广义 MP 问题的三 I 真度解

于 鹏[1],刘凤雏[2],王三五[1]
YU Peng[1],LIU Feng-chu[2],WANG San-wu[1]

1.陕西科技大学 理学院,西安 710021
2.中国工商银行 陕西省分行,西安 710004
1.Faculty of Science,Shaanxi University of Science and Technology,Xi'an 710021,China
2.Industrial and Commercial Bank of China Shaanxi Branch,Xi'an 710004,China

YU Peng,LIU Feng-chu,WANG San-wu.Triple I truth degree solution of generalized modus ponens problem.Computer Engineering and Applications,2009,45(12):47-49.

Abstract: Based on the truth degree of proposition logic theory,the sense of Triple inference framework under the truth degree theory was disscused.The truth degree solution of generalized modus ponens was solved,and the logical equivalence of the Triple truth solution and its formal solution was proved.At the same time the α-Triple truth degree solution of generalized modus ponens was sloved.

Key words: truth degree;two-value logic system;generalized modus ponens;Triple I method;α-Triple I truth degree solution

摘 要: 基于真度理论讨论了三 I 推理机制在真度理论下的意义,求出了真度理论下的广义 MP 问题的三 I 解,证明了该解与其形式解是等价的解,并推广得到了广义 MP 问题的 α-三 I 真度解。

关键词: 公式真度;二值逻辑;广义 MP 问题;三 I 算法;α-三 I 真度解
DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2009.12.015 **文章编号:** 1002-8331(2009)12-0047-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** O142

模糊推理是模糊控制的核心内容,为了给模糊推理提供一个严格的逻辑基础,王国俊教授在文献[1]中创造性地提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法,为模糊推理奠定了严格的逻辑基础。在此基础上王国俊教授还探讨了模糊推理的非模糊形式,提出了广义 MP 问题,并给出了广义 MP 问题的形式解。这些结果的取得为模糊推理的研究注入了新鲜的活力。本文提出了广义 MP 问题的真度解问题,该问题的解决皆在指出,在注重形式化推理的数理逻辑当中同样存在着与模糊推理相同的推理机制,为寻找模糊推理逻辑基础提供了新的途径。

1 二值逻辑系统中广义 MP 问题的三 I 形式解

如下问题被称之为广义 MP 问题:

$$\begin{array}{lll} \text{在逻辑系统 } L \text{ 中,} & \text{已知:} & A\rightarrow B \\ & \text{给定:} & A^* \\ \hline & \text{求:} & B^* \end{array}$$

为寻求广义MP 问题的形式解做如下准备工作。

定义 1[2] 设 $A,B\in F(S)$,规定

$A<B$,当且仅当 $\vdash A\rightarrow B$

则 $F(S)$成为一预序集,记作$(F(S),<)$。

注 1 上述定义的序$<$并不是 $F(S)$上的偏序,因为反对称性不成立,如,令 $A=p\rightarrow p$,$B=q\rightarrow q$,则 $A<B$ 且 $B<A$ 但 $A\neq B$。但是,值得注意的是,如果将逻辑等价的公式视为不加区别的公式时,上述定义的序关系不仅是预序,而且是偏序,进一步的还构成了格结构。例如,在二值逻辑系统 L 中,由等价关系构造的 $F(S)$上的 Lindenbaum 代数,就是上述定义下的格结构。

定义 2 设 $\Gamma\subset F(S)$,以 $D(\Gamma)$记全体 Γ 推论之集,即

$D(\Gamma)=\{A\in F(S)|\Gamma\vdash A\}$

如果 $D(\Gamma)$在$(F(S),<)$中有最小元,比如 A,则称 A 为 Γ 的根。

命题 1[2] 设 $\Gamma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\in F(S)$,则在二值逻辑系统 L 中,Γ 的根为 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$。

定义 3[2] 设 $A,A^*,B\in F(S)$,在二值逻辑系统中广义 MP 问题的三 I 解 B^* 是$(F(S),<)$中使下式成立的最小公式 B^*:

$\vdash(A\rightarrow B)\rightarrow(A^*\rightarrow B^*)$

命题 2[2] 设 $A,A^*,B\in F(S)$,则在二值逻辑系统中广义 MP 问题的三 I 解 B^* 存在且 $B^*\approx A^*\wedge(A\rightarrow B)$。

