R_0代数中的正蕴涵 MP 滤子和固执 MP 滤子

吴苏朋
WU Su-peng

安康学院 数学系,陕西 安康 725000
Department of Mathematics,Ankang College,Ankang,Shaanxi 725000,China

WU Su-peng.Positive implicative and obstinate filters in R_0-algebras.Computer Engineering and Applications,2008,44(20):67-69.

Abstract: In R_0-algebra,give some kinds of property characteristics of Boolean MP filter.Propose the concepts of a positive implicative MP filter and an obstinate MP filter.Discuss their some properties.Prove that the positive implicative MP filter is equivalent to the Boolean MP filter.Discuss the relation between the positive implicative MP filter.And the obstinate MP filter is also equivalent to the ultra MP filter.
Key words: R_0-algebra;the positive implicative MP filter;the obstinate MP filter

摘 要:在 R_0代数中,给出布尔 MP 滤子的几种性质特征。提出正蕴涵 MP 滤子和固执 MP 滤子的概念,讨论了它们的一些性质定理。证明正蕴涵 MP 滤子与布尔 MP 滤子等价,固执 MP 滤子与 MP 超滤等价,同时也讨论了正蕴涵 MP 滤子和固执 MP 滤子的关系。
关键词:R_0代数;正蕴涵 MP 滤子;固执 MP 滤子
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2008.20.020 **文章编号:**1002-8331(2008)20-0067-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**O141.1

近年来,关于 Fuzzy 逻辑基础的研究越来越多,得到了许多丰富而且很有意义的结论。其中,由王国俊教授提出的形式 L^* 系统和 P.Hájek 提出的基础逻辑系统 BL 等是非常重要的,具有很好的研究价值。而对这些逻辑系统的研究中,相关的代数系统(R_0代数与 BL 代数)等起到了十分的重要作用。滤子是研究代数系统的十分重要的工具。文献[2-4]对 R_0代数中的 MP 滤子进行了细致而深入的研究,本文在此基础上对 R_0代数作进一步的研究,给出了布尔 MP 滤子的几种性质特征。引入了正蕴涵 MP 滤子和固执 MP 滤子的概念,得到了它们的一些性质,讨论了它们与其它 MP 滤子之间的关系。

1 预备知识

在这里,给出本文所需要的有关 R_0代数的基础知识。

定义 1[1] 设 L 是($\neg,\vee,\to$)型代数,如果

(1)L 上有偏序$\leqslant$使($L,\leqslant$)成为有界分配格,且$\vee$是关于序$\leqslant$而言的上确界运算;

(2)$\neg$ 是关于序而言的逆序对合对应;

(3)对 $x,y,z\in L$,以下条件成立:

①$\neg x\to\neg y=y\to x$, ②$1\to x=x$,$x\to x=1$,

③$y\to z\leqslant(x\to y)\to(x\to z)$, ④$x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$,

⑤$x\to y\vee z=(x\to y)\vee(x\to z)$,⑥$x\to y\wedge z=(x\to y)\wedge(x\to z)$,

⑦$(x\to y)\vee(x\to y\to\neg x\vee y)=1$。

这里,$\neg x=x\to 0$,1 是 L 中的最大元,并且记 $0=\neg 1$,那么称 L 为 R_0代数。

由$\neg$ 为逆序对合对应知,它满足 De Morgan 对偶律,即 $\neg(x\vee y)=\neg x\wedge\neg y$,$\neg(x\wedge y)=\neg x\vee\neg y$。

在下文中常常用 x'表示逆序对合对应$\neg x$。

命题 1[1] 设 L 为 R_0代数,$x,y,z\in L$,则以下性质成立:

(**P**1)$x\to y=1$ 当且仅当 $x\leqslant y$;

(**P**2)$x\leqslant y\to z$ 当且仅当 $y\leqslant x\to z$;

(**P**3)$x\vee y\to z=(x\to y)\wedge(y\to z)$,$x\wedge y\to z=(x\to z)\vee(y\to z)$;

