

Bézier 曲线的三角扩展

耿紫星, 张贵仓

GENG Zi-xing, ZHANG Gui-cang

西北师范大学 数学与信息科学学院, 兰州 730070

Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

E-mail: xingxing66_0@tom.com

GENG Zi-xing, ZHANG Gui-cang. Trigonometric extension of Bézier curve. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(26): 59-61.

Abstract: One kind of curve with a shape control parameter is defined, which is an extension of the Bézier curve. Its base representation is presented. Meanwhile, the properties, application of the curve and its basis functions have been studied. The G_1 and G_2 continuity conditions of two-piece of the curves is also discussed. This curve not only resolves the expand problem of the Bézier curve, and can also precisely represent or approach quadric curves through changing the value of the shape parameters, such as circular arcs, ellipses etc. Some examples about how to precisely represent or approach a circular arc are given in this paper. This curve has high applied value in the curve design practice.

Key words: Bézier curve; curve design; shape control parameters

摘 要: 利用含有三角函数的 T-Bézier 曲线, 结合加权的思想对 Bézier 曲线进行了扩展, 给出了扩展曲线的基函数表达式, 研究了曲线的性质、拼接及应用, 通过调节形状参数的值可以精确表示或者逼近圆、椭圆等二次曲线, 给出了精确表示和逼近圆的实例, 该曲线在结合圆锥曲线的自由曲线设计中具有较高的应用价值。

关键词: Bézier 曲线; 曲线设计; 形状参数

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.26.017 文章编号: 1002-8331(2008)26-0059-03 文献标识码: A 中图分类号: TP391

1 前言

Bézier 曲线是一种重要的自由曲线曲面造型方法, 它以逼近思想为基础, 且具有很多优良性质, 在计算机辅助几何设计(CAGD)中得到了广泛应用^[1]。但 Bézier 曲线是一种刚性的方法, 控制多边形确定了之后曲线也就确定了, 要修改曲线的形状, 只能重新调整控制多边形, 再一次计算曲线方程, 计算量大, 曲线的修改相当不便。有理 Bézier 曲线的权因子能起到调整曲线曲面形状的作用, 但这种有理化的方法出现了分母, 在具体的数值算法中会出现渐进问题。最近国内外一批学者对各种刚性曲线曲面造型方法的扩展进行了深入研究^[2-12]。Bézier 曲线的扩展自然也是研究的热点之一。文献[2-4]中研究了不同次数的 Bézier 曲线的扩展, 通过增加基函数的次数, 利用给基函数加入控制参数构造调配函数的方法, 得到了带形状参数的 Bézier 曲线曲面, 分析了它们的几何性质及拼接等应用问题。文献[10]利用奇异混合函数构造了奇异混合 Bézier 曲线及其基函数表达式, 得到了 Bézier 曲线的一种扩展。

作者以 Bézier 曲线和 T-Bézier 曲线^[13-15]为工具, 结合加权的思想, 得出一种新的 Bézier 曲线扩展— λ T-Bézier 曲线,

给出了其基函数表达式。讨论了曲线的性质、拼接、应用等。当参数 $\lambda=0$ 时, λ T-Bézier 曲线退化为 λ T-Bézier 曲线; 当参数 $\lambda=1$ 时, λ T-Bézier 曲线退化为 Bézier 曲线。由于 T-Bézier 曲线可以精确表示圆锥曲线, λ T-Bézier 曲线继承了这一优良性质, 所以 λ T-Bézier 曲线不仅解决了 Bézier 曲线的扩展问题, 还克服了 Bézier 曲线不能精确表示除抛物线以外的圆锥曲线的不足, 给出了通过调节 λ 的值对圆进行精确表示和逼近的实例。

2 Bézier 曲线与 T-Bézier 曲线

2.1 Bézier 曲线

设 $u \in [0, 1]$, 表达式

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) V_i \quad (1)$$

为 n 次 Bézier 曲线。其中 $V_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为特征多边形顶点。 $B_{i,n}(u) (i=0, 1, \dots, n)$ 为 Bernstein 多项式。由于 Bernstein 多项式具有正性、混合性、对称性、端点性质、递推性等良好的性质, Bézier 曲线也具有如下优越性质:

