

快度取值超环的可因式化散射矩阵 与对称性算子

胡占宁 侯伯宇

(西北大学现代物理研究所, 西安 710069)

摘 要

本文构造出了快度取值超环的可因式化散射矩阵及与其对易的算子—对称性算子,并在对易性保证的情况下,对 S 矩阵作了形式的推广,使之与杨-Baxter关系联系起来;值得注意的是,这种对称性算子的“余乘积”运算具有新的特点.最后给出了 Z_N 破缺模型与自对偶亏格为零极限下手征 Potts 模型的联系.

一、引 言

近来,量子场论与统计力学中精确可解模型的研究已成为理论物理与数学物理领域的热门课题.虽然对二者的研究分别基于无穷维李代数及对易 transfer 矩阵方法,但进一步的研究却表明它们存在着深刻的联系^[1,2],其中杨-Baxter 方程及其推广形式起着重要作用^[3,4].特别是精确可解格点模型近来取得了很大发展,不仅建立了作为 Fateev 和 Zamolodchikov 的 Z_N 对称模型^[5]临界外推广形式之一的手征 Potts 模型的代数结构,而且发现了它与顶角模型的密切联系^[6-8].有的作者还对其另一形式的临界点外推广即可解 Z_N 破缺格点模型进行讨论^[9,10],并将之与 Sklyanin 代数联系起来^[9].

本文利用 Z_N 对称性破缺的精确可解模型,构造出了快度取值超环的可因式化散射矩阵 S ,发现了与 S 矩阵对易的对称性算子,该算子的“余乘积”运算具有新的特点.接着,在对易性保证的情形下对 S 矩阵作了形式推广,由此自然得出杨-Baxter 关系,且包含着更丰富的内容.最后我们得出 Z_N 破缺模型的三角极限包含了手征 Potts 模型自对偶零亏格的极限情形,即可以退化为 Fateev 和 Zamolodchikov Z_N 不变模型.本文由五部分组成:第二部分在可解 Z_N 破缺模型的基础上,构造出散射矩阵 S ,并讨论其么正性及交叉对称性等.对称性算子的定义及与因式化散射矩阵 S 关系的讨论则列入第三部分.在第四部分中通过对 S 矩阵的形式推广,自然给出了杨-Baxter 关系等;最后,我们简单讨论了 Z_N 破缺模型的三角极限.

二、 Z_N 破缺模型与 S 矩阵

1. 可解 Z_N 破缺模型

采用 Koji-Hasegawa 及 Yuji-Yamada 的方法^[9]对 Z_N 破缺模型可描述如下。该模型的星-三角关系 (STR) 可写为:

$$\sum_{d=0}^{N-1} \bar{W}(u, v)_i^a W(u, w)_{ab} \bar{W}(v, w)_c^d = \rho W(u, v)_{cb} \bar{W}(u, w)_c^a W(v, w)_{ab}, \quad (1)$$

其中 ρ 与 a, b, c 无关。玻尔兹曼权满足关系

$$K(v)_i^a K(u)_c^b W(u, v)_{ab} = W(u, v)_{dc} K(u)_i^a K(v)_c^b, \quad (2)$$

$$K(v)_i^c K(u)_b^a \bar{W}(u, v)_c^a = \bar{W}(u, v)_i^c K(u)_c^a K(v)_i^a. \quad (3)$$

其中 $i, j = 0, 1$; $a, b, c, d = 0, 1, \dots, N-1$, 并且式 (2) 中仅对重复的 j 指标求和, 而对其它指标不求和; 式 (3) 中, 仅对重复的 c 指标求和。以下讨论中若不特别声明, 重复指标并不表示求和运算。另外,

$$K(u)_i^a = \frac{1}{\theta(A_s)} \left[\Delta H \theta \left(u - \frac{1}{2} (A_s - J - I) \right) \delta_{i, s+1} + \Delta^{-1} H \theta \left(u + \frac{1}{2} (A_s + J + I) \right) \delta_{i, s-1} \right], \quad (4a)$$