(**P**4)若 $y\leqslant x$,则 $x\to y\leqslant x\to z$,若 $x\leqslant y$,则 $y\to z\leqslant x\to z$;

(**P**5)$((x\to y)\to y)\to y=x\to y$;

(**P**6)$(x\to y)\vee(y\to x)=1$;

(**P**7)$x\vee y=((x\to y)\to y)\wedge((y\to x)\to x)$;

(**P**8)$x\to y\leqslant x\vee z\to y\vee z$,$x\to y\leqslant x\wedge z\to y\wedge z$。

定义 2[1] 设 L 为 R_0代数,F 是 L 的一个非空子集合,称 F 是一个 MP 滤子,如果

($\mathbf{F}_1$)$1\in F$,($\mathbf{F}_2$)$x,y\in L$,若 $x\in F$,$x\to y\in F$,则 $y\in F$。

定义3[1] 设 L 为 R_0代数,如果 F 是 L 的 MP 滤子,且当 $x,y\in L$,$x\vee y\in F$时,$x\in F$ 或 $y\in F$,则称 F 是 L 的素 MP 滤子。

命题 2[1] 设 L 是 R_0代数,F 是 L 的一个子集合,则

(1)F 是 MP 滤子当且仅当 F 是非空的上集,即当 $x,y\in L$,$x\in F$,$x\leqslant y\in F$,则 $y\in F$,且 F 对 * 运算封闭。

基金项目:安康学院专项科研计划资助项目(No.2007AKXY022)。
作者简介:吴苏朋(1980-),女,助教,主要研究领域为非经典数理逻辑与不确定性推理。
收稿日期:2007-10-10 **修回日期:**2008-01-02

(2)MP 滤子 F 是素滤子当且仅当 $\forall x,y\in L,x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$。

定义 4[1] 设 L 是 R_0 代数,称真 MP 滤子 F 是 L 的一个极大 MP 滤子,如果对任意 MP 滤子 $G\supseteq F$,有 $G=F$ 或 $G=L$。

定义 5 [3] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的真 MP 滤子,称 F 是 L 的超 MP 滤子,如果 $\forall x\in L,x\in F$ 当且仅当 $x'\notin F$。

命题 3[3] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的 MP 滤子当且仅当 $\forall x,y,z\in L,x\leqslant y\to z$ 且 $x,y\in F\Rightarrow z\in F$。

2 布尔 MP 滤子的几类性质特征

定义 6[2] 设 L 是 R_0 代数,若 F 是 L 的 MP 滤子,称 F 是 L 的布尔 MP 滤子,如果 $\forall x\in L$,有 $x\vee x'\in F$。

命题 4[4] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的 MP 滤子,则以下条件等价:

(1)F 是 L 的布尔 MP 滤子;

(2)$\forall x,y,z\in L$,若 $x\to(z'\to y)\in F,y\to z\in F$,则 $x\to z\in F$;

(3)$\forall x,y\in L$,若$(x\to y)\to x\in F$,则 $x\in F$。

命题 5[4] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的 MP 滤子,则以下条件等价:

(1)F 是极大布尔 MP 滤子;

(2)F 是素的布尔 MP 滤子;

(3)F 是真 MP 滤子且 $\forall x\in L,x\in F$ 或 $x'\in F$。

推论 1[4] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的超 MP 滤子当且仅当 F 是极大布尔 MP 滤子。

命题 6[4] 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的布尔 MP 滤子,则 $\forall x,y,z\in L$,若 $x\to(y\to z)\in F,x\to y\in F$,则 $x\to z\in F$。

命题 7 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的布尔 MP 滤子当且仅当 F 是 MP 滤子且 $\forall x\in L$,若 $x'\to x\in F$,则 $x\in F$。

证明

必要性。假设 F 是 L 的布尔 MP 滤子。$\forall x\in L$,若 $x'\to x\in F$,因为 $x'\to x=(x'\to x)\wedge(x\to x)=x'\vee x\to x$,所以 $x'\vee x\to x\in F$。因为 F 是 L 的布尔 MP 滤子,所以 $x'\vee x\in F$,则 $x\in F$。