基金项目: 国家教育部重点科学技术项目(No.204143)。

作者简介: 耿紫星(1982-), 男, 硕士, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、图形学; 张贵仓(1964-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、图形学、数字水印等。

收稿日期: 2007-11-08 修回日期: 2008-01-25

(1)几何不变性:曲线的形状仅取决于特征多边形的顶点分布,与坐标系的选取无关。

(2)凸包性:曲线完全被包在由特征多边形形成的凸包内。

(3)对称性:将控制多边形顶点顺序取反,定义的是同一条曲线,与原曲线仅仅方向相反,形状相同。

(4)端点性质:曲线自首顶点 V_0 开始,至末顶点 V_n 结束,即 $\begin{cases} p(0)=V_0 \\ p(1)=V_n \end{cases}$, 曲线和特征多边形的首末边相切,首末端切矢的

模长分别等于首末边边长的 n 倍,即 $\begin{cases} p'(0)=n(V_1-V_0) \\ p'(1)=n(V_n-V_{n-1}) \end{cases}$ 。

(5)变差缩减性(V.D.):在平面内,曲线与任意一条直线的交点的个数不多于其相应得控制多边形与这条直线的交点的个数。

2.2 T-Bézier 曲线

定义1 设 $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, T-Bézier 曲线表达式为 $Q(u) = \sum_{i=0}^n T_{i,n}(u)V_i$, 其中 $V_i (i=0, 1, \dots, n)$ 同样为特征多边形顶点。 $T_{i,n}(u) (i=0, 1, \dots, n)$ 为 T-Bézier 曲线基函数,具有和 Bernstein 多项式类似的性质:正性、混合性、对称性、端点性质等。 $n=3$ 时

$$\begin{cases} T_{0,3}(u) = \frac{3}{2} - 2\sin u - \frac{1}{2} \cos 2u \\ T_{1,3}(u) = -1 + 2\sin u + \cos 2u \\ T_{2,3}(u) = -1 + 2\cos u - \cos 2u \\ T_{3,3}(u) = \frac{3}{2} - 2\cos u + \frac{1}{2} \cos 2u \end{cases}$$

由于 T-Bézier 曲线具有和 Bernstein 多项式类似的性质, T-Bézier 曲线也具有 Bézier 曲线的相似性质:几何不变性、凸包性、对称性、端点性质、变差缩减性(V.D.)等。

3 λ T-Bézier 曲线及其基函数的结构与性质

定义2 设 $u \in [0, 1], w \in [0, \frac{\pi}{2}], V_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为控制多边形顶点, $P(u)$ 为定义于该控制多边形的 n 次 Bézier 曲线, $Q(w)$ 为定义于该控制多边形的 T-Bézier 曲线,作参数变换 $w = \frac{\pi}{2}u$, 得到变换后的 T-Bézier 曲线 $Q(\frac{\pi}{2}u)$, 引入形状参数 $\lambda \in [0, 1]$, 定义含有形状参数 λ 的一类曲线

$$C(u) = \lambda P(u) + (1-\lambda)Q(\frac{\pi}{2}u) \quad (2)$$

为 N 次 λ T-Bézier 曲线。

$$C(u) = \lambda P(u) + (1-\lambda)Q(\frac{\pi}{2}u) =$$

$$\lambda \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)V_i + (1-\lambda) \sum_{i=0}^n T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u)V_i = \sum_{i=0}^n [\lambda B_{i,n}(u) + (1-\lambda)T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u)]V_i$$