$$K(u)_i^a = \frac{i}{\theta(A_s)} \left[\Delta H \theta \left(u - \frac{1}{2} (A_s - J + I) \right) \delta_{i, s+1} - \Delta^{-1} H \theta \left(u + \frac{1}{2} (A_s + J - I) \right) \delta_{i, s-1} \right], \quad (4b)$$

$$K(u)_{0b}^a = \Delta H \theta \left(u + \frac{1}{2} (A_{s+1} - J + I) \right) \delta_{b, s+1} + \Delta^{-1} H \theta \left(u - \frac{1}{2} (A_{s-1} + J - I) \right) \delta_{b, s-1}, \quad (4c)$$

$$K(u)_i^a = i \left[\Delta H \theta \left(u + \frac{1}{2} (A_{s+1} - J - I) \right) \delta_{i, s+1} - \Delta^{-1} H \theta \left(u - \frac{1}{2} (A_{s-1} + J + I) \right) \delta_{i, s-1} \right]. \quad (4d)$$

并且^[11]

$$H(u) = 2q^{l/4} \sin(\pi u/2l) \prod_{n=1}^{\infty} [1 - 2q^{2n} \cos(\pi u/l) + q^{4n}](1 - q^{2n}), \quad (5)$$

$$\theta(u) = -iq^{l/4} \exp(i\pi u/2l) H(u + il').$$

其中,

$$q = \exp(-\pi l'/l) = \exp(i\pi\tau). \quad (6)$$

$A_s = (s + 2a)\eta$; $\Delta, s, \tau \in \mathbb{C}$. $\eta = 2lN'/N$ 且 N' 与 N 互质。(注: 这里的小写 s 不是本文的 S 矩阵.)

2. S 矩阵及其性质

算子 S 作用的空间由自旋 α 的链组成, $\alpha = a$ 或 $*$, $a \in Z_N$, 而 $*$ 表示中性元素, 并

规定自旋链上任意两相邻自旋不能同时取 Z_N ——自旋值,或同时取中性元素 $*$, 即两相邻自旋值所允许的分布为 $(*-a)$ 或 $(a-*)$. 按量子场论的观点^[7], 二相邻自旋 a 和 β 的连接构成一个 Kink, 若其快度为 u , 可形成渐近态 $\langle K_{a,\beta}(u) |$, 于是, Z_N 破缺模型可以用相互旋转 $\pi/4$ 的二套方格点阵来描述^[10], 自旋 $a = a$ 或 $*$ 位于方格顶点上, 其玻尔兹曼权及渐近态可用图 1 表示.

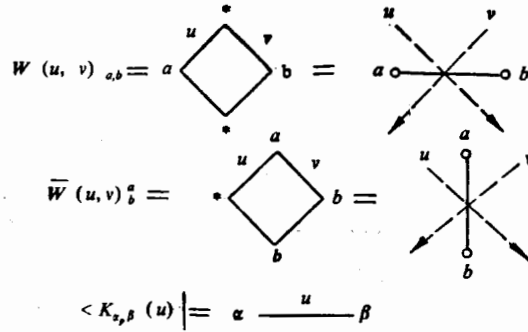


图 1 $W(u, v)_{a,b}$, $\bar{W}(u, v)_b^a$ 及 $\langle K_{a,b}(u) |$ 的图形表示

注意, $(a-*)$ 与 $(*-a)$ 可以带不同的谱.

对于具有 M 个 Kink 的渐近态, S 矩阵定义为:

$$\langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{i-1}, \alpha_i}(u_i) K_{\alpha_i, \alpha_{i+1}}(u_{i+1}) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | S(u_i, u_{i+1}) \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{i-1}, \alpha_i}(u_{i+1}) \cdot K_{\alpha_i, \alpha_{i+1}}(u_i) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | W(u_i, u_{i+1})_{\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}}, \tag{7a}$$

$$= \begin{cases} \text{其中, } \alpha_i = *; \\ \sum_{\beta_i} \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{i-1}, \beta_i}(u_{i+1}) \cdot K_{\beta_i, \alpha_{i+1}}(u_i) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | \bar{W}(u_i, u_{i+1})_{\beta_i}^{\alpha_i}, \end{cases} \tag{7b}$$

其中, $\alpha_i \neq * \neq \beta_i$.