充分性。假设 F 是 MP 滤子且 $\forall x\in L$,若 $x'\to x\in F$,则 $x\in F$。因为 $(x'\vee x)'\to x'\vee x=(x')'\wedge x'\to x'\vee x=x\wedge x'\to x'\vee x=1$ 且 $1\in F$,所以 $(x'\vee x)'\to x'\vee x\in F$,从而 $x'\vee x\in F$。说明 F 是 L 的布尔 MP 滤子。

命题 8 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的非空集合,则以下结论等价:

(1)F 是布尔 MP 滤子;

(2)$1\in F$ 且若 $x\in F,x\to((y\to z)\to y)\in F$,则 $y\in F$。

证明

(1)⇒(2) 由命题 4(3)可知,结论显然成立。

(2)⇒(1) 首先证明 F 是 L 的滤子。$\forall x,y\in L$,当 $x\in F$,$x\to y\in F$ 时,由于 $x\to y=x\to(1\to y)=x\to((y\to 1)\to y)$,则 $x\to((y\to 1)\to y)\in F$。由(2)得 $y\in F$,又 $1\in F$,所以 F 是 L 的滤子。下面证明 F 是 L 的布尔 MP 滤子。由于 $1\to((x'\vee x\to 0)\to x'\vee x)=(x'\vee x\to 0)\to x'\vee x=(x'\vee x)'\to x'\vee x=(x')'\wedge x'\to x'\vee x=x\wedge x'\to x'\vee x=1\in F$,由(2)得 $x'\vee x\in F$,说明 F 是 L 的布尔滤子。

推论 2 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的非空集合,则以下结论等价:

(1)F 是布尔 MP 滤子;

(2)F 是 MP 滤子,且若 $x\to(z'\to z)\in F$,则 $x\to z\in F$。

命题 9 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的MP 滤子,则 F 是 L 的布尔 MP 滤子当且仅当 $\forall x\in L$,若 $nx\in F$,则 $x\in F$。其中定义:$x\oplus y=x'\to y$,记 $1x=x,nx=x\oplus(n-1)x$。

证明 假设 F 是 L 的布尔 MP 滤子,利用数学归纳法证明当 $n=2$ 时,由命题 7 可知,结论成立。假设 $n=k$ 时,命题的结论成立,即若 $kx\in F$,则 $x\in F$。当 $n=k+1$ 时,若$(k+1)x\in F$,由于$(k+1)x=x\oplus kx=x'\to kx\in F$,由命题 7 可得 $kx\in F$,则 $x\in F$。

反过来,F 是一个滤子且满足:$\forall x\in L$,若 $nx\in F$,则 $x\in F$。那么取 $n=2$ 时有 $2x=x'\to x\in F,x\in F$,由命题 7 说明 F 是布尔 MP 滤子。

3 正蕴涵 MP 滤子

定义 7 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的一个非空子集,称 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子,如果

($\mathbf{F}_1$)$1\in F$;

($\mathbf{F}_3$)$\forall x,y,z\in L$,若 $x\to(y\to z)\in F,x\to y\in F$,则 $x\to z\in F$。

例 1 设 $L=\{0,a,b,c,d,1\}$,定义 L 上的二元运算"→"如下:

→	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	1	1	1	1
b	c	c	1	1	1	1
c	b	b	b	1	1	1
d	a	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

x	$\neg x$
0	1
a	d
b	c
c	b
d	a
1	0

$x\vee y=\max\{x,y\},x\wedge y=\min\{x,y\},\neg x=x\to 0$。

则容易证明$(L,\vee,\wedge,\neg,\to,0,1)$是 R_0 代数。

如果取 $F=\{b,d,1\}$,可以证明 F 是 L 上的一个正蕴涵 MP 滤子。

从定义 7 可知,在取 $x=1$ 时,可以得到以下推论。

推论 3 在 R_0 代数中,每一个正蕴涵 MP 滤子是 MP 滤子。

命题 10 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子当且仅当 F_a 是包含 F 和 a 的最小 MP 滤子。其中定义:$\forall a\in L,F_a=\{x\in L|a\to x\in F\}$。

