Vague 集转化为 Fuzzy 集的新方法

徐凤生
XU Feng-sheng

德州学院 计算机系，山东 德州 253023
Department of Computer Science and Technology，Dezhou University，Dezhou，Shandong 253023，China
E-mail：xfs@dzu.edu.cn

XU Feng-sheng.New method for transforming Vague sets into Fuzzy sets.Computer Engineering and Applications，2008，44（34）：137-138.

Abstract：Based on theory of Vague sets and voting model，methods for transforming Vague sets into Fuzzy sets are analyzed，and problems of the methods that have existed are pointed out，a new method for transforming Vague sets into Fuzzy sets is presented，and its validity are improved。
Key words：Vague sets；Fuzzy sets；membership function；transformation method

摘 要：结合 Vague 集理论及投票模型下的解释，对 Vague 集向 Fuzzy 集转化的方法进行了分析，指出已有方法存在的不足之处，提出了一种 Vague 集转化为 Fuzzy 集的新方法，并证明了该方法的有效性。
关键词：Vague 集；Fuzzy 集；隶属函数；转化方法
DOI：10.3778/j.issn.1002-8331.2008.34.042 **文章编号**：1002-8331（2008）34-0137-02 **文献标识码**：A **中图分类号**：TP301.6

1 引言

Zadeh 于 1965 年提出了 Fuzzy 集理论[1]，它的核心是利用隶属度的概念来描述支持和反对两种信息，即对于论域 U 中的一个 Fuzzy 集，隶属函数 μ_V 给每个对象 x 指定[0，1]中的一个值 $\mu_V(x)$，$\mu_V(x)$ 包含了支持 x 的证据，$1-\mu_V(x)$ 包含了反对 x 的证据。但现实情况中往往不仅出现元素对模糊概念的支持与反对两个方面，而且还体现出介于支持与反对之间的踌躇性。如投票模型中有支持与反对两个方面，且有弃权情况发生。这类问题用 Fuzzy 集是无法处理的。Gau 等[2]在 1993 年提出 Vague 集，给解决投票模型这类问题提出了一个崭新的思路。在一个 Vague 集中，用一个真隶属函数 t_x 和一个假隶属函数 f_x 来描述其隶属度的边界，这两个边界就构成[0，1]的一个子区间$[t_x, 1-f_x]$，其中一个对象的支持度、反对度和未知度分别为 t_x、f_x 和 π_x（$\pi_x=1-t_x-f_x$）。

与 Fuzzy 集相比，Vague 集能更好、更准确地表达模糊信息，Vague 集是 Fuzzy 集的推广。但是 Vague 集的未知度理论还不是很成熟[3-4]，并且处理信息有一定的难度。因此，可以考虑采取某种方式将 Vague 集转化为 Fuzzy 集，借助 Fuzzy 集的成熟理论来计算 Vague 集的未知度。这不仅为 Vague 集的未知度提供了解决途径，同时也为 Vague 集理论的发展和应用起到了促进作用。

本文结合 Vague 集理论及投票模型下的解释，对 Vague 集转化为 Fuzzy 集的方法进行了分析，指出已有方法[5-7]存在的不足之处，提出了一种 Vague 集转化为 Fuzzy 集的新方法，并证明了该方法的有效性。

2 Vague 集基本理论

定义 1 设 U 是一个论域，对 U 的任一元素 x，U 中的一个 Vague 集 V 用一个真隶属函数 t_x 和一个假隶属函数 f_x 表示。t_x 是从支持 x 的证据所导出的 x 的真隶属度下界，f_x 则是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界，t_x 和 f_x 将区间 [0，1]中的实数与 U 中每一元素联系起来，即：

$t_x: U\to[0,1]$

$f_x: U\to[0,1]$

其中，$t_x+f_x\leqslant 1$。

由 Vague 集的定义可知，Vague 集 V 中任一元素 x 的隶属函数被限制在[0，1]上的一个子区间$[t_x, 1-f_x]$内，其中 t_x 是 Vague 集的真隶属函数，它表示支持 $x\in U$ 证据的必要程度；f_x 是 Vague 集的假隶属函数，它表示反对 $x\in U$ 证据的必要程度；$1-f_x$ 则表示支持 $x\in U$ 的证据的可能程度。

设 Vague 值为 $x=[0.6, 0.9]$，即 $t_x=0.6$，$f_x=0.1$。用投票模型可解释为：赞成票为 6 票，反对票为 1 票，弃权票为 3 票。