2 二值逻辑系统中的真度理论

定义 4 函数 $f:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$叫做 n 元 Boole 函数($n\in N$)。

通俗地讲,n 元 Boole 函数就是以长度为 n 的 0-1 序列为变元,并在$\{0,1\}$取值的 n 元函数。例如由 $f(0,1)=f(1,0)=0$,$f(1,1)=f(0,0)=1$ 所表示的函数就是一个二元 Boole 函数。

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10771129);陕西科技大学自然科学基金项目(the Natural Science Foundation of Shaanxi University of Science and Technology under Grant No.ZX07-37)。
作者简介: 于鹏(1981-),男,助教,研究方向:不确定性推理。
收稿日期: 2008-03-09 **修回日期:** 2008-05-23

定义 5 设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是含有 n 个原子公式的合式公式，它由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 通过逻辑连接词 $\neg$、$\vee$、$\to$ 连接而成。再设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\{0,1\}^n$，分别用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取代 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 中的 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则得一 n 元函数，记做 $\bar{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，叫做由公式 A 诱导出来的 Boole 函数。例如：若 $A=(p_1\to p_2)\vee p_3$，则 $\bar{A}=(x_1\to x_2)\vee x_3$。

命题 3 对于任意一个 Boole 函数它都可由某个合式公式导出。

例如：3 元 Boole 函数由 $f(0,0,0)=f(0,1,0)=f(0,1,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=0$，$f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,1,0)=1$ 给出，则此函数可由如下公式导出：

$$A(p_1,p_2,p_3)=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)$$

定义 6[3] 设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 是含有 n 个原子公式的合式公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式，$\bar{A}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是由 A 诱导的 Boole 函数，令 $\tau(A)=\dfrac{|\bar{A}^{-1}(1)|}{2^n}$，称 $\tau(A)$ 为公式 A 的真度。文献[5]中证明了 $F(S)$ 中全体公式的真度之集为：

$$H=\{\frac{k}{2^m}|k=0,\cdots,2^m,m=1,2,\cdots\}$$

例 1 求公式 $p_1\vee p_2,p_1\to p_2\vee p_3$ 的真度。

解 (1)对于公式 $p_1\vee p_2$ 而言，其诱导的 Boole 函数为 $\bar{A}=x_1\vee x_2$，其在点(1,0)、(1,1)、(0,1)处的值为 1，在(0,0)处的值为 0，所以 $\tau(p_1\vee p_2)=\dfrac{3}{4}$。

(2)公式 $p_1\to p_2\vee p_3$ 诱导的 3 元 Boole 函数为 $x_1\to x_2\vee x_3$，其在(1,0,0)处的值为 0，而在其他各点处的值为 1，所以 $\tau(p_1\to p_2\vee p_3)=\dfrac{7}{8}$。

关于公式的真度如下一些性质是成立的。

性质 1 在二值命题逻辑系统 L 中，设 $A,B,C\in F(S)$，则

(1)若 $\vdash A\to B$，则 $\tau(A)\leqslant\tau(B)$；

(2)$\tau(A)=\tau(A\wedge B)+\tau(A\wedge\neg B)$；

(3)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$；

(4)若 $\vdash A\to B,\tau(A)=\tau(B)$，则 $A\sim B$；

(5)$\tau(A)=1-\tau(\neg A)$；

(6)若 $\tau(A)\geqslant\alpha,\tau(A\to B)\geqslant\beta$，则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$；

(7)若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha,\tau(B\to C)\geqslant\beta$，则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$。

文中只证明(4)，其他的可参看相关文献[5]。

证明 当 $\vdash A\to B$ 时，不妨设 A、B 含有相同的原子公式，则 $\forall\nu\in\Omega,\nu(A)\leqslant\nu(B)$。所以当 $\nu(A)=1$ 时 $\nu(B)=1$，而当 $\nu(A)=0$ 时，$\nu(B)$ 只能为零，否则使 B 赋值为 1 的赋值映射的个数就会大于使 A 赋值为 1 的赋值映射的个数，从而 $\tau(A)<\tau(B)$，这与 $\tau(A)=\tau(B)$ 相矛盾。