证明

充分性。设 $\forall x,y,z\in L$,若 $x\to(y\to z)\in F,x\to y\in F$,则 $y\to z\in F_x,y\in F_x$。由于 F_x 是包含 F 和 x 的最小 MP 滤子,则 $z\in F_x$,即 $x\to z\in F$。从而说明 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子。

必要性。首先证明 F_a 是 MP 滤子。由于 $1=a\to a=a\to 1\in F$,则 $a\in F_a,1\in F_a$。设 $x\in F_a,x\to y\in F_a$,则 $a\to x\in F,a\to(x\to y)\in F$。由于 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子,从而 $a\to y\in F$,即 $y\in F_a$。所以 F_a 是 MP 滤子。再证明 F_a 是包含 F 和 a 的最小 MP 滤子。设 D 是包含 F 和 a 的 MP 滤子,只须证明 $F_a\subseteq D$ 即可。设 $x\subseteq F_a$,即 $a\to x\in F$,从而 $a\to x\in D$。由于 D 是包含 F 和 a 的 MP 滤子,则 $x\in D$,所以 $F_a\subseteq D$。这就证明 F_a 是包含 F 和 a 的最小 MP 滤子。

命题 11 设 L 是 R_0 代数,F 是 L 的一个非空子集,则以下结论等价:

(1)F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子;

(2)F 是 MP 滤子,且若 $\forall x,y\in L,x\to(x\to y)\in F$,则 $x\to y\in F$;

(3)F 是 MP 滤子,且若 $\forall x,y,z\in L,x\to(y\to z)\in F$,则$(x\to y)\to(x\to z)\in F$;

(4)$1\in F$ 且若 $\forall x,y,z\in L,z\in F,z\to(x\to(x\to y))\in F$,则 $x\to y\in F$。

证明

(1)⇒(2) 假设 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子。$\forall x,y,z\in L$,若

$x\to(x\to y)\in F$，又因为有 $x\to x=1\in F$，所以 $x\to y\in F$。

（2）⇒（3） $\forall x,y,z\in L$，当 $x\to(y\to z)\in F$ 时，因为 $y\to z\leqslant(x\to y)\to(x\to z)$，所以 $x\to(y\to z)\leqslant x\to((x\to y)\to(x\to z))=x\to(x\to((x\to y)\to z))$。由命题 2(1)可知，$x\to(x\to((x\to y)\to z))\in F$。由条件(2)得，$x\to((x\to y)\to z)\in F$，即$(x\to y)\to(x\to z)\in F$。

（3）⇒（4） 由(3)可知 $1\in F$。$\forall x,y,z\in L$，当 $z\in F$，$z\to(x\to(x\to y))\in F$ 时，因为 F 是 MP 滤子，所以 $x\to(x\to y)\in F$。由条件(3)得，$(x\to x)\to(x\to y)\in F$。又$(x\to x)\to(x\to y)=1\to(x\to y)=x\to y$。所以 $x\to y\in F$。

（4）⇒（1） 首先证明 F 是 MP 滤子。因为 $1\in F$，所以(F_1)成立。设 $\forall x,y\in L$，若 $x\in F$，$x\to y\in F$，则 $x\to y=x\to(1\to(1\to y))\in F$。由条件(4)得，$1\to y=y\in F$，所以$(F_2)$成立。说明 F 是 L 的 MP 滤子。再证明 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子，即证明 F 满足(F_3)。$\forall x,y,z\in L$，若 $x\to(y\to z)\in F$，$x\to y\in F$，因为 $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)\leqslant(x\to y)\to(x\to(x\to z))$，且 F 是 L 的 MP 滤子，所以 $(x\to y)\to(x\to(x\to z))\in F$。又由条件(4)得，$x\to z\in F$。说明 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子。

