第23卷 第9期 高能物理与核物理 Vol.23, No.9
1999 年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sep., 1999

三角 Calogero-Moser 模型的非动力学 r 矩阵结构*

甄 翼 杨文力 侯伯宇 陈 凯

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 通过一定规范变换,构造了三角 Calogero-Moser 模型一种新的 Lax 算子,使其具有相应的非动力学 r 矩阵结构. 同时发现该 r 矩阵结构与三角 Ruijsenaars-Schneider 模型的 r 矩阵完全相同.

关键词 三角 Calogero-Moser 模型 规范变换 非动力学结构 Lax 算子

1 引言

在多粒子系统问题研究中, Calogero-Moser 模型是备受关注的理论模型之一. Calogero-Moser 模型是具有 n 个非相对论粒子的一维可积系统. 相邻的粒子之间具有作用势 $V(q_i - q_j)$, 根据作用势可将其划分为不同类型(有理, 三角, 椭圆). Calogero-Moser 模型重要性在于它渗透于从固体物理到粒子物理等诸多领域[2,3,4,6,8], 并且与共形场理论有联系[5,9]. 近年来围绕 Calogero-Moser 模型的可积性研究发展很快, 但由于用 Lax 对展示其可积性时, Lax 算子选取不理想使得与 Lax 表示相应的 r 矩阵带有动力学特征, 这给进一步推广带来诸多问题. 因此能否选择到一个好的 Lax 表示使其具有相应非动力学 r 矩阵结构成为问题的关键. 椭圆 Calogero-Moser 模型与非动力学 r 矩阵结构已被研究[7]. 本文在三角 Calogero-Moser 模型中对这一问题进行探索. 它的解决将利于更好研究多粒子系统可积性理论.

2 经典 r 矩阵的动力学 twisting

如果一个可积系统可用 Lax 对 (L, M) 展示其可积性, 系统运动方程为:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = [L, M] . \tag{1}$$

其中 [,] 是李代数中定义的括号. 从 (L, M) 容易构造系统的运动可积量 $\mathrm{tr}L^l$ $(l = 1, \cdots\cdots,$

1998-07-15收稿, 1998-10-05收修改稿

* 西北大学校园基金部分资助

n)，trL^l的交换性由基本泊松括号决定

$$\{L_1(u),\ L_2(v)\} = [r_{12}(u,v),\ L_1(u)] - [r_{21}(v,u),\ L_2(v)]\ , \tag{2}$$

其中

$$L_1 = L\otimes 1\ ,\ L_2 = 1\otimes L,\ a_{12} = Pa_{21}P\ . \tag{3}$$

p 是交换算子，r 矩阵由上述方程得出，同一个可积系统可以对应多种 Lax 表示和 r 矩阵，不同的 Lax 表示之间是相互关联的．即假设(L'，M')是该系统的另一种 Lax 表示，则系统运动方程表示为：

$$\frac{\mathrm{d}L'}{\mathrm{d}t} = [L',\ M']\ , \tag{4}$$

并且 L, M, L'，M' 满足

$$L'(u) = g(u)L(u)g^{-1}(u)\ , \tag{5}$$

$$M'(u) = g(u)M(u)g^{-1}(u) - \left(\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}t}\right)g^{-1}(u)\ , \tag{6}$$

(L'，M')有如下 r 矩阵结构

$$\{L_1'(u),\ L_2'(v)\} = [r_{12}'(u,v),\ L_1'(u)] - [r_{21}'(u,v),\ L_2'(v)]\ . \tag{7}$$

因此对于某些可积系统，可通过动力学 twisting 选择到一个好的 Lax 表示使其具有相应非动力学 r 矩阵结构．在这种情形下，相应的 Poisson-Lie 括号变为 Sklyanin 括号，现有可积系统的理论结果可直接应用于其它系统例如 Dressing 变换，量子化等．本文目的就在于为三角 Calogero-Moser 模型构造一个好的 Lax 表示．

3　三角 Calogero-Moser 模型新的 Lax 表示及相应非动力学 r 矩阵

Calogero-Moser 模型是具有二体作用势的 n 个非相对论粒子组成的一维系统．相空间的正则变量 p_i，q_j (i, j = 1, ……, n)满足：

$$\{p_i,\ p_j\} = 0,\ \{q_i,\ q_j\} = 0\ ,\ \{p_i,\ q_j\} = \delta_{ij}\ . \tag{8}$$

三角 Calogero-Moser 模型的哈密顿量[10]

$$H = \sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i/k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2(q_i - q_k)}\ . \tag{9}$$

m 代表粒子质量具有由(13)式所表示的哈密顿量的三角 Calogero-Moser 模型是可积的[7]．它的可积性可用 Lax 表示作为椭圆 Calogero-Moser 模型的极限得到．三角 Calogero-Moser 模型(n=2)的一种 Lax 表示为：

$$L(u)_{\rm CM}=\frac{1}{\sin q_{12}\sin u}\begin{pmatrix}\cos q_{12}\gamma\sin u+p_1\sin q_{12}\sin u & \sin(q_{12}-u)\gamma\\ \sin(q_{12}+u)\gamma & p_2\sin q_{12}\sin u-\cos q_{12}\gamma\sin u\end{pmatrix},$$

