第20卷 第9期 高能物理与核物理 Vol.20, No.9
1996年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sep., 1996

Z_n Belavin 模型的反射矩阵

陈 敏 侯伯宇 石康杰

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

1995-09-25 收稿

摘 要

本文得到了 Z_n Belavin 模型反射矩阵的矩阵元表达式，在退化到三角极限后，得到了非对角的三角统计模型的反射矩阵.

关键词 Z_n Belavin 模型，反射矩阵，三角极限.

1 引 言

经典或量子可积系统的特点是存在无限多的守恒量，在可解晶格模型的情形下，这些守恒量可以由满足杨-Baxter 方程的 Boltzmann 权构造出来. Z_n Belavin 模型的 Boltzmann 权由 Belavin 给出[1]，并由 Richey 和 Tracy 计算出了具体形式[2]:

$$R(u)=\sum_{\alpha\in G_n} w_\alpha(u) I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1}, \tag{1}$$

其中

$$w_\alpha(u)=\frac{\sigma_\alpha(u+\eta)}{\sigma_\alpha(\eta)}\ ,\ \sigma_\alpha(u)=\theta\begin{bmatrix}\alpha_1/n+1/2\\ \alpha_2/n+1/2\end{bmatrix}(u,\tau),$$

$$G_n=Z_n\otimes Z_n,\ I_\alpha=g^{\alpha_2}h^{\alpha_1},\ h_{ij}=\delta_{i+1,j},$$

$$g_{ij}=\omega^i\delta_{ij},\ \omega=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}/n}.$$

R 矩阵有 3 个独立参数: u, $\eta\in\mathbb{C}$, $\tau\in\mathbb{H}=\{Z\in\mathbb{C}|\mathrm{Im}z>0\}$. τ 和 1 生成格 $\Lambda_\tau=\{\xi_1\tau+\xi_2|\xi_1,\xi_2\in\mathbb{Z},\tau\in\mathbb{H}\}$ $n\eta=w$ 为交叉参数. 具有性质: $PR(-w)=-R(-w)$, $R(w)P=R(w)$, P 为 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$上的交换矩阵, $P(y\otimes x)=x\otimes y$, x, $y\in\mathbb{C}^n$.

当存在非周期边界时，利用满足边界杨-Baxter 方程(或反射方程)的反射矩阵，可以类似地构造出相互对易的守恒量[3]. Z_n Belavin 模型的反射矩阵由侯伯宇等人给出[4]:

$$K(u)=K_0(u)K_0(0), \tag{2}$$

其中

$$K_0(u)=\frac{1}{n}\sum_{\alpha\in G_n} w'_{2\alpha}(u)\,\omega^{2\alpha_1\alpha_2} I_{2\alpha},$$

$$w'_{2\alpha}(u)=\frac{\sigma_{2\alpha}(u+c)}{\sigma_{2\alpha}(c)}\ ,$$

c 为任意参数．这个 $K(u)$ 对于(1)式的 R 矩阵满足反射方程

$$R_{12}(u_1-u_2)K_1(u_1)R_{21}(u_1+u_2)K_2(u_2)=K_2(u_2)R_{12}(u_1+u_2)K_1(u_1)R_{21}(u_1-u_2),$$

其中

$$R_{ij}\in End(V_i\otimes V_j),\ K_1(u)=K(u)\otimes \mathrm{id}_{V_2},\ K_2(u)=\mathrm{id}_{V_1}\otimes K(u).$$

本文将给出 K 矩阵的矩阵元表达式，并退化到三角情形，给出非对角的三角型统计模型的反射矩阵．

2　Z_n Belavin模型的反射矩阵

令$\{e_i\}_{i\in Z_n}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的法正交基，定义：

$$ge_i=\omega^i e_i,\ he_i=e_{i-1},\ i\in Z_n,\ \omega=\mathrm{e}^{2\pi\sqrt{-1}\ /n},$$

$$I_\alpha=g^{\alpha_2}h^{\alpha_1},\ \alpha_1,\ \alpha_2\in Z_n,\ \alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2)\in Z_n\otimes Z_n.$$

在以下计算中，指标 α_1, α_2, i, j 都认为是 Z_n 中的数，得到：

$$K_{0ij}(u)=\frac{1}{n}\sum_\alpha w'_{2\alpha}(u)\,w^{-2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_2 j}\delta_{i,\,j-2\alpha_1(\mathrm{mod}\ n)}. \tag{3}$$