命题 12 设 L 是 R_0 代数，F 和 G 都是 L 的 MP 滤子，且 $F\subseteq G$。如果 F 是正蕴涵 MP 滤子，则 G 也是正蕴涵 MP 滤子。

证明 $\forall x,y\in L$，设 $x\to(x\to y)\in G$。因为 F 是正蕴涵 MP 滤子，所以 $1\in F$。又 $1=(x\to(x\to y))\to(x\to(x\to y))=x\to(x\to((x\to(x\to y))\to y))$，则 $x\to(x\to((x\to(x\to y))\to y))\in F$。由命题 11(2)可得，$x\to((x\to(x\to y))\to y)\in F$，则$(x\to(x\to y))\to(x\to y)\in F$。又 $F\subseteq G$ 且 G 是 L 的 MP 滤子，从而 $x\to y\in G$。再由命题 11(2)可得，G 也是正蕴涵 MP 滤子。

命题 13 设 L 是 R_0 代数，F 是 L 的布尔 MP 滤子当且仅当 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子。

证明 由命题 6 可知，必要性显然成立。下面证明充分性。假设 F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子。$\forall x\in L$，若 $x'\to x\in F$，$x'\to x=x'\to(x')'=x'\to(x'\to 0)\in F$，由命题 11(2)可得，$x'\to 0\in F$，则 $x'\to 0=(x')'=x\in F$，由命题 7 可得，F 是 L 的布尔 MP 滤子。

推论 4 设 L 是 R_0 代数，F 是 L 的 MP 滤子，则以下条件等价：

（1）F 是 L 的正蕴涵 MP 滤子；

（2）$\forall x,y,z\in L$，若 $x\to(z'\to y)\in F$，$y\to z\in F$，则 $x\to z\in F$；

（3）$\forall x,y\in L$，若$(x\to y)\to x\in F$，则 $x\in F$。

4 固执 MP 滤子

定义 8 设 L 是 R_0 代数，F 是 L 的真滤子，称 F 是 L 的固执 MP 滤子，如果有

$(\mathbf{F}_4)$ $\forall x,y\in L$，当 $x,y\notin F$ 时，有 $x\to y$，$y\to x\in F$。

例 2 在例 1 中取 $F=\{b,c,d,1\}$，则容易验证 F 是 L 的一个固执滤子。

命题 14 设 L 是 R_0 代数，F 和 G 都是 L 的真 MP 滤子，且 $F\subseteq G$。如果 F 是固执 MP 滤子，则 G 也是固执 MP 滤子。

证明 $\forall x,y\in L$，当 $x,y\notin G$ 时，由于 $F\subseteq G$，则 $x,y\notin F$。由于 F 是固执 MP 滤子，则有 $x\to y$，$y\to x\in F$，从而 $x\to y$，$y\to x\in G$。所以 G 也是固执 MP 滤子。

命题 15 设 L 是 R_0 代数，则以下结论等价：

（1）F 是极大正蕴涵 MP 滤子；

（2）F 是 L 的固执 MP 滤子。

证明

（1）⇒（2） 假设 F 是极大正蕴涵 MP 滤子。$\forall a,b\in L$，当 $a,b\notin F$ 时，因为 F 是正蕴涵 MP 滤子，所以由命题 10 可知 $F_a=\{x\in L|a\to x\in F\}$是包含 F 和 a 的最小 MP 滤子。利用 F 的极大性，有 $F_a=L$，故 $b\in F_a$，即 $a\to b\in F$。类似地有 $b\to a\in F$。因此 F 是 L 的固执 MP 滤子。