这里, $i = 1, 2, \dots, M - 1$. 该式可用(图 2)表示出来.

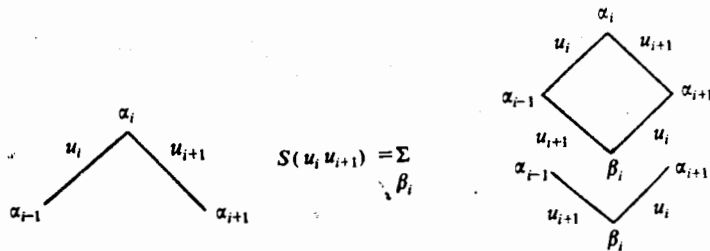


图 2 式 (7) 的图形表示

于是, S 矩阵的矩阵元可写为:

$$S(u, v)_{ab} = W(u, v)_{ab}, \quad S(u, v)^{ab} = \bar{W}(u, v)_b^a. \tag{8}$$

定义 S' 算子为:

$$S'(u, v) = S(v, u), \quad (9)$$

引入变换 Ψ :

$$\Psi u = -u. \quad (10)$$

考虑到玻尔兹曼权只依赖于谱之差的特性^[9], 可以看出, 这一变换与 S 矩阵的“置换”运算相对应. 这是由于

$$\Psi^{-1} S' \Psi = S. \quad (11)$$

S 矩阵的么正性可讨论如下: 考虑到玻尔兹曼权只依赖于谱之差的特性, 由式 (2) 及 (4) 可得:

$$W(u)_{ab} W(-u)_{ab} = \mathcal{A}(u), \quad (12)$$

其中,

$$\mathcal{A}(u) = W(u)_{00} W(-u)_{00} \quad (13)$$

与 a, b 无关; 这里已取 $W(u)_{00} = W(u)_{10}$.

令 $\bar{W}(u)_0^0 = 1, \bar{W}(u)_0^1 = 0$, 由 (3) 式可得:

$\bar{W}(0)_0^0 = \delta_{ab}$. 考虑到星-三角关系 (1) 式并利用 (12) 式得:

$$\sum_{l=0}^{N-1} \bar{W}(u)_0^a \bar{W}(-u)_l^b = \rho \mathcal{A}(u) \delta_{ab} / W(0)_{00}. \quad (14)$$

利用式 (8) 及 (9) 就得到:

$$S(u, v)_{ab} S'(u, v)_{ab} = \mathcal{A}(u - v), \quad (15)$$

$$\sum_{c=0}^{N-1} S(u, v)^{ac} S'(u, v)^{cb} = \rho \mathcal{A}(u - v) \delta_{ab} / W(0)_{00}. \quad (16)$$

其中函数 $\mathcal{A}(u - v)$ 由 (13) 式表达. 这就是可因式化的散射矩阵.

引入变换 Φ :

$$\Phi u = u - \hat{\eta}, \quad (17)$$

其中 $\hat{\eta} = \eta + I + J$. 采用文献 [9] 对玻尔兹曼权 $\bar{W}(u)_0^0, \bar{W}(u)_0^1$ 与 $W(u)_{00}, W(u)_{10}$ 间的约定, S 矩阵有交叉对称性:

$$f(a, b) S_{ab}(u, \Phi v) = S^{ab}(v, u), \quad (18a)$$

$$S^{ab}(u, \Phi v) = f(a, b) S_{ab}(v, u). \quad (18b)$$

而 $f(a, b) = \Delta^{2(b-a)} \theta(A_b) \exp[i\pi(a-b)J^2/(2I^2)]$. 由椭圆函数的准周期特性^[11] 易证:

$$\Phi^{4N} = \Psi^2 = (\Phi\Psi)^2 = (\Psi\Phi)^2 = 1. \quad (19)$$

这里指出, 若用变换 Ψ_h : $\Psi_h u = -u + h$, (h 为一任意常数) 代替上式中的 Ψ , 结果仍正确. 另外, 由于 $\Phi S \Phi^{-1} = S$, 可见变换 Φ 不仅与 S 矩阵的交叉对称性有关, 也是 S 矩阵仅依赖于谱之差特性的反映.

