第 16 卷 第 6 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 16, No. 6
1992 年 6 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　June, 1992

Z_N 规范理论修正的 MK 变换

阎 循 领
(聊城师范学院物理系,山东聊城 252059)

摘　　要

本文导出了格点规范体系修正后的 Migdal-Kadanoff 递推关系，并对 Z_4 体系的相图进行了计算. 结果表明得出的固定点和相图比用 MK 近似计算在数值上更接近于 Monte Carlo 模拟的结果. 这说明修正后的递推关系比用 MK 关系更有意义.

一、引　　言

在格点规范理论中，一个重要问题是研究其相变结构. 由 Migdal 和 Kadanoff 给出了零级近似下的 MK 递推关系,即在作用量和配分函数无修正.

$$S(U_\Gamma)=\sum_n \beta_n \chi^n(U_\Gamma), \tag{1}$$

$$\exp S(U_\Gamma)=\sum_n b_n \chi^n(U_\Gamma) \tag{2}$$

(其中 β_n 为耦合常数，b_n 为展开系数)的情况下得出的 MK 递推关系[1]:

$$a\frac{\mathrm{d}\beta_n}{\mathrm{d}a}=(d-2)\beta_n+2\sum_m \frac{\partial\beta_n}{\partial b_m}\ln(b_m/d_m), \tag{3}$$

其中 a 为格距. 由 Roberts 等人[2]根据 MK 递推关系曾对 Z_4 体系进行了计算,得出的相图和固定点比用 Monte Carlo 模拟的结果[3]少一个重要的库仑相和分叉固定点. 后来,为了克服这一缺陷,又采用 Parisi-MK 一级近似[4],即仍采用零级 MK 递推关系,并把作用量和配分函数修正为

$$S(U_\Gamma)=\sum_n\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_n\chi^n(U_\Gamma), \tag{4}$$

$$\exp S(U_\Gamma)=\sum_n\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_n\chi^n(U_\Gamma); \tag{5}$$

这里 ε 为修正参数 ($0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$)，把 b_n 和 β_n 的关系代入零级 MK 关系，然后采用 Parisi 作用量各向同性法,计算出的相图定性地与用 Monte Carlo 模拟的结果相一致,但在数值上有很大差距，这说明需要进一步完善. 本文给出了修正后的 MK 递推关系式，

本文 1991 年 6 月 24 日收到.

作为例子并对 Z_4 体系进行了计算,发现其数值更接近于 Monte Carlo 模拟的值.

二、修正后的 MK 递推关系

我们讨论具有最一般相互作用形式的 Z_N 规范理论. 体系的作用量和配分函数分别为

$$S=\sum_{\Gamma} S(U_{\Gamma}), \tag{6}$$

$$Z=\mathrm{Tr}_{\mu}\exp S, \tag{7}$$

这里 Tr_{μ} 为统计求和算符. 它们修正后的特征标展开为

$$S(U_{\Gamma})=\sum_{n}\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_{n}\chi^{n}(U_{\Gamma}), \tag{8}$$

$$\exp S(U_{\Gamma})=\sum_{n}\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}\chi^{n}(U_{\Gamma}), \tag{9}$$

这里 $\chi^{n}(U)$ 为群 U 的特征标. 对这耦合常数 β_n 和展开系数 b_n 进行重整化变换: $a\to\lambda a$, 在 x 方向抽取,并取 $\lambda=2$ 即抽取一次. 由于势移动,这时耦合常数变化为:

$$\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_{n}^{(\mu,\nu)}\to 2\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_{n}^{(\mu,\nu)},\ (\mu,\nu\neq x), \tag{10}$$

$$\exp S^{(y,\nu)}(U)\to\int \mathrm{d}U'\exp S^{(y,\nu)}(U')\exp S^{(y,\nu)}(U'^{-1}U). \tag{11}$$

由(11)式并利用特征标的性质和展开公式,得

$$\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}^{(y,\nu)}\to d_{n}^{-1}\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}^{(y,\nu)}\right]^{2}. \tag{12}$$

