点圈并图的匹配等价图数

汪小玲，马海成
WANG Xiao-ling，MA Hai-cheng

青海民族学院 数学系，西宁 810007
Department of Mathematics，Qinghai Nationalities College，Xining 810007，China
E-mail：qh_wangxiaoling@163.com

WANG Xiao-ling，MA Hai-cheng.Number of matching equivalent to union graph of points and cycles.Computer Engineering and Applications，2009，45（2）：61-62.

Abstract：For two graphs G and H，if G and H has the same matching polynomial，then G and H is called to be matching equivalent.We denote by $\delta(G)$ the number of the matching equivalent graphs of G.In[5]，authors have given $\delta(sK_1\cup t_1C_{m_1}\cup t_2C_{m_2})$ when $\{m_1,m_2\}\cap\{6,9,15\}=\phi$.In this paper，$\delta(sK_1\cup t_1C_3\cup t_2C_6)$ and $\delta(sK_1\cup t_1C_6\cup t_2C_9)$ is given，which is a generation of the results of in[5].
Key words：graph；matching polynomial；matching equivalence

摘　要：若两个图 G 和 H 的匹配多项式相等，称图 G 和 H 匹配等价用 $\delta(G)$ 表示图 G 的所有不同构的匹配等价图的个数。文[5]在 $\{m_1,m_2\}\cap\{6,9,15\}=\phi$ 的条件下计算了 $\delta(sK_1\cup t_1C_{m_1}\cup t_2C_{m_2})$，在该文中计算了 $\delta(sK_1\cup t_1C_3\cup t_2C_6)$、$\delta(sK_1\cup t_1C_6\cup t_2C_9)$ 是文[5]的完善和补充。
关键词：图；匹配多项式；匹配等价
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2009.02.016　　**文章编号**：1002-8331（2009）02-0061-02　　**文献标识码**：A　　**中图分类号**：O157.5

1　引言

本文仅考虑有限的无向的简单图。设 G 是有 n 个点的图，G 的一个匹配是指 G 的一个生成子图，它的每个连通分支或是孤立点或是孤立边。t-匹配是指其中有 t 条边的匹配。文[1]定义图的匹配多项式为：

$$\mu(G,x)=\sum_{t\geqslant 0}(-1)^t\alpha_t(G)x^{n-2t}$$

这里 $\alpha_t(G)$ 是 G 的 t-匹配的数目。

若两个图 G 和 H 有 $\mu(G,x)=\mu(H,x)$，则称图 G 和 H 匹配等价，记为 $G\sim H$。

用 $\delta(G)$ 表示图 G 的所有不同构的匹配等价图的个数。若 $\delta(G)=1$，则称图 G 是匹配唯一的。文[1]给出了匹配多项式的许多优美性质，也证明了求一个图的匹配多项式是一个 NP 问题。在一定条件下文[5]中研究了一些点和一些圈并图的匹配等价图的个数，通过计算发现这一问题并不简单。本文中研究一些点和一些圈并图的匹配等价图的个数，即计算了 $\delta(sK_1\cup t_1C_3\cup t_2C_6)$、$\delta(sK_1\cup t_1C_6\cup t_2C_9)$。

以 K_1 表示一个孤立点。以 $P_n(n\geqslant 2)$ 表示有 n 个点的路。以 $C_m(m\geqslant 3)$ 表示有 m 个点的圈。以 $T_{i,j,k}$ 表示只有 1 个 3 度点，3 个 1 度点，且这个 3 度点到 3 个 1 度点的距离分别为 i,j,k 的树。以 $D_n(n\geqslant 4)$ 表示一个三角形上的一点与路 P_{n-2} 的一个端点粘接后得到的图。以 nG 表示 n 个图的不交并。

2　引理

引理 1[1] 设图 G 有 k 个连通分支：$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 则 $\mu(G,x)=\prod_{i=1}^{k}\mu(G_i,x)$ 匹配多项式的根都是实数[1]，用 $M(G)$ 表示 $\mu(G,x)$ 的最大根。

引理 2[2] 设 G 是连通图，则 $M(G)<2$ 当且仅当 $G\in\Gamma=\{K_1,P_n,T_{1,1,n},T_{1,2,2},T_{1,2,3},T_{1,2,4},C_n,D_4\}$。

引理 3[3]

（1）$P_{2m+1}\sim P_m\cup C_{m+1}$，$(m\geqslant 2)$。

（2）$T_{1,1n}\sim K_1\cup C_{n+2}$。

（3）$T_{1,2,2}\sim P_2\cup D_4$。

（4）$K_1\cup C_6\sim P_3\cup D_4$。

（5）$K_1\cup C_9\sim C_3\cup T_{1,2,3}$。

（6）$K_1\cup C_{15}\sim C_3\cup C_5\cup T_{1,2,4}$。

引理 4[2]