三、对称性算子 $\Delta Q_{n\pm}^m$ 及 $\Delta \bar{Q}_{n\pm}^m$

定义算子 Q_n^m :

$$\langle K_{*+}(u) | Q_n^m = \langle K_{*+1*}(u) | K(u)_{**+1}^m + \langle K_{*-1*}(u) | K(u)_{**,-1}^m, \quad (20a)$$

$$\langle K_{*+}(u) | Q_n^m = \langle K_{*+1}(u) | K(u)_{**+1}^m + \langle K_{*-1}(u) | K(u)_{**,-1}^m. \quad (20b)$$

其中, $m, n = 0, 1$. 于是, 其矩阵元可写为:

$$\begin{aligned} Q_n^m(u)^{a,a+1} &= K(u)_{a,a+1}^a, \quad Q_n^m(u)^{a,a-1} = K(u)_{a,a-1}^a, \\ Q_n^m(u)_{a,a+1} &= K(u)_{a+1}^a, \quad Q_n^m(u)_{a,a-1} = K(u)_{a-1}^a. \end{aligned} \quad (21)$$

这里各 $K(u)_{a,b}^a$ 及 $K(u)_{b^a}^a$ 由(4)式给出.

引入“余乘积”运算:

$$\bar{\Delta} Q_n^m = Q_{m_1}^m \otimes Q_{n_1}^m. \quad (22)$$

其中 $m, n, m_1 = 0, 1$ 并对重复指标求和. 它显然满足余结合律:

$$(id \otimes \bar{\Delta}) \bar{\Delta} Q_n^m = (\bar{\Delta} \otimes id) \bar{\Delta} Q_n^m = Q_{m_1}^m \otimes Q_{n_1}^m \otimes Q_{n_1}^m, \quad (23)$$

并且:

$$\bar{\Delta}(Q_{n_0}^m Q_n^m) = \bar{\Delta} Q_{n_0}^m \bar{\Delta} Q_n^m = Q_{m_1}^m \otimes Q_{n_1}^m \otimes Q_{n_0}^m \otimes Q_n^m. \quad (24)$$

上二式中各指标取值 0, 1 且各重复指标表示求和. 显然, 式(22)及式(24)可作用于二个 Kink 的渐近态上, 而式(23)作用于三个 Kink 的渐近态上. 为表示出对任意 $M (\geq 2)$ 个 Kink 的渐近态上的作用, 令

$$\Delta = \underbrace{(id \otimes id \otimes \cdots \otimes id \otimes \bar{\Delta})}_{M-2 \text{ 个}} \cdot \underbrace{(id \otimes \cdots \otimes id \otimes \bar{\Delta})}_{M-3 \text{ 个}} \cdots (id \otimes \bar{\Delta}) \bar{\Delta}. \quad (25)$$

于是, 对具有 M 个 Kink 的渐近态, 若其快度分别为 u_1, u_2, \dots, u_M ; 作用其上的算子可写为:

$$\Delta Q_n^m = Q_{m_1}^m(u_1) \otimes Q_{n_1}^m(u_2) \otimes \cdots \otimes Q_{m_{i-1}}^m(u_i) \otimes Q_{n_{i+1}}^m(u_{i+1}) \otimes \cdots \otimes Q_{m_{M-1}}^m(u_M). \quad (26)$$

其中 $m, n, m_i = 0, 1, s = 1, 2, \dots, M$ (M 为一自然数.), 重复指标表示求和. 由余结合律知, 式(25)的表达并非唯一, 但 ΔQ_n^m 总可用式(26)表示.