利用关系式 $\lambda=1+\Delta$ (Δ 为改变量),使 $\lambda a\to a+\Delta a$, 则(10)式和(12)式分别变成为

$$\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_{n}^{(\mu,\nu)}\to(1+\Delta)\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_{n}^{(\mu,\nu)}, \tag{13}$$

$$\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}^{(y,\nu)}\to\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}^{(y,\nu)}\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}^{(y,\nu)}\Big/d_{n}\right]^{\Delta}. \tag{14}$$

令 $\Delta\to 0$, 将变换延拓到连续情况,由(13)式和(14)式可以得到在势移动方向上无穷小抽取变换的递推关系

$$a\frac{\mathrm{d}\beta_{n}}{\mathrm{d}a}=(d-2)\beta_{n},\ (\mu,\nu\neq x), \tag{15}$$

$$a\frac{\mathrm{d}b_{n}}{\mathrm{d}a}=2b_{n}\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_{n}\Big/d_{n}\right]. \tag{16}$$

这里(15)式中因子 $(d-2)$ 是由于 d 维体系进行完全重整化群变换要经过 $(d-2)$ 次势移动,(16)式中因子 2 是由于规范体系的变换要抽取两次. 由(15)和(16)式可以得出总的变换公式:

$$a\frac{\mathrm{d}\beta_n}{\mathrm{d}a}=(d-2)\beta_n+2\sum_m\frac{\partial\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_n}{\partial\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_m}b_m\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_m/d_m\right]. \tag{17}$$

三、Z_4 体系的相结构

对于 Z_4 体系（$n=3$），我们在 x 方向仍采用零级近似，即令 $\varepsilon=0$，而在 y 方向进行 ε 修正，这时作用量和配分函数的特征标展开为

$$S(U)=\beta_0+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)(U+U^3)\beta_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)U^2\beta_2, \tag{18}$$

$$\exp S(U)=b_0+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)(U+U^3)b_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2. \tag{19}$$

将 (18) 式代入 (19) 式得

$$\begin{aligned}&\exp\left[\beta_0+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)(U+U^3)\beta_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)U^2\beta_2\right]\\&=b_0+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)(U+U^3)b_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)U^2b_2].\end{aligned} \tag{20}$$

在上式中，取遍群的所有元素 $U\in Z_4\{\pm i,\pm 1\}$ 得

$$\left.\begin{aligned}&b_0=(x_0+x_1+x_2)/4,\\&b_1=(x_0-x_1)\Big/4\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right),\\&b_2=(x_0+x_1-2x_2)\Big/4\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right);\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&x_0=\exp\left[2\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_2\right],\\&x_1=\exp\left[-2\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_1+\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_2\right],\\&x_2=\exp\left[-\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_2\right].\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

另外，由 (20) 式也可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_1=\frac{1}{4}\ln(Y_0/Y_1),\\&\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\beta_2=\frac{1}{4}\ln(Y_0Y_1/Y_2),\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= b_0 + 2\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_1 + \left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2, \\ Y_1 &= b_0 - 2\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_1 + \left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2, \\ Y_3 &= b_0 - \left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

将(21)和(23)式代入(17)式，并应用固定点方程 $a\dfrac{\mathrm{d}\beta_n}{\mathrm{d}a}=0$，可得到

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 + (Z_0/Y_0 - Z_1/Y_1) = 0, \\ &\beta_2 + (Z_0/Y_0 + Z_1/Y_1 - 2Z_2/Y_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= b_0\ln b_0 + 2b_1\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_1\right] + b_2\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2\right], \\ Z_1 &= b_0\ln b_0 + b_1\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_1\right] - b_2\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2\right], \\ Z_3 &= b_0\ln b_0 - b_2\ln\left[\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon\right)b_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

当然，仅在 y 方向进行修正而在 x 方向不进行修正，就人为地破坏了体系原有的各向同性。因此，采用 Parisi 等人提出的将各向异性的作用量投影到各向同性的作用量空间上去的方法，此时有

$$\beta_n = \frac{1}{2}(\beta_n^x + \beta_n^y). \tag{27}$$

在(27)式中我们取

$$\left.\begin{aligned} \beta_1' &= \beta_1^x = \beta_1^y, \\ \beta_2' &= \frac{1}{2}(\beta_2^x + \beta_2^y), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