（2）⇒（1） 假设 F 是 L 的固执 MP 滤子。首先证明 F 是正蕴涵 MP 滤子。设 $\forall x\in L$，若 $x'\to x\in F$，假设 $x\notin F$。由于 F 是真 MP 滤子，则 $0\notin F$。又 F 是 L 的固执 MP 滤子，则 $x'=x\to 0\in F$，所以 $x\in F$。这与 $x\notin F$ 的假设相矛盾。所以 $\forall x\in L$，若 $x'\to x\in F$，都有 $x\in F$。说明 F 是布尔 MP 滤子。再由命题 13 得，F 是正蕴涵 MP 滤子。下面证明 F 的极大性。设 $\forall a,x\in L$，且 $a\notin F$，由命题 10 可得，$F_a=\{x\in L|a\to x\in F\}$ 是包含 F 和 a 的最小 MP 滤子。因此，当 $x\notin F$ 时，由 F 是固执 MP 滤子可得 $a\to x\in F$，则 $x\in F_a$。当 $x\in F$ 时，$x\in F_a$。当 $a\notin F$ 时，$F_a=L$。即证明了 F 的极大性。说明 F 是极大正蕴涵 MP 滤子。

推论 5 设 L 是 R_0 代数，则 L 上的每一个正蕴涵 MP 滤子都可以扩充为 L 上的固执 MP 滤子。

命题 16 设 L 是 R_0 代数，若 F 是 L 的固执 MP 滤子，则 F 是 L 的素 MP 滤子。

证明 $\forall x,y\in L$，分以下情况讨论：

（1）当 $x,y\in F$ 时，$x\to y$，$y\to x\in F$；

（2）当 $x\in F$，但 $y\notin F$ 时，$x\leqslant x\to y$，则 $x\to y\in F$；

（3）当 $y\in F$，但 $x\notin F$ 时，$y\leqslant y\to x$，则 $y\to x\in F$；

（4）当 $x,y\notin F$ 时，由于 F 是 L 的固执 MP 滤子，则有 $x\to y$，$y\to x\in F$。

综上所述，$\forall x,y\in L$，$x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$。由命题 2 可知，F 是 L 的素 MP 滤子。

命题 17 设 L 是 R_0 代数，F 是 L 的超 MP 滤子当且仅当 F 是 L 的固执 MP 滤子。

证明 假设 F 是 L 的超 MP 滤子，则 F 是 L 的真 MP 滤子，且 $\forall x,y\in L$，当 $x,y\notin F$ 时，则 $x'\in F$，$y'\in F$。从而 $x'\to y'=y\to x\in F$，$y'\to x'=x\to y\in F$，所以 F 是 L 的固执 MP 滤子。反过来，假设 F 是 L 的固执 MP 滤子，则 F 是 L 的真 MP 滤子，且 $\forall x\in L$，当 $x\notin F$ 时，由于 $0\notin F$，则 $x'=x\to 0\in F$。当 $x'\notin F$，则 $x=x'\to 0\in F$，即 $x\in F$。所以 F 是 L 的超 MP 滤子。

参考文献：

[1] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理引论[M].2 版.北京：科学出版社，2006.

[2] Liu L Z，Li K T.Fuzzy implicative and Boolean filters of R_0-algebras[J].Information Sciences，2005，171：61-71.

[3] 裴道武.R_0-代数中的蕴涵滤子与同余关系[J].西安联合大学学报，2000，3(4)：24-29.

[4] 张小红，薛占熬，马盈仓.R_0-代数(NM-代数)的布尔 MP 滤子与布尔 MP 理想[J].工程数学学报，2005，22(2)：287-294.

[5] Liu L Z，Li K T.Fuzzy Boolean and positive implicative filters of BL-algebras[J].Fuzzy Sets and Systems，2005，152：333-348.

[6] 王学芳，徐扬，宋振明.格蕴涵代数中滤子的若干研究[J].西南交通大学学报，2001，36(5)：536-539.

[7] 王国俊.MV 代数，BL 代数，R_0代数与多值逻辑[J].模糊系统与数学，2002，16(2)：1-15.

[8] Kim K H，Zhang Q，Young Bae Jun.On fuzzy filters of MTL-algebras[J].J Fuzzy Math，2002，10(4)：981-989.