3 Vague 集向 Fuzzy 集转化中存在的问题

方法 1[5] 对 U 上的任意 Vague 集 V，论域 U 中的任意一个元素 x 的隶属度在区间$[t_x, 1-f_x]$内，则 x 对 V^F 的隶属度可以记为

$$\mu_V^F(x)=t_x+\frac{1}{2}\pi_x \tag{1}$$

对于这种转化方法，将中立者一分为二，有一半支持，有一半反对，没有考虑赞成票与反对票的人对中立者的影响，这样

作者简介：徐凤生（1965-），男，教授，主要研究方向为数据挖掘、Rough 集理论、数据结构和算法。
收稿日期：2007-10-10 **修回日期**：2008-01-15

处理问题可能会丢失一些信息。当然在赞成票和反对票相同时,可以认为中立者有一半的人倾向于赞成票。但当赞成票和反对票不相同时,仍认为有一半的人倾向赞成票,是不符合实际的。所以,这种转化方法不能直观刻画中立者的倾向性。

方法 2[5] 对 U 上的任意 Vague 集 V,论域 U 中的任意一个元素 x 的隶属度在区间$[t_x,1-f_x]$内,则 x 对 V^F 的隶属度可以记为

$$\mu_V^F(x)=t_x+\frac{t_x}{t_x+f_x}\pi_x \tag{2}$$

对于这种转化方法,它是把中立者投赞成票的倾向性以 $\frac{t_x}{t_x+f_x}$ 的比例来计算,是比较符合实际的,也修正了方法 1 所存在的问题,但有些情况用式(2)却不能正确转化了。例如,当 $t_x=0$ 或 $f_x=0$ 时,其式(2)中的比例就出现了问题。当 Vague 值为[0,0.3]时,在投票模型中,赞成票为 0,反对票为 7,按此方法计算则中立者倾向赞成的比例为 0,即中立者完全倾向反对,不符合实际;Vague 值为[0.3,1]时,赞成票为 3,反对票为 0,经过此方法计算得出中立者倾向赞成的比例为 1,即中立者完全倾向赞成,这也是不符合实际;Vague 值为[0,1]时,通过式(2)无法计算,而此时直观上应有中立者倾向赞成的比例为 0.5。

方法 3[6] 对 U 上的任意 Vague 集 V,论域 U 中的任意一个元素 x 的隶属度在区间$[t_x,1-f_x]$内,则 x 对 V^F 的隶属度可以记为

$$\mu_V^F(x)=\begin{cases} t_x+\dfrac{1-f_x}{t_x+f_x}\pi_x & t_x=0 \\ t_x+\dfrac{t_x}{t_x+f_x}\pi_x & 0<t_x\leqslant 0.5 \\ t_x+(0.5+\dfrac{t_x-0.5}{t_x+f_x})\pi_x & 0.5<t_x\leqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

这种方法虽然解决了方法 2 中提出的问题,但该方法同样也存在问题,因为它只考虑支持者对中立者的影响而没有考虑反对者也对中立者有影响。例如,当 $t_x=0,f_x=0$ 时,按(3)式同样无法计算;再如 Vague 值为[0,0.8],按式(3)计算,中立者倾向赞成的比例为 4,大于 1,显然是错误的;当 $f_x=0,0<t_x\leqslant 0.5$ 时,这种情况下,如有 Vague 值为[0.3,1],按式(3)计算,给予中立者倾向赞成的比例为 1,这也是不符合实际的。

针对上述方法存在的问题,文献[7]给出了一种改进方法,但它没有揭示其定义的根本原因。

方法 4[7] 对 U 上的任意 Vague 集 V,论域 U 中的任意一个元素 x 的隶属度在区间$[t_x,1-f_x]$内,则 x 对 V^F 的隶属度可以记为

$$\mu_V^F(x)=t_x+\frac{1+t_x-f_x}{2}\pi_x \tag{4}$$

4 Vague 集转化为 Fuzzy 集的新方法

刘华文在文献[8]中考虑到弃权部分有部分趋向赞成,也有部分趋向反对,进一步将 π_x 细化为三部分 $t_x\pi_x$、$f_x\pi_x$ 和 $\pi_x\pi_x$。经过 n 步细化得:

$$t_x^{(n)}=t_x+t_x\pi_x+\cdots+t_x\pi_x^n$$

$$f_x^{(n)}=f_x+f_x\pi_x+\cdots+f_x\pi_x^n$$

$$\pi_x^n=\pi_x^{n+1}$$

受上述思想和方法 1 的启发,本文提出一种 Vague 集转化为 Fuzzy 集的新方法,并证明了该方法的有效性。

方法 5 对 U 上的任意 Vague 集 V,论域 U 中的任意一个元素 x 的隶属度在区间$[t_x,1-f_x]$内,则 x 对 V^F 的隶属度可以记为

$$\mu_V^F(x)=t_x+t_x\pi_x+\cdots+t_x\pi_x^n+\frac{\pi_x^{n+1}}{2}=t_x+(t_x+\cdots+t_x\pi_x^{n-1}+\frac{\pi_x^n}{2})\pi_x \tag{5}$$

定理 1 $\mu_V^F(x)=t_x+(t_x+\cdots+t_x\pi_x^{n-1}+\frac{\pi_x^n}{2})\pi_x$,令 $k=t_x+t_x\pi_x+\cdots+t_x\pi_x^{n-1}+\frac{\pi_x^n}{2}$,且 $\pi_x\neq 0$,则:

(1)当 $t_x=f_x$ 时,$k=\frac{1}{2}$。

(2)当 $t_x>f_x$ 时,$\frac{1}{2}<k<1$。

(3)当 $t_x<f_x$ 时,$0<k<\frac{1}{2}$。

证明 (1)若 $t_x=f_x=0$,则 $k=\frac{1}{2}$。若 $t_x=f_x\neq 0$,则

$$k=t_x+t_x\pi_x+\cdots+t_x\pi_x^{n-1}+\frac{\pi_x^n}{2}=t_x\frac{1-\pi_x^n}{1-\pi_x}+\frac{\pi_x^n}{2}=$$

$$t_x\frac{1-\pi_x^n}{t_x+f_x}+\frac{\pi_x^n}{2}=t_x\frac{1-\pi_x^n}{2t_x}+\frac{\pi_x^n}{2}=\frac{1}{2}$$

所以,当 $t_x=f_x$ 时,$k=\frac{1}{2}$。

(2)若 $t_x>f_x$,则 $t_x+f_x<2t_x$,于是

$$k=t_x\frac{1-\pi_x^n}{t_x+f_x}+\frac{\pi_x^n}{2}>t_x\frac{1-\pi_x^n}{2t_x}+\frac{\pi_x^n}{2}>\frac{1}{2}$$

又 $1-k=1-t_x\frac{1-\pi_x^n}{t_x+f_x}-\frac{\pi_x^n}{2}=\frac{1}{2}-t_x\frac{1-\pi_x^n}{t_x+f_x}+\frac{1-\pi_x^n}{2}=$

$$\frac{1}{2}-\frac{t_x-f_x}{2(t_x+f_x)}(1-\pi_x^n)>0$$

所以,当 $t_x>f_x$ 时,$\frac{1}{2}<k<1$。

(3)若 $t_x<f_x$,则 $t_x+f_x>2t_x$,于是

$$k=t_x\frac{1-\pi_x^n}{t_x+f_x}+\frac{\pi_x^n}{2}<t_x\frac{1-\pi_x^n}{2t_x}+\frac{\pi_x^n}{2}<\frac{1}{2}$$

又显然有 $k>0$。所以,当 $t_x<f_x$ 时,$0<k<\frac{1}{2}$。

由定理 1 可知,在方法 5 中,当 $t_x=f_x$ 时,中立者倾向支持和反对的比例相同,且不会出现 $t_x=f_x=0$ 无法计算的情况发生;当 $t_x>f_x$ 时,中立者倾向支持的比例大于倾向反对的比例,且不会出现中立者完全倾向于支持的情况发生;当 $t_x<f_x$ 时,中立者倾向支持的比例小于倾向反对的比例,且不会出现中立者完全倾向于反对的情况发生。因此,方法 5 完全克服了方法 1、方法 2 和方法 3 存在的不足,且更加符合客观实际和人们的直觉。

特别当 $n=1$ 时,$\mu_V^F(x)=t_x+t_x\pi_x+\frac{\pi_x^n}{2}=t_x+\frac{1+t_x-f_x}{2}\pi_x$,因此方法 4 是方法 5 的特例,方法 5 更好地揭示了方法 4 的合理性。在具体使用中,可根据需要选择 n 的值。

(下转 148 页)