（1）$M(C_m)=M(T_{1,1,m-2})=M(P_{2m-1})$。

（2）$M(C_6)=M(T_{1,1,4})=M(T_{1,2,2})=M(D_4)=M(P_{11})$。

（3）$M(C_9)=M(T_{1,1,7})=M(T_{1,2,3})=M(P_{17})$。

（4）$M(C_{15})=M(T_{1,1,13})=M(T_{1,2,4})=M(P_{29})$。

引理 5[2]

（1）$K_1\cup C_m(m\neq 6,9,15)$ 的匹配等价图有两个，它们是：

基金项目：国家自然科学基金（the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10861009）。
作者简介：汪小玲（1974-），女，讲师，主要从事代数图论研究；马海成（1965-），男，教授，主要从事代数图论研究。
收稿日期：2008-09-04　　**修回日期**：2008-10-30

$K_1 \cup C_m, T_{1,1,m-2}$。

(2)$K_1 \cup C_6$的匹配等价图有三个,它们是:$K_1 \cup C_6, T_{1,1,4}, P_3 \cup D_4$。

(4)$K_1 \cup C_9$的匹配等价图有三个,它们是:$K_1 \cup C_9, T_{1,1,7}, C_3 \cup T_{1,2,3}$。

(4)$K_1 \cup C_{15}$的匹配等价图有三个,它们是:$K_1 \cup C_{15} \sim C_3 \cup C_5 \cup T_{1,2,4}$。

引理 6[4] 设 $G=sK_1$ 或 $t_1 C_{m_1} \cup \cdots \cup t_k C_{m_k}$,则 G 是匹配唯一的,即 $\delta(G)=1$。

引理 7[5] 设 $G=sK_1 \cup t_1 C_{m_1} \cup t_2 C_{m_2} \cup \cdots \cup t_k C_{m_k}, m_i \neq 6(i=1,2,\cdots,k)$,则 G 的所有匹配等价图均不含有路分支。

引理 8[5]

(1)$G=sK_1 \cup aP_3 \cup tC_6$,则 G 的所有匹配等价图均不含有 P_{11} 分支也不含 $T_{1,2,2}$ 分支。

(2)$\delta(sK_1 \cup aP_3 \cup tC_6)=\delta(sK_1 \cup tC_6)$。

引理 9[5] $m \neq 6,9,15$,则 $\delta(sK_1 \cup tC_6)=\min\{s,t\}+1$。

3 主要结果及证明

引理 10 $\delta(sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=j}^{r}\min\{s-i,t_1\}+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$,其中 $r=\min\{s,t_2\}$。

证 为了方便,简记 $\delta(sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6)=\delta(s,t_1,t_2)$。设 $H \sim sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6$,由引理 8(1)和引理 4 知,$H$ 包含连通分支 C_6,$T_{1,1,4}$ 或 D_4。

(1)若 H 包含 C_6,由 $H=C_6 \cup H_2 \sim sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6$ 得 $H_2 \sim sK_1 \cup t_1 C_3 \cup (t_2-1)C_6$。这样的 H_2 共有 $\delta(s,t_1,t_2-1)$ 个。

(2)若 H 包含 $T_{1,1,4}$,由 $H=T_{1,1,4} \cup H_2 \sim sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6$ 及引理 3(2),得 $H_2 \sim (s-1)K_1 \cup t_1 C_3 \cup (t_2-1)C_6$。这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,t_1,t_2-1)$ 个。

(3)若 H 包含 D_4,由 $H=D_4 \cup H_2 \sim sK_1 \cup t_1 C_3 \cup t_2 C_6$ 及引理 3(4),得 $H_2 \sim (s-1)K_1 \cup t_1 C_3 \cup P_3 \cup (t_2-1)C_6$,由引理 8(2)知,这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,t_1,t_2-1)$ 个。

(4)若 H 同时包含 C_6 和 $T_{1,1,4}$,这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,t_1,t_2-2)$ 个。

(5)若 H 同时包含 C_6 和 D_4,这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,t_1,t_2-2)$ 个。

(6)若 H 同时包含 $T_{1,1,4}$ 和 D_4,这样的 H_2 共有 $\delta(s-2,t_1,t_2-2)$ 个。

(7)若 H 同时包含 $C_6, T_{1,1,4}$ 和 D_4,这样的 H_2 共有 $\delta(s-2,t_1,t_2-3)$ 个。

故 $\delta(s,t_1,t_2)=\delta(s,t_1,t_2-1)+\delta(s-1,t_1,t_2-1)+\delta(s-1,t_1,t_2-1)-2\delta(s-1,t_1,t_2-2)-\delta(s-2,t_1,t_2-2)+\delta(s-2,t_1,t_2-3)$。

重复应用上式得:

$\delta(s,t_1,t_2)-2\delta(s-1,t_1,t_2-1)+\delta(s-2,t_1,t_2-2)=\delta(s,t_1,2)-2\delta(s-1,t_1,1)+\delta(s-2,t_1,0)=\delta(s,t_1,1)-2\delta(s-1,t_1,0)=\delta(s,t_1,0)=\delta(s,t_1)=\min\{s,t_1\}+1$