令 $D_{i,n}(u) = \lambda B_{i,n}(u) + (1-\lambda)T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u)$, 其中 $B_{i,n}(u)$ 为 Bernstein 多项式, $T_{i,n}(u)$ 为 T-Bézier 曲线基函数, λ T-Bézier 曲线可以表示成如下的基函数表达式

$$C(u) = \sum_{i=0}^n D_{i,n}(u)V_i \quad (3)$$

称 $D_{i,n}(u)$ 为 λ T-Bézier 曲线基函数。 $n=3$ 时

$$\begin{cases} D_{0,3}(u) = \lambda(1-u)^3 + (1-\lambda)[\frac{3}{2} - 2\sin \frac{\pi u}{2} - \frac{1}{2} \cos \pi u] \\ D_{1,3}(u) = 3\lambda u(1-u)^2 + (1-\lambda)[-1 + 2\sin \frac{\pi u}{2} + \cos \pi u] \\ D_{2,3}(u) = 3\lambda u^2(1-u) + (1-\lambda)[-1 + 2\cos \frac{\pi u}{2} - \cos \pi u] \\ D_{3,3}(u) = \lambda u^3 + (1-\lambda)[\frac{3}{2} - 2\cos \frac{\pi u}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi u] \end{cases} \quad (4)$$

如图1和图2分别为 $n=3$ 参数 $\lambda=0.3$ 时的 λ T-Bézier 曲线基函数和三次 Bernstein 多项式的图形。

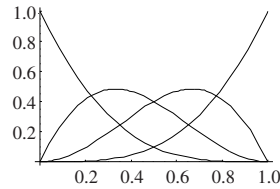


图1 $n=3$ 参数 $\lambda=0.3$ 时的 λ T-Bézier 曲线基函数

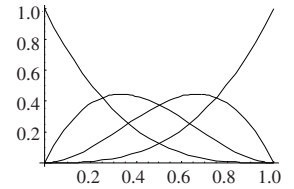


图2 三次 Bernstein 多项式的图形

λ T-Bézier 曲线基函数 $D_{i,n}(u)$ 具有和 Bernstein 多项式相似的形状和性质。

性质1 非负性 $D_{i,n}(u) \geq 0$

由于 $\lambda \in [0, 1], u \in [0, 1]$ 时, $B_{i,n}(u) \geq 0$ 且 $T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u) \geq 0$, 则 $D_{i,n}(u) = \lambda B_{i,n}(u) + (1-\lambda)T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u) \geq 0$ 。

性质2 权性 $\sum_{i=0}^n D_{i,n}(u) \equiv 1$

由 $B_{i,n}(u)$ 和 $T_{i,n}(u)$ 的权性可以得到 $D_{i,n}(u)$ 的权性。

性质3 对称性 $D_{i,n}(u) = D_{n-i,n}(1-u)$

由于 $B_{i,n}(u) = B_{n-i,n}(1-u), T_{i,n}(u) = T_{n-i,n}(\frac{\pi}{2}-u)$, 所以

$$D_{i,n}(u) = \lambda B_{i,n}(u) + (1-\lambda)T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u) =$$

$$\lambda B_{n-i,n}(1-u) + (1-\lambda)T_{n-i,n}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u) = D_{n-i,n}(1-u)$$

性质4 端点性质

$$D_{0,n}(0) = D_{n,n}(1) = 1$$

$$D_{0,n}(1) = D_{n,n}(0) = 0$$

$$\begin{cases} D_{i,n}(0) = 0 \\ D_{i,n}(1) = 0 \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

由 Bernstein 多项式和 T-Bézier 曲线基函数的端点性质可以证明。

性质5 退化性

当参数 $\lambda=0$ 时, λ T-Bézier 曲线基函数 $D_{i,n}(u)$ 退化为

$T_{i,n}(\frac{\pi}{2}u)$, 即伸缩变换了的 T-Bézier 曲线基函数;

当参数 $\lambda=1$ 时, λ T-Bézier 曲线基函数 $D_{i,n}(u)$ 退化为 Bernstein 多项式 $B_{i,n}(u)$ 。

4 λ T-Bézier 曲线的性质

由 λ T-Bézier 曲线基函数的性质, 可以得到 λ T-Bézier 曲线的各种性质。

性质 6 几何不变性

λT -Bézier 曲线的表达式(3)为矢量函数,且有 $\sum_{i=0}^n D_{i,n}(u) \equiv 1$,

所以 λT -Bézier 曲线的形状和 Bézier 曲线的形状同样只与特征多边形的顶点有关,而与坐标系的选取无关。

性质 7 凸包性

λT -Bézier 曲线基函数具有非负性和权性,可以得到 λT -Bézier 曲线的凸包性, λT -Bézier 曲线被完全包容在由特征多边形形成的凸包内。