上面给出的“余乘积”运算满足杨-Baxter 关系:

$$L^{01}(u) L^{02}(v) R^{12}(u, v) = R^{12}(u, v) L^{02}(v) L^{01}(u). \quad (27)$$

其中: $L(u) = (L(u)_{j_b}^{i_a})_{i,j=0,1; a,b=0,1, \dots, N-1}$. $R(u, v) = (R(u, v)_{b'_a}^{a'_b})_{a,a',b,b'=0,1, \dots, N-1}$. 且

$$\begin{aligned} L(u)_{j_b}^{i_a} &= K(u)_{b^a}^a K(u)_{j_b}^a, \\ R(u, v)_{b'_a}^{a'_b} &= W(u, v)_{a_b} W(u, v)_{b'_a} W(u, v)_{b'_a} W(u, v)_{b'_a}^{a'_b}. \end{aligned} \quad (28)$$

以后的讨论将给出(27)式的证明. 由式(26)得:

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{j=1}^M K_{*a_j}(u_{2j-1}) K_{*a_j}(u_{2j}) \middle| \Delta Q_n^m \right. \\ &= \sum_{\substack{t_j=\pm 1 \\ j=1, \dots, M}} \left\langle \prod_{j=1}^M K_{*a_j+t_j}(u_{2j-1}) K_{*a_j+t_j}(u_{2j}) \middle| K(u_1)_{a_1+t_1}^{a_1} K(u_2)_{n+a_2+t_2}^{a_2} \right. \\ & \quad \cdot \prod_{i=1}^{M-1} K(u_{2i})_{m_i a_i+t_i}^{a_i} K(u_{2i+1})_{n_i a_i+t_i}^{a_i}, \end{aligned} \quad (29)$$

并对重复的 $m_i (=0, 1)$ 指标求和. 注意, 上式右边各项已去掉了公因子 2^M .

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{j=1}^M K_{*a_j}(u_{2j-1}) K_{*a_{j+1}}(u_{2j}) \middle| \Delta Q_n^m \right. \\ &= \sum_{\substack{t_j=\pm 1 \\ j=1, \dots, M}} \left\langle \prod_{j=1}^M K_{*a_j+t_j}(u_{2j-1}) K_{*a_{j+1}+t_{j+1}}(u_{2j}) \middle| \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^M K(u_{2i-1})_{m_i, \alpha_i+t_i}^{\alpha_i} K(u_{2i})_{\alpha_i+t_i+1, m_i+1}^{m_i+1}, \quad (30)$$

并对重复的 m_i ($=0, 1$) 指标求和。上式右边各项已略去了公因子 2^{M-1} 。易见，上式右边各项与 m, n 无关。另外， $\langle K_{**}(u) \cdots K_{**}(v) | \Delta Q_n^m$ 与 m 有关，与 n 无关，而 $\langle K_{**}(u) \cdots K_{**}(v) | \Delta Q_n^m$ 与 n 有关，与 m 无关。

对于渐近态 $\langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) |$ 由式 (26) 及 (7) 知，

$$(\Delta Q_n^m) S = S(\Delta Q_n^m) \quad (31)$$

成立的充分条件为：

$$Q_{m_i-1}^{m_i}(u_i)^{\alpha_i-1, \alpha_i-1+t_i-1} Q_{m_{i+1}}^{m_i}(u_{i+1})_{\alpha_i+1, \alpha_i+1+t_i+1} S(u_i, u_{i+1})_{\alpha_i-1+t_i-1, \alpha_i+1+t_i+1} \\ = S(u_i, u_{i+1})_{\alpha_i-1, \alpha_i+1} Q_{n_i-1}^{n_i}(u_{i+1})^{\alpha_i-1, \alpha_i-1+t_i-1} Q_{n_i+1}^{n_i}(u_i)_{\alpha_i+1, \alpha_i+1+t_i+1}, \quad (32a)$$