即 $\delta(s,t_1,t_2)-\delta(s-1,t_1,t_2-1)=\delta(s-1,t_1,t_2-1)-\delta(s-2,t_1,t_2-2)+\min\{s,t_1\}+1=\delta(s-2,t_1,t_2-2)-\delta(s-3,t_1,t_2-3)+\min\{s,t_1\}+\min\{s-1,t_1\}+2=\cdots=\delta(s-r+1,t_1,t_2-r+1)-\delta(s-r,t_1,t_2-r)+\sum_{i=0}^{r-2}\min\{s-i,t_1\}+(r-1)=$

$$\delta(s-r,t_1,t_2-r)+\sum_{i=0}^{r-1}\min\{s-i,t_1\}+r=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r-1}\min\{s-i,t_1\}+r+1 & s=r\\ \sum_{i=0}^{r}\min\{s-i,t_1\}+r+1 & t_2=r\end{cases}$$

$$\delta(s,t_1,t_2)-\delta(s-1,t_1,t_2-1)=\sum_{i=0}^{r}\min\{s-i,t_1\}+r+1\quad(r=\min\{s,t_2\})\qquad(1)$$

$$\delta(s-1,t_1,t_2-1)-\delta(s-2,t_1,t_2-2)=\sum_{i=0}^{r-1}\min\{s-1-i,t_1\}+r=\sum_{i=1}^{r}\min\{s-i,t_1\}+r\qquad(2)$$

…

$$\delta(s-r+1,t_1,t_2-r+1)-\delta(s-r,t_1,t_2-r)=\sum_{i=r-1}^{r}\min\{s-i,t_1\}+2\qquad(\mathrm{r})$$

$$\delta(s-r,t_1,t_2-r)=\sum_{i=r}^{r}\min\{s-i,t_1\}+1\qquad(\mathrm{r+1})$$

将式(1),(2),…,(r+1)相加得:$\delta(s,t_1,t_2)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=j}^{r}\min\{s-i,t_1\}+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$。

定理 1 $\delta(sK_1 \cup t_1 C_6 \cup t_2 C_9)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=j}^{r}\delta(s-i,i-j,t_1)$,其中 $r=\min\{s,t_2\}$。

证 为了方便,简记 $\delta(sK_1 \cup tC_3 \cup t_1 C_6 \cup t_2 C_9)=\delta(s,t,t_1,t_2)$。设 $H \sim G$,由引理 4 和引理 7 知,H 包含连通分支 C_9、$T_{1,1,7}$ 或 $T_{1,2,3}$。

(1)若 H 包含连通分支 C_9,由 $H=C_9 \cup H_2 \sim G=sK_1 \cup t_1 C_6 \cup t_2 C_9$ 得 $H_2 \sim sK_1 \cup t_1 C_6 \cup (t_2-1)C_9$。这样的 H_2 共有 $\delta(s,0,t_1,t_2-1)$ 个。

(2)若 H 包含连通分支 $T_{1,1,7}$,由 $H=T_{1,1,7} \cup H_2 \sim G=sK_1 \cup t_1 C_6 \cup t_2 C_9$ 由引理 3(2)得 $H_2 \sim (s-1)K_1 \cup t_1 C_6 \cup (t_2-1)C_9$。这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,0,t_1,t_2-1)$ 个。

(3)若 H 包含连通分支 $T_{1,2,3}$,由 $H=T_{1,2,3} \cup H_2 \sim G=sK_1 \cup t_1 C_6 \cup t_2 C_9$ 由引理 3(5)得 $H_2 \sim (s-1)K_1 \cup C_3 \cup t_1 C_6 \cup (t_2-1)C_9$。这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,1,t_1,t_2-1)$ 个。

(4)若 H 同时包含 C_9 和 $T_{1,1,7}$,这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,0,t_1,t_2-2)$ 个。

(5)若 H 同时包含 C_9 和 $T_{1,2,3}$,这样的 H_2 共有 $\delta(s-1,1,t_1,t_2-2)$ 个。

(6)若 H 同时包含 $T_{1,1,7}$ 和 $T_{1,2,3}$,这样的 H_2 共有 $\delta(s-2,1,t_1,t_2-2)$ 个。

(7)若 H 同时包含 $C_9, T_{1,1,7}$ 和 $T_{1,2,3}$,这样的 H_2 共有 $\delta(s-2,1,t_1,t_2-3)$ 个。

则 $\delta(s,0,t_1,t_2)=\delta(s,0,t_1,t_2-1)+\delta(s-1,0,t_1,t_2-1)+\delta(s-1,1,t_1,t_2-1)-\delta(s-1,0,t_1,t_2-2)-\delta(s-1,1,t_1,t_2-2)-\delta(s-2,1,t_1,t_2-2)+\delta(s-2,1,t_1,t_2-3)$

即 $\delta(s,0,t_1,t_2)-\delta(s-1,0,t_1,t_2-1)-\delta(s-1,1,t_1,t_2-1)+\delta(s-2,1,$

(下转 65 页)