上式中对 α_1 求和，方程 $2\alpha_1=j-i(\mathrm{mod}\ n)$的解有 4 种情况．$n=$ 奇数时，若 α_1 跑遍 Z_n，则 $2\alpha_1(\mathrm{mod}\ n)$ 跑遍Z_n 中的偶数和奇数，由于(3)式中的 δ 函数，当$(j-i)$为偶数时，对 α_1 的求和实际上只取 $\alpha_1=\dfrac{(j-i)}{2}$ 的一项；当$(j-i)$为奇数时，只取 $\alpha_1=\dfrac{(j-i)+n}{2}$ 的一项．$n=$ 偶数时，若 α_1 跑遍 Z_n，则 $2\alpha_1(\mathrm{mod}\ n)$ 两次跑遍 Z_n 中的偶数，所以在$(j-i)$为偶数时，由于(3)式中的 δ 函数，求和取 $\alpha_1=\dfrac{(j-i)}{2}$ 或 $\alpha_1=\dfrac{(j-i)+n}{2}$ 两项；而在$(j-i)$为奇数时，方程 $2\alpha_1=j-i(\mathrm{mod}\ n)$无解，$\delta_{i,j-2\alpha_1(\mathrm{mod}\ n)}\equiv 0$. (3) 式对 α_1 求和后变为：

$$K_{0ij}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\alpha_2} w'_{2\alpha}(u)\,\omega^{\alpha_2(i+j)}, & n=\text{奇数};\\[2ex] \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{\alpha_2} w'_{2\alpha}(u)\omega^{\alpha_2(i+j)}, & n=\text{偶数，且}\ j-i=\text{偶数};\\[2ex] 0, & n=\text{偶数，且}\ j-i=\text{奇数}.\end{cases}$$

简记为：

$$K_{0ij}(u)=\frac{(2)}{n}\sum_{\alpha_2} w'_{2\alpha}(u)\,\omega^{\alpha_2(i+j)}, \tag{4}$$

其中(2)表示 $n=$ 偶数时有 2，并省略了 $n=$偶数，且$(j-i)=$ 奇数的情形，即$K_{0ij}(u)=0$ 的情形．

由于$K_{0ij}(0)=(2)\delta_{i+j,\,0(\mathrm{mod}\ n)}$，可以得到

$$K_{ij}(u)=K_{0ik}(u)K_{0kj}(0)=(2)K_{0i,\,-j}(u).$$

利用theta函数的变换性质，有：

$$K_{0ij}(u+\xi_1\tau+\xi_2)=\exp[-\pi\sqrt{-1}\ \tau\xi_1^2-2\pi\sqrt{-1}\ (u+c)\xi_1-\pi\sqrt{-1}\ (\xi_1-\xi_2)]\omega^{2\pi_1\xi_2}K_{0i,j-2\xi_1}(u),$$

$$K_{0ij}(u+n\tau)=\exp[-\pi\sqrt{-1}\ \tau n^2-2\pi\sqrt{-1}\ (u+c)n-\pi\sqrt{-1}\ n]K_{0ij}(u),\ n=\text{奇数},$$

$$K_{0ij}\left(u+\frac{n}{2}\tau\right)=\exp\left[-\pi\sqrt{-1}\ \tau\frac{n^2}{4}-2\pi\sqrt{-1}\ (u+c)\frac{n}{2}-\pi\sqrt{-1}\ \frac{n}{2}\right]K_{0ij}(u),n=\text{偶数},$$

$$K_{0ij}(u+1)=\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{j-i}{n}+\frac{1}{2}\right)\right]K_{0ij}(u).$$

复分析中有一个定理：如果不恒等于0的整函数f满足

$$f(z+\tau)=\exp[-2\pi\sqrt{-1}\ (A_1+A_2z)]f(z),$$

$$f(z+1)=\exp[-2\pi\sqrt{-1}\ B)f(z),$$

那么A_2必为正整数，并且f在Λ_τ中有A_2个零点，零点之和为：

$$\Sigma Zeros=\frac{1}{2}A_2+B\tau-A_1,\ (\mathrm{mod}\ \Lambda_\tau).$$

利用这个定理，可以定出$K_{0ij}(u)$的全部零点. n为奇数时，$K_{0ij}(u)$在$\Lambda_{n\tau}$中有n个零点：

$$K_{0ij}(l\tau)=(\text{因子})\times\delta_{i+j-2l,0}=0,\ \text{对于}\ l\neq\frac{i+j+(n)}{2},\ l=0,\ 1,\ \cdots n-1,$$

其中(n)表示当$(i+j)$为奇数时有n，以下的式子中出现$\pm(n)$时，意义相同.