这里， $\alpha_i = *$ ， $m_i, n_i = 0, 1$ ， $t_{i\pm 1} = 1, -1$ 并对重复指标 m_i 及 n_i 求和 ($0 < i < M$)，及

$$\sum_{t_i=\pm 1} S(u_i, u_{i+1})^{\alpha_i, \beta_i+t_i} Q_{m_i-1}^{m_i}(u_{i+1})_{\beta_i+t_i, \beta_i} Q_{m_{i+1}}^{m_i}(u_i)^{\beta_i+t_i, \beta_i} \\ = \sum_{t_i=\pm 1} Q_{m_i-1}^{m_i}(u_i)_{\alpha_i, \alpha_i+t_i} Q_{m_{i+1}}^{m_i}(u_{i+1})^{\alpha_i, \alpha_i+t_i} S(u_i, u_{i+1})^{\alpha_i+t_i, \beta_i}, \quad (32b)$$

这里 $\alpha_i \asymp *$ 。由于 $Q_{m_i-1}^{m_i}(u_i)_{\alpha_i, \alpha_i+t_i}$ 等与 m_i 无关，所以此式中的重复 m_i 指标可不求和。这里还利用了式 (2)、(3) 所给出的玻尔兹曼权的性质^[9]：

$$W_{a,b} = W_{a+N, b\pm N}, \quad \bar{W}_b^a = \bar{W}_{b\pm N}^{a+N}, \quad \text{也就是, } W_{a,b} = W_{a\pm 2N, b} = W_{a, b\pm 2N}, \\ \bar{W}_b^a = \bar{W}_b^{a\pm 2N} = \bar{W}_{b\pm 2N}^a.$$

于是，也将自旋取值范围放宽到 $a = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ 。利用 S 及 Q_n^m 矩阵元的表达式 (8)、(21) 并考虑到式 (4)，式 (32) 容易由式 (2)、(3) 得到证明。所以 (31) 式成立，即算子 S 与 ΔQ_n^m 对易。

定义 Q_n^m 的“转置”算子 $Q_n^{m'}$ 为：

$$\langle K_{**}(u) | Q_n^{m'} = \langle K_{*+1*}(u) | K(u)_{*+1}^{*+1} + \langle K_{*-1*}(u) | K(u)_{*-1}^{*-1}, \quad (33a)$$

$$\langle K_{**}(u) | Q_n^{m'} = \langle K_{**+1}(u) | K(u)_{**+1}^{**+1} + \langle K_{**-1}(u) | K(u)_{**-1}^{**-1}. \quad (33b)$$

由式 (21) 知：

$$Q_n^{m'}(u)^{a, a+1} = Q_n^m(u)_{a, a+1}, \quad Q_n^{m'}(u)^{a, a-1} = Q_n^m(u)_{a, a-1}, \\ Q_n^{m'}(u)_{a, a+1} = Q_n^m(u)^{a, a+1}, \quad Q_n^{m'}(u)_{a, a-1} = Q_n^m(u)^{a, a-1}. \quad (34)$$

类似于式 (26)，将 Δ 作用于 $Q_n^{m'}$ 上：

$$\Delta Q_n^{m'} = Q_{m_1}^{m_1'}(u_1) \otimes Q_{m_2}^{m_2'}(u_2) \otimes \cdots \otimes Q_{m_M}^{m_M'}(u_M) = (\Delta Q_n^m)'. \quad (26')$$

将上文给出的 Q_n^m 及 $Q_n^{m'}$ 分别记为 Q_{n+}^m 及 $Q_{n+}^{m'}$ ，并引入：

$$Q_{n-}^m = \Phi^{-1} Q_{n+}^m \Phi, \\ \bar{Q}_{n+}^m = \Psi^{-1} Q_{n+}^{m'} \Psi, \quad \bar{Q}_{n-}^m = \Phi^{-1} \bar{Q}_{n+}^m \Phi. \quad (35)$$

其中 Ψ 及 Φ 分别由 (10)、(17) 给出。由于 Ψ 及 Φ 是 S 矩阵的“转置”运算及其仅依赖于谱之差特性的反映，由式 (31) 易得：

$$(\Delta Q_{n\pm}^m) S = S(\Delta Q_{n\pm}^m), \\ (\Delta \bar{Q}_{n\pm}^m) S = S(\Delta \bar{Q}_{n\pm}^m). \quad (36)$$