性质 8 对称性

由 $D_{i,n}(u) = D_{n-i,n}(1-u)$,故给定了特征多边形顶点 $V_i (i=0, 1, \dots, n)$,从 V_0 出发构造的 λT -Bézier 曲线和从 V_n 出发反向地构造的 λT -Bézier 曲线形状完全相同,只是曲线的方向相反。

性质 9 端点性质

λT -Bézier 曲线从首顶点 V_0 开始,至末顶点 V_n 结束,即

$$\begin{cases} C(0) = V_0 \\ C(1) = V_n \end{cases}$$

λT -Bézier 曲线和特征多边形的首末边相切,即

$$\begin{cases} C'(0) = k(V_1 - V_0) \\ C'(1) = k(V_n - V_{n-1}) \end{cases}$$

性质 10 变差缩减性(V.D.)

由 λT -Bézier 曲线的表达式(2), λT -Bézier 曲线是 Bézier 曲线与 T-Bézier 曲线的加权平均,由 Bézier 曲线与 T-Bézier 曲线的变差缩减性可以推出 λT -Bézier 曲线的变差缩减性。

性质 11 退化性

由 λT -Bézier 曲线的表达式(2)可以直接导出其退化性,当参数 $\lambda=0$ 时, λT -Bézier 曲线退化为 T-Bézier 曲线;当参数 $\lambda=1$ 时, λT -Bézier 曲线退化为 Bézier 曲线。 λT -Bézier 曲线的退化性说明了 λT -Bézier 曲线是 Bézier 曲线的一种扩展。

5 T-Bézier 曲线的拼接与应用

由于在实际设计曲线时,人们多用的是低次的参数曲线,就 Bézier 曲线而言常用的是三次 Bézier 曲线,所以本文讨论 $n=3$ 时 λT -Bézier 曲线的拼接与应用。

5.1 λT -Bézier 曲线的拼接

设两条 λT -Bézier 曲线 $C_1(u)$ 和 $C_2(w)$,其特征顶点分别为 $V_i (i=0, 1, 2, 3)$ 和 $A_i (i=0, 1, 2, 3)$,参数分别为 λ_1 和 λ_2 ,

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^3 D_{i,3} V_i, C_2(w) = \sum_{i=0}^3 D_{i,3} A_i.$$

定理 1 设 V_3 和 P_0 重合, $V_2 V_3$ 和 $P_0 P_1$ 共线且同向,即

$$V_2 V_3 = \beta P_0 P_1 (\beta > 0) \quad (5)$$

则 $C_1(u)$ 和 $C_2(w)$ 是 G_1 连续的。

由式(3)和式(4)得

$$C'_1(1) = [-\pi(1-\lambda_1) - 3\lambda_1]V_2 + [\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1]V_3$$

$$C'_2(0) = [-\pi(1-\lambda_2) - 3\lambda_2]P_0 + [\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2]P_1$$

$C_1(u)$ 和 $C_2(w)$ 要满足 G_1 连续即要满足: $C_1(1) = C_2(0)$ 且 $C'_1(1) = \alpha C'_2(0) (\alpha > 0)$,由 $C_1(1) = V_3$ 、 $C_2(0) = P_0$ 和 $[-\pi(1-\lambda_1) - 3\lambda_1]V_2 + [\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1]V_3 = \alpha[-\pi(1-\lambda_2) - 3\lambda_2]P_0 + \alpha[\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2]P_1$ 可以验证上述定理,其中当 $\beta = \frac{\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2}{\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1}$ 时, $C_1(u)$ 和 $C_2(w)$

是 C_1 连续的。

定理 2 在满足 G_1 连续性条件下,如果满足式(6),则 $C_1(u)$ 和 $C_2(w)$ 是 G_2 连续的。

$$\frac{|\pi(1-\lambda_1) + 12|d_1|}{|\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1|} = \frac{|\pi(1-\lambda_2) + 12\pi|\beta^3 d_2|}{|\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2|} \quad (6)$$