第n个零点为：

$$u=\frac{3i-j+(n)}{2}\tau-w,\ w=nc.$$

n为偶数时，$K_{0ij}(u)$在$\Lambda_{\frac{n}{2}\tau}$中有$\frac{n}{2}$个零点：

$$K_{0ij}(l\tau)=(\text{因子})\times\delta_{i+j-2l,0}=0,\ \text{对于}\ l\neq\frac{i+j}{2}\ (i+j\neq\text{奇数}),\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{n}{2}-1.$$

第$\frac{n}{2}-1$个零点为：

$$u=\mathrm{i}\tau-w',\ w'=\frac{n}{2}c.$$

定义：

$$\psi_{ij}(u)=\exp(xz)\theta\begin{bmatrix}\dfrac{-3i+j-(n)}{2n}+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}(z+w,\ n\tau)\prod_{\substack{k=0\\ k\neq\frac{i+j+(n)}{2}}}^{n-1}\theta^{(k)}(z),\ n=\text{奇数}.$$

$$\psi_{ij}(u)=\exp(xz)\theta\begin{bmatrix}\frac{-2i}{n}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\left(z+w',\ \frac{n}{2}\tau\right)\prod_{\substack{k=0\\ k\neq\frac{i+j}{2}}}^{\frac{n}{2}-1}\theta\begin{bmatrix}\frac{-2k}{n}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\left(z,\ \frac{n}{2}\tau\right),\ n=\text{偶数}.$$

则 $\psi_{ij}(u)$ 与 $K_{0ij}(u)$ 有相同零点，令它们的变换性质相同，可以定出 $x=0$. 所以

$$K_{0ij}(u)=\gamma(w,\ \tau)\psi_{ij}(u).$$

通过比较 $K_{0ij}(u)$ 和 $\psi_{ij}(u)$ 在 $\frac{i+j+(n)}{2}\tau(n=$ 奇数), 或 $\frac{i+j}{2}\tau(n=$ 偶数)点的值可以确定 $\gamma(w,\ \tau)$, 从而得出 $K_{0ij}(u)$:

当 n 为奇数时,

$$K_{0ij}(u)=\frac{h(u)\theta^{\left(\frac{3i-j+(n)}{2}\right)}(u+w)}{\theta^{(i-j)}(w)\theta^{\left(\frac{i+j+(n)}{2}\right)}(u)}\ ,\tag{5a}$$

其中

$$h(u)=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\theta^{(k)}(u)}{\prod_{k=1}^{n-1}\theta^{(k)}(0)}\ .$$

当 n 为偶数，且 $i+j$ 为偶数时,

$$K_{0ij}(u)=\frac{h'(u)\theta'^{(i)}(u+w')}{\theta'^{\left(\frac{i-j}{2}\right)}(w')\theta'^{\left(\frac{i+j}{2}\right)}(u)}\ ,\tag{5b}$$

其中

$$h'(u)=2\frac{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\theta'^{(k)}(u)}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\theta'^{(k)}(0)}\ ,\ \theta'^{(k)}\equiv\theta\begin{bmatrix}\frac{-2k}{n}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\left(z,\ \frac{n}{2}\tau\right),$$

当 n 为偶数，$i+j$ 为奇数时,

$$K_{0ij}(u)=0.\tag{5c}$$

最后得到

$$K_{ij}(u)=\frac{h(u)\theta^{\left(\frac{3i+j+(n)}{2}\right)}(u+w)}{\theta^{(i+j)}(w)\theta^{\left(\frac{i-j+(n)}{2}\right)}(u)}\ ,\qquad n=\text{奇数},\tag{6a}$$

$$K_{ij}(u)=\frac{2h'(u)\theta'^{(i)}(u+w')}{\theta'^{\left(\frac{i+j}{2}\right)}(w')\theta'^{\left(\frac{i-j}{2}\right)}(u)},\quad n=\text{偶数, 且 } i+j \text{ 为偶数},\tag{6b}$$

$$K_{ij}(u)=0,\qquad n=\text{偶数, 且 } i+j \text{ 为奇数}.\tag{6c}$$

3 三角极限

当 $i\tau \to -\infty$ 时，可以求出 theta 函数的三角极限：

$$\sigma_\alpha(u) \to \begin{cases} -2q^{\frac{1}{4}}\sin\left(u+\frac{\alpha_2}{n}\right)\pi, & \alpha_1=0; \\ q^{\left(\frac{\alpha_2}{n}-\frac{1}{2}\right)^2}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{\alpha_1}{n}-\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\alpha_2}{n}+\frac{1}{2}\right)\right], & \alpha_1\neq 0, \end{cases}$$

其中 $q=e^{\pi\sqrt{-1}\tau}$，. 下同.

