(\Gamma),r=0,1,\cdots,2^n-k\}$。从而 $D(\Gamma)$ 按逻辑等价可分为 $\sum_{r=0}^{2^n-k}C_{2^n-k}^{r}=2^{2^n-k}$ 类。

显然所有的 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$ 均为 $D(\Gamma)$ 的子集。对 $r\neq s$,则 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$ 和 $H_s(i_1,\cdots,i_s)$ 中的公式真值不同,故不存在公共的逻辑等价公式,从而 $H_r(j_1,\cdots,j_r)\cap H_s(i_1,\cdots,i_s)=\phi$。对 $r=s$ 但 $(j_1,\cdots,j_r)\neq(i_1,\cdots,i_r)$,$\forall B\in H_r(j_1,\cdots,j_r)$,$\forall C\in H_r(i_1,\cdots,i_r)$,则 $B\approx\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(j_1,\cdots,j_r)}m_i$,$C\approx\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(i_1,\cdots,i_r)}m_i$,而 $\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(j_1,\cdots,j_r)}m_i$ 与 $\bigvee_{i\in T(\Gamma)\cup T_r(i_1,\cdots,i_r)}m_i$ 不逻辑等价,故 B 与 C 不逻辑等价,从而 $H_r(j_1,\cdots,j_r)\cap H_s(i_1,\cdots,i_s)=\phi$。又 $\forall B\in D(\Gamma)$,则由定理 1 可设 $\tau(B)=\frac{k+r}{2^n}$。从而存在 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$,使 $B\in H_r(j_1,\cdots,j_r)$,故 B 包含在所有 $H_r(j_1,\cdots,j_r)$ 的并集中。故结论得证。

例 1 设 $S=\{p,q,r\}$,$\Gamma=\{A_1,A_2,A_3\}\subset F(S)$,其中 $A_1=p\rightarrow q$,$A_2=r\rightarrow\neg q$,$A_3=(q\wedge r)\rightarrow p$。考虑 $D(\Gamma)$ 的分类问题。

解 由 $T(\Gamma)=T(A_1)\cap T(A_2)\cap T(A_3)=\{0,1,2,6\}$,故 $k=4$,$U_3-T(\Gamma)=\{3,4,5,7\}$。$m=m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_6$。

(1)由定理 1 知 $D(\Gamma)$ 按真度可分为类:$2^n-k+1=5$,$H_r=\{B\in D(\Gamma)|\tau(B)=\frac{r+4}{8}\}$,$r=0,1,\cdots,4$。

(下转 73 页)