$L(u)_{\rm CM}$基本泊松括号满足[7]

$$\{L_{\rm CM}(u)_1,\ L_{\rm CM}(v)_2\}=[r_{12}(u,v),\ L_{\rm CM}(u)_1+L_{\rm CM}(v)_2].\tag{10}$$

值得注意的是上述 Lax 表示对应的 r 矩阵结构是动力学的(即依赖于动力学变量),这使泊松代数不再封闭,因此 Lax 算子的规范变换的选择显得非常重要. 我们发现可以选择到一个好的规范变换使相应 r 矩阵具有非动力学特征并且不破坏系统的可积性. 定义:

$$\phi(u;\ q)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2\cos(q_{12}+u-\gamma) & -2\cos(q_{21}+u-\gamma)\end{pmatrix},$$

定义动力学规范变换因子

$$g(u)_{\rm CM}=\Lambda(q)\times\Phi(u;\ q)=\frac{1}{\sin q_{12}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2\cos(q_{12}+u) & 2\cos(q_{12}-u)\end{pmatrix},$$

其中

$$\Lambda(q)_{ij}=h_i(q)\,\delta_{ij},\quad h_j=\frac{l}{\prod\limits_{l\neq j}\sin q_{lj}}.\tag{11}$$

经直接计算,得到新的 Lax 矩阵 $L'(u)$

$$L'(u)=g(u)L(u)g^{-1}(u)=\frac{1}{4\sin u\sin q_{12}}\begin{pmatrix}A(u) & B(u)\\ C(u) & D(u)\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}A(u)&=2\cos(q_{12}-u)\,p_1-2\cos(q_{12}+u)\,p_2+4\sin q_{12}\cos u\gamma,\\ B(u)&=p_1-p_2,\\ C(u)&=4\cos(q_{12}-u)\cos(q_{12}+u)\,p_2-\\ &\quad 4\cos(q_{12}+u)\cos(q_{12}-u)p_1-8\sin 2q_{12}\gamma,\\ D(u)&=2\cos(q_{12}-u)\,p_2-2\cos(q_{12}+u)\,p_1-4\sin q_{12}\cos u\gamma.\end{aligned}\tag{12}$$

并且得到新的 Lax 算子满足

$$\{L_1(u),\ L_2(v)\}=[r_{12}(u-v),\ L_1(u)+L_2(v)],\tag{13}$$

其中 r 矩阵结构是非动力学的即不依赖于动力学变量, 具体表示为:

$$r_{12}(u-v)=\frac{1}{\sin(u-v)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(u-v) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos(u-v) & 0 \\ 4\sin^2(u-v) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵具有反对称性

$$r(u-v)=-r(v-u),$$

并且可以验证 $r_{12}(u-v)$满足经典 Yang-Baxter 关系

$$[r_{12}(u-v),\ r_{13}(u-\eta)]+[r_{12}(u-v),\ r_{23}(v-\eta)]+[r_{13}(u-\eta),\ r_{23}(v-\eta)]=0. \qquad (14)$$

对三角 Calogero-Moser 模型(n=2)作具体讨论，显示出在特定规范变换下 Lax 算子遵循 Sklyanin 括号且相应的 r 矩阵是 7 顶角量子 R 矩阵的经典极限[1].

4　讨论

本文讨论了 $A_{n-1}^{(1)}$形 Calogero-Moser 模型在 n=2 的情形下具有非动力学 r 矩阵结构. 对于一般 $n>2$ 的情形我们可以将该 r 矩阵直接推广，其结果将在以后的文章中给出.

参　考　文　献

1 Antonov A, Hasegawa K, Zabrodin A. Nucl. Phys., 1997, **B503**:747

2 Awata H, Matsuo Y, Yamamoto T. J. Phys., 1996, **A29**:3089

3 Brink L et al. Nucl. Prorohys, 1995, **B401**:582

4 Camassa R, Holm D. Phys. Rev. Lett., 1993, **71**:1661

5 Caselle M. Phys. Rev. Lett., 1995, **74**:2776

6 Gorsky A, Nekrasov N. Nucl. Phys., 1994, **B414**:213; Nucl. Phys., 1995, **B436**:582

7 Hou B Y, Yang W L. The Nondynamical r-Matrix Structure of the Elliptic Calogero-Moser Model (n=2), (solv-int/9711008 to appear in Lett. Math. Phys.)

8 Iso S, Rey S J. Phys. Lett., 1995, **B352**:111

9 Marotta V, Sclarrino A. Nucl. Phys., 1996, **B476**:351

10 Ruijsenaars S N M, Schneider H. Ann. Phys., 1986, **170**:370

Nondynamical r-Matrix Structure for the Trigonometric Calogero-Moser Model*

Zhen Yi Yang Wenli Hou Boyu Chen Kai

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Abstract In a certain gauge, we get a new Lax operator for trigonometric Calogero-Moser model. The corresponding r-matrix is shown to be nondynamical. At the same time, we find that trigonometric Calogero-Moser model and trigonometric Ruijsenaars-Schneider model are governed by the completely same nondynamical r-matrix.

Key words trigonometric Calogero-Moser model, gauge transformation, non-dynamical r-matrix, Lax operator

---

Received 15 July 1998, Revised 5 Oetober 1998

* Supported by Fund of Northwest University