$$w_\alpha(u) \to \begin{cases} \dfrac{\sin\left(u+c+\frac{\alpha_2}{n}\right)\pi}{\sin\left(c+\frac{\alpha_2}{n}\right)\pi}, & \alpha_1=0; \\ \exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{\alpha_1}{n}-\frac{1}{2}\right)u\right], & \alpha_1\neq 0. \end{cases}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{j}{n}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(u,\ n\tau) \to \begin{cases} -2q^{\frac{n}{4}}\sin u\pi, & j=0; \\ q^{\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{n}\right)^2 n}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{j}{n}\right)\left(u+\frac{1}{2}\right)\right], & j\neq 0. \end{cases}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{2j}{n}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}\left(u,\ \frac{n}{2}\tau\right) \to \begin{cases} -2q^{\frac{n}{8}}\sin u\pi, & j=0; \\ q^{\left(\frac{1}{2}-\frac{2j}{n}\right)^2\frac{n}{2}}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2j}{n}\right)\left(u+\frac{1}{2}\right)\right], & j\neq 0. \end{cases}$$

$$h(u) \to -2q^{\frac{n}{4}}\sin u\pi,$$

$$h'(u) \to -4q^{\frac{n}{8}}\sin u\pi.$$

由于 $w_\alpha(u)$ 的三角极限为有限值，所以 $K_{ij}(u)$ 的三角极限也为有限值，令 $\varepsilon=q^n$ ($n=$奇数) 或 $q^{\frac{n}{2}}$ ($n=$ 偶数)，可以求出 $K_{ij}(u)$ 的三角极限中无穷小量 ε 的幂指数为：

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3i+j+(n)}{2n}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i+j}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i-j+(n)}{2n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^2}(i+j)[i-j+(n)],\ n=\text{奇数},$$

$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2i}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i+j}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{i-j}{n}\right)^2$$
$$=\frac{2}{n^2}(i-j)(i+j),\ n=\text{偶数}.$$

令 ε 的幂指数为零，即可求出 $K_{ij}(u)$ 三角极限的非零元. n 为奇数，且 $i+j=$ 偶数时，可求得 $i=-j$ 或 $i=j$; $i+j=$ 奇数时，可求得 $i=j-n$. n 为偶数时，得 $i=\pm j$. $K_{ij}(u)$ 的三角极限的非零元为:

$n=$ 奇数时,

$$K_{00}(u)\to\frac{\sin(u+w)\pi}{\sin w\pi},\tag{7a}$$

$$K_{ii}(u)\to\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2i(\mathrm{mod}\,n)}{n}\right)u\right],\ i\neq0,\tag{7b}$$

$$K_{i,\,n-i}(u)\to\frac{\sin u\pi}{\sin w\pi}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{n}\right)w\right],\ i\neq0.\tag{7c}$$

$n=$ 偶数时,

$$K_{00}(u)\to4\frac{\sin(u+w')\pi}{\sin w'\pi},\tag{7d}$$

$$K_{ii}(u)\to4\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2i}{n}\right)u\right],\ i\neq0,\tag{7e}$$

$$K_{i,\,n-i}(u)\to4\frac{\sin u\pi}{\sin w'\pi}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2i}{n}\right)w'\right],\ i\neq0.\tag{7f}$$

把 Z_n Belavin 模型反射方程中的 R 矩阵和 K 矩阵都退化到三角情形，则(7)式中的 K 矩阵满足三角 R 矩阵的反射方程，它不仅有对角元 K_{00}, K_{ii}, 而且有非对角元 $K_{i,\,n-i}$, 这与以往一些作者[5,6]给出的三角统计模型的反射矩阵不同. 用它可以构造新的完全可积系统.

本文作者之一陈敏感谢范桁、杨仲侠给予的热情帮助.

参　考　文　献

[1] A. A. Belavin, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981)189.

[2] M. P. Richey, C. A. Tracy, *J. Stat. Phys.*, **42**(1986)311.

[3] E. K. Sklyanin, *J. Phys.*, **A21**(1988)2375.

[4] B. Y. Hou, K. J. Shi, H. Fan *et al.*, *Commun. Theor. Phys.*, **23**(1995)163.

[5] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *J. Phys.*, **A24**(1991)L435.

[6] L. Mezincescu, R. I. Nepomechie, *Nucl. Phys.*, **B372**(1992)597.

Reflection Matrix of Z_n Belavin Model

Chen Min Hou Boyu Shi Kangjie

(*The Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Received 25 September 1995

Abstract

The expression of the matrix element of the reflection matrix of Z_n Belavin model is obtained. When it approaches the triangular limit, the non-diagonal reflection matrix of triangular statistical model is obtained.

Key words Z_n Belavin model, reflection matrix, triangular limit.