然后考虑到 Parisi 修正的固定点方程的解

$$\beta_n(\varepsilon) = \beta_n^{(0)} + \varepsilon\beta_n^{(1)}, \tag{29}$$

及约束条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}\beta_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=1} = 0. \tag{30}$$

为了满足约束条件(30)式，最为简单的形式是取 $\beta_\varepsilon(\varepsilon)$ 为

$$\beta_\varepsilon(\varepsilon) = \beta^{(0)} + \beta^{(1)}\varepsilon\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right), \tag{31}$$

再使 ε 延拓到 1，最后给出固定点的位置：

A: $\beta_1 = 0.47315$, $\beta_2 = 0$;

B: $\beta_1 = 0.2887$, $\beta_2 = 0.2910$;

C: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.4651$;

D: $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

E: $\beta_1=0$, $\beta_2=-0.4651$;

F: $\beta_1=0.4960$, $\beta_2=-0.0106$;

G: $\beta_1=\infty$, $\beta_2=\infty$.

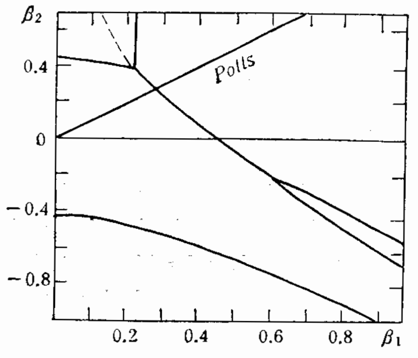

图 1

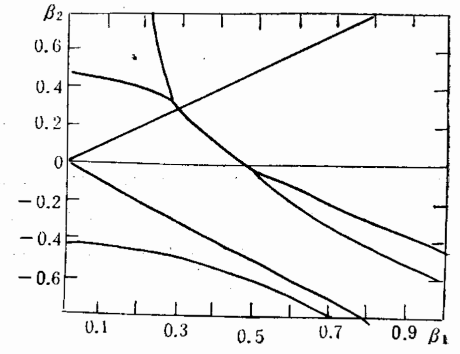

图 2

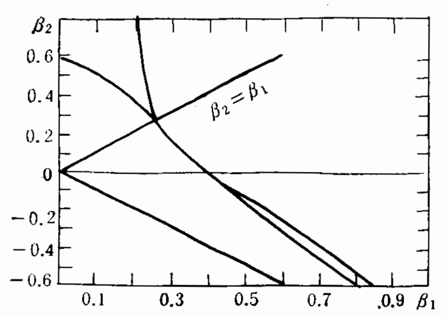

图 3

通过画流线可以得出其相图如图 2 所示。将图 2 与用 Monte Carlo 模拟的相图(见图 1)及 Parisi-MK 计算的相图(见图 3)相比较，可以看出，用修正后的 MK 递推关系计算出的相图在数值上更加接近 Monte Carlo 模拟的结果，这样我们就克服了 P-MK 近似结果与用 Monte Carlo 模拟的结果只在定性上相一致的局限性。这表明，我们所给出的修正后的 MK 递推关系比 MK 递推关系更有意义。

参　考　文　献

[1] A. A. Migdal, *ZhETF (USSR)*, **69**(1975), 810, 1457;
L. P. Kadanoff, *Ann. Phys.*, **100**(1976), 359; *Rev. Mod. Phys.*, **49**(1977), 267.

[2] M. Creutz and L. E. Roberts, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7] (1983), 447.

[3] M. Fukugita and M. Kobayashi, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7] (1983), 289.

[4] L. E. Roberts, *Nucl. Phys.*, **B230**[FS10] (1984), 385.

Corrected MK Transformation of Z_N Gauge Theory

YAN XUNLING

(*Department of Physics, Liaocheng Teachers' College., Shandong Liaocheng* 252059)

ABSTRACT

The corrected Migdal-Kadanoff recurrence relations of lattice gauge systems is obtained and the phase diagram of Z_4 system is calculated. It is found that the fixed point and the phase diagram obtained in this paper are numerically closer to that given by Monte Carlo simulation. Therefore, the corrected recurrence relation is more significant than MK relation.