3 广义 MP 问题的三 I 真度解

在真度意义下，广义 MP 问题的三 I 解应该是满足下式的具有最小真度的公式 B^*：

$$\tau((A\to B)\to(A^*\to B^*))=1 \tag{1}$$

以下证明在二值逻辑系统中满足式(1)的公式 B^* 是存在的并且可以通过构造相应的 Boole 函数构造出来。

事实上由二值逻辑系统的性质可以知道公式 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)$ 逻辑等价于与公式 $(\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg A^*))\vee B^*$，如果记公式 $\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg A^*)$ 为 $\tilde{A}$，则公式 $(A\to B)\to(A^*\to B^*)$ 就逻辑等价于公式 $\tilde{A}\vee B^*$。所以求满足式(1)的最小的 B^* 就转化为求满足 $\tau(\tilde{A}\vee B^*)=1$ 的具有最小真度的公式 B^*。

定理 1 在二值命题逻辑系统中，设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$，$X$ 是未知的公式，则满足 $\tau(A\vee X)=1$，真度最小且只含有原子公式 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式 X 是存在的，并且 $X\sim\neg A$。

证明 当 $\tau(A)=1$ 或 $\tau(A)=0$ 时上述定理显然是成立的。以下证明当 $0<\tau(A)<1$ 时上述定理也是成立的。

设 $\tau(A)=\dfrac{k}{2^n}$，由 A 诱导的 n 元 Boole 函数为 A^*。由真度的定义可知，在 $\{0,1\}^n$ 中有 k 个向量 $\boldsymbol{x}_i$，使得 $A^*(\boldsymbol{x}_i)=1$，此时不妨记

$$(A^*)^{-1}(1)=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k\}$$

则 $$(A^*)^{-1}(0)=\{\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{x}_{2^n}\}$$

设公式 B 是满足 $\tau(A\vee X)=1$ 的一个解，则 B 满足如下条件：对于任意的 $x_i\in(A^*)^{-1}(0)$ 都有 $B^*(\boldsymbol{x}_i)=1$，否则就存在某个向量 $\boldsymbol{x}_j$，使得 $A^*(\boldsymbol{x}_j)=0,B^*(\boldsymbol{x}_j)=0$，从而 $A^*\vee B^*(\boldsymbol{x}_j)=0,\tau(A\vee B)\neq1$。矛盾！

对于满足 $\tau(A\vee X)=1$ 的 B 而言，除了要求 B 在 $(A^*)^{-1}(0)$ 处取 1 外，在 $(A^*)^{-1}(1)$ 处是没有任何要求的，这就说明满足 $\tau(A\vee X)=1$ 的公式 B 是很多的，其真度也是不相同的。但通过分析不难得出具有最小真度的公式应该是这样的一个公式，那就是由它诱导出来的 Boole 函数只在 $(A^*)^{-1}(0)$ 取 1，而在 $(A^*)^{-1}(1)$ 取 0。记这个公式为 B^*，则 B^* 就是满足 $\tau(A\vee X)=1$ 且具有最小真度的解，从它的构造不难看出 $B^*\sim\neg A$。

定理 2 广义 MP 问题在真度意义下的解与其形式解是相互等价的。

证明 设在真度意义下广义 MP 问题的解 $B^*\sim\neg\tilde{A}$，由本章开始说明可知 $\tilde{A}\sim\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg A^*)\sim\neg(A^*\wedge(\neg A\vee B))$，即，$\bar{A}\sim\neg(A^*\wedge(A\to B))$。所以 $B^*\sim A^*\wedge(A\to B)$。

下面将真度意义下的广义 MP 问题的三 I 解进行推广，得到广义 MP 问题的 α-三 I 真度解。

真度意义下广义 MP 问题的 α-三 I 真度解是满足下式的具有最小真度的公式 B^*：

$$\tau((A\to B)\to(A^*\to B^*))=\alpha \tag{2}$$

其中，$\alpha\in H$。

注 2 满足等式 $\tau((A\to B)\to(A^*\to B^*))=\alpha$ 且具有与 A、B、A^* 相同原子公式的未知公式 B^* 是存在的。

定理 3 满足等式 $\tau((A\to B)\to(A^*\to B^*))=\alpha$ 且具有与 A、B、A^* 相同原子公式的未知公式 B^* 是可求的。