其中 d_1 是 V_1 到 $V_2 V_3$ 的距离, d_2 是 P_2 到 $P_0 P_1$ 的距离。

要使 $C_1(u)$ 和 $C_2(w)$ 两段 λT -Bézier 曲线 G_2 连续,要求在连接点处曲率相等,即

$$\frac{|C'_1(1) \times C''_1(1)|}{|C'_1(1)|^3} = \frac{|C'_2(0) \times C''_2(0)|}{|C'_2(0)|^3} \quad (7)$$

由式(3)和式(4)得

$$C'_1(1) = [\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1]V_2 V_3$$

$$C''_1(1) = [\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_1) + 6\lambda_1]V_2 V_3 + [\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_1) + 6\lambda_1]V_2 V_1$$

$$C'_2(0) = [\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2]P_0 P_1$$

$$C''_2(0) = [\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_2) + 6\lambda_2]P_0 P_1 + [\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_2) + 6\lambda_2]P_1 P_2$$

代入式(7)得

$$\frac{|\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_1) + 6\lambda_1| |V_2 V_3 \times V_2 V_1|}{|\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1|^2 |V_2 V_3|^3} = \frac{|\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_2) + 6\lambda_2| |P_0 P_1 \times P_1 P_2|}{|\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2|^2 |P_0 P_1|^3}$$

结合 G_1 连续性条件得

$$\frac{|\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_1) + 6\lambda_1| |S_{\Delta V_1 V_2 V_3}|}{|\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1|^2 \beta^3} = \frac{|\frac{1}{2}\pi^2(1-\lambda_2) + 6\lambda_2| |S_{\Delta P_0 P_1 P_2}|}{|\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2|^2}$$

$$\frac{|\pi(1-\lambda_1) + 12|d_1|}{|\pi(1-\lambda_1) + 3\lambda_1|} = \frac{|\pi(1-\lambda_2) + 12\pi|\beta^3 d_2|}{|\pi(1-\lambda_2) + 3\lambda_2|}$$

5.2 λT -Bézier 曲线的应用**5.2.1 形状参数 λ 的应用**

由于 λT -Bézier 曲线带有形状参数 λ ,所以当控制多边形给定之后,依然还可以利用改变形状参数 λ 的值来调节曲线的形状,为了保证曲线的各种性质本文开始定义 $\lambda \in [0, 1]$,在实际设计时根据设计者的要求 λ 也可以取小于 0 和大于 1 的数,但应尽量避免取太大或太小的数,否则曲线会失去原来的一些良好的性质,如凸包性等,还会出现多余的拐点,如图 3 中为控制顶点分别为 $P_0(-2, 0)$ 、 $P_1(-1, 3)$ 、 $P_2(1, 3)$ 、 $P_3(2, 0)$, λ 从上到下分别取 -2 、 -1 、 0 、 0.3 、 0.5 、 0.8 、 1 、 2 、 4 、 5 所得到的曲线。当 $\lambda=0$ 时,曲线退化为 T-Bézier 曲线;当 $\lambda=1$ 时,曲线退化为三次 Bézier 曲线。

5.2.2 圆的拟合与精确表示

由于 λT -Bézier 曲线是 Bézier 曲线的扩展同时也是 T-Bézier 曲线的扩展,所以它继承了 T-Bézier 曲线的一些优秀性质,如圆锥曲线的精确表示,同时 Bézier 曲线也可以较准确地逼近圆,所以 λT -Bézier 曲线通过选取不同的参数可以不同程度的逼近圆,也可以精确表示圆,如图 4 从左到右为 λ 分别取 0 、 0.5 、 1 所得到的曲线,其中当 $\lambda=0$ 时,曲线退化为 T-Bézier 曲线,即对圆的精确表示, $\lambda=0.5$ 和 $\lambda=1$ 都是对圆的不同程度逼近。

5.2.3 花瓣图形

和 Bézier 曲线一样,当控制多边形的首末顶点重合时, λT -Bézier 曲线是闭合的,如图 5 分别取 -2 、 0 、 0.3 、 0.5 、 0.8 、 1 、 2 、 4 、 5 时得到的闭曲线为各种形状的花瓣图形。