这表明对称性算子存在着与可因式化散射矩阵“对称性”变换 \$(\Psi, \Phi)\$ 相对应的性质。并且利用变换 \$\Psi, \Phi\$ 我们将不会产生与上述对称性算子规范不等价的新对称性算子。

四、S 矩阵的形式推广与杨-Baxter 关系

作为由式 (7) 所定义的 S 矩阵的形式推广, 我们引入算子 \$S(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4})\$:

$$\begin{aligned} & \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_i, \alpha_{i+1}}(u_{i+1}) K_{\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}}(u_{i+2}) K_{\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}}(u_{i+3}) K_{\alpha_{i+3}, \alpha_{i+4}}(u_{i+4}) \cdots \\ & \quad \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | S(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}) \\ & = \sum_{\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \beta_{i+3}} \left\langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_i, \beta_{i+1}}(u_{i+3}) K_{\beta_{i+1}, \beta_{i+2}}(u_{i+4}) \right. \\ & \quad \cdot K_{\beta_{i+2}, \beta_{i+3}}(u_{i+1}) K_{\beta_{i+3}, \alpha_{i+4}}(u_{i+2}) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) \left. \right\rangle \\ & \quad \cdot S(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4})_{\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \beta_{i+3}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4}}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中:

$$\begin{aligned} & S(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4})_{\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \beta_{i+3}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4}} \\ & = W(u_{i+2}, u_{i+3})_{\alpha_{i+1}, \alpha_{i+3}} W(u_{i+1}, u_{i+4})_{\beta_{i+1}, \beta_{i+3}} \bar{W}(u_{i+1}, u_{i+3})_{\beta_{i+1}}^{\alpha_{i+1}} \bar{W}(u_{i+2}, u_{i+4})_{\beta_{i+3}}^{\alpha_{i+3}} \end{aligned} \tag{38a}$$

及

$$\begin{aligned} & S(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4})_{\beta_{i+2}, \beta_{i+3}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+4}} \\ & = \sum_b W(u_{i+1}, u_{i+3})_{\alpha_i, b} W(u_{i+2}, u_{i+4})_{b, \alpha_{i+4}} \bar{W}(u_{i+2}, u_{i+3})_b^{\alpha_{i+2}} \bar{W}(u_{i+1}, u_{i+4})_{\beta_{i+2}}^b. \end{aligned} \tag{38b}$$

以上三式可分别用图 3、图 4(a) 及图 4(b) 表示。

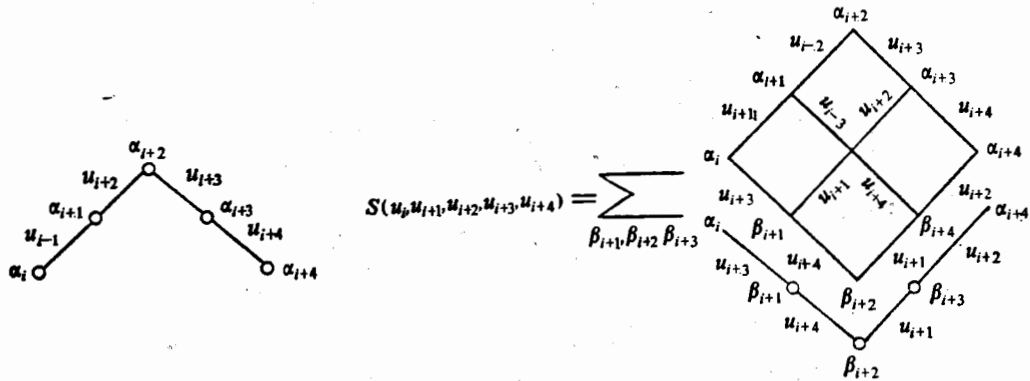


图 3 式 (37) 的图形表示

于是, 由式 (26) 及式 (37) 知, 算子 S 与 \$\Delta Q^{\alpha}\$ 对易的充分条件为:

$$\begin{aligned} & \sum_{c_{i+2}=0}^{2N-1} K(u_{i+1})_{\alpha_i, \beta_