证明 不失一般性，设 $A(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in F(S)$，$X$ 是未知的公式，且 $\tau(A)=\dfrac{k}{2^n},\alpha\in H$。因为 $\tau(A\vee X)\geqslant\dfrac{k}{2^n}$，所以 $\alpha<\dfrac{k}{2^n}$ 时无解。为此需要限定 $\alpha\in[\dfrac{k}{2^n},1]\cap[0,1]$。又只考虑未知公式 X 含有与 A 具有相同原子的公式，因此可以设 $\alpha=\dfrac{m}{2^n},k\leqslant m\leqslant2^n$，下面求满足 $\tau(A\vee X)=\alpha$ 的公式 B 及其个数。

相对于公式 A，记

$A^{-1}(1)=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k\}$

则　$A^{-1}(0)=\{\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{x}_{k+2},\cdots,\boldsymbol{x}_{2^n}\}$

设公式 B 是满足 $\tau(A\vee X)=\frac{m}{2^n}$ 的一个解，则 B 满足如下条件：在零向量集合 $A^{-1}(0)$ 中应该有 $m-k$ 个向量处 $B(\boldsymbol{x})$ 取值为 1，而其余 $2^n-k-(m-k)$ 处 $B(\boldsymbol{x})$ 取值为 0，而在 $A^{-1}(1)$，$B(\boldsymbol{x})$ 可以随意取 0 或 1。因为在 $A^{-1}(1)$ 不管 $B(\boldsymbol{x})$ 取何值，$A(\boldsymbol{x})=1$，从而 $A\vee B(\boldsymbol{x})=1$，这样的向量共有 k 个。为了使 $A\vee B(\boldsymbol{x})=1$ 的向量有 m 个，就必须在 $A^{-1}(0)$ 中选取 $m-k$ 个向量，使得 $B(\boldsymbol{x})=1$，而其余的向量处有 $B(\boldsymbol{x})=0$，否则，$A\vee B$ 的真度就不会等于 $\frac{m}{2^n}$。从以上分析可以看出，对于 $B(\boldsymbol{x})$ 值的选取，在 $A^{-1}(1)$ 处有 2^k 种，而在 $A^{-1}(0)$ 处有 $C_{2^n-k}^{m-k}$ 个，从而满足 $\tau(A\vee X)=\frac{m}{2^n}$ 的 $B(\boldsymbol{x})$ 的函数就有 $C_{2^n-k}^{m-k}\cdot 2^k$ 个，则由这些 Boole 函数构造出来的公式 B 就都满足等式 $\tau(A\vee X)=\frac{m}{2^n}$。

推论 1　广义 MP 问题的 α-三 I 解是存在的并且其个数是可以计算出来的。

证明　由定理 3 的证明可知，广义 MP 问题的 α-三 I 解是满足 $B(\boldsymbol{x})$ 在 $A^{-1}(1)$ 处取值为 0，而在 $A^{-1}(0)$ 有 $m-k$ 个向量为 1 的公式，其个数应该为 $C_{2^n-k}^{m-k}$。

定理 4　广义 MP 问题的 α-三 I 解构成了一个不相容公式集。

证明　由定理 3 的证明可知，广义 MP 问题的 α-三 I 解 B，当 $\boldsymbol{x}\in A^{-1}(1)$ 时，$B(\boldsymbol{x})=0$，当 $\boldsymbol{x}\in A^{-1}(0)$ 时有 $m-k$ 个向量为 1，而其余的 $2^n-k-(m-k)$ 个向量处 $B(\boldsymbol{x})$ 的值为 0。由选择的任意性可知对于所构造的函数的全体 $B_i(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,C_{2^n-k}^{m-k})$，对每一个 $\boldsymbol{x}\in A^{-1}(0)$ 有 $B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_{C_{2^n-k}^{m-k}}(\boldsymbol{x})=0$。从而由 $B_i(\boldsymbol{x})$ 构造出来的公式序列 B_i 满足 $B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_{C_{2^n-k}^{m-k}}\sim\bar{0}$。由二值逻辑系统的性质可知 $B_1\wedge B_2\wedge\cdots\wedge B_{C_{2^n-k}^{m-k}}$ 是 $B_1,B_2,\cdots,B_{C_{2^n-k}^{m-k}}$ 的 Γ-结论，从而构成了不相容集。

例 2　求满足 $\tau((p_1\wedge p_2\to p_1\wedge p_3)\to((\neg p_2\wedge p_3)\to X))=\frac{7}{8}$ 的最小公式 X。

解　应用定理 3 及推论 1 可以构造如下公式：

$$A_1=(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge p_3)$$

$$A_2=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge p_3)$$

$$A_3=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge p_3)$$

$$A_4=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge p_2\wedge p_3)$$

$$A_5=(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)$$

则 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 是满足要求的一组解。

4　结束语

以上讨论的关于广义 MP 问题的三 I 真度解事实上用到了方程的思想，那就是满足 $\tau(A\vee X)=\alpha$ 的未知公式 X 是什么，沿着这样的思路可以继续讨论形如 $\tau(A\vee X)=\alpha$ 的真度方程的解，关于上述形式的真度方程将另文发表。其次，如何在其他几个比较常见的逻辑系统中构建相应的真度方程也是今后研究的一个方向。

参考文献：

[1] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J].中国科学：E 辑，1999，29（1）：43–53.

[2] Wang Guo-jun.Formalized theory of general fuzzy reasoning[J].Information Sciences，2004，160（3）：251–266.

[3] 王国俊，傅丽，宋建社.二值命题逻辑中命题的真度理论[J].中国科学：A 辑，2001，31（11）：998–1008.

[4] Wang Guo-jun.Introduction to mathematical logic and resolution principle[M].2nd ed.Beijing：Science in China Press，2006.

[5] 于鹏，王国俊.根与 $F(S)$ 中的近似推理[J].自然科学进展，2006，16（8）：1028–1032.

[6] Wang Guo-jun，Leung Yi.Integrated semantics and logic metric spaces[J].Fuzzy Sets and System，2003，136（1）：71–91.

[7] 吴望名.参数 Kleene 系统中的广义重言式理论[J].模糊系统与数学，2000，14（1）：1–7.

[8] 李骏，黎锁平，夏亚峰.n 值 Lukasiewicz 逻辑中命题的真度理论[J].数学学报，2004，47（4）：769–780.

[9] Wang Guo-jun，Fu Li.Unified forms of Triple I method[J].Computer & Mathematics with Applications，2005，49（6）：923–932.

[10] 裴道武.多值逻辑系统中的子代数与广义重言式[J].陕西师范大学学报，2000，28（2）：18–22.

[11] 于鹏，王国俊.基于正则蕴涵算子的三 I 算法的性质[J].陕西师范大学学报：自然科学版，2007，35（2）：14–17.

（上接 46 页）

网络 Max-T_ξ FAM 有较强的可调性、灵活性和应用性，且由定理1 保证了所提出的学习算法的有效性。这些都说明该模型本身的价值和应用前景。给出 Max-T_ξ FAM 的应用是今后进一步的研究课题。

参考文献：

[1] Hearst M，Hirsh H.AI's greatest trends and controversies[J].IEEE Intelligent Systems，2000，15（1）：8–17.

[2] 李德毅，刘常昱.不确定性人工智能[J].软件学报，2004，15（11）：1583–1594.

[3] 王士同.神经模糊系统及其应用[M].北京：北京航空航天大学，1998.

[4] Kosko B.Fuzzy associative memories[M]//Kandel A.Fuzzy Expert Systems Reading.MA，USA：Addison Wesley，1987.

[5] 范俊波，靳蕃，史燕.模糊联想记忆的一种有效学习算法[J].电子学报，1996，24（1）：112–115.

[6] 舒桂清，肖平.模糊联想记忆网络的增强学习算法[J].中国图形图象学报，2003，8（1）：84–89.

[7] Ying Ming-sheng.Implication operators in fuzzy logic[J].IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2002，10（1）：88–91.

[8] Stamou G B，Tzafestas S G.Neural fuzzy relational systems with a new learning algorithm[J].Mathematics and Computers in Simulation，2000，51：301–314.

[9] 徐蔚鸿，陈国平.规则摄动时模糊蕴涵算子对模糊推理的鲁棒性的影响[J].计算机学报，2005，28（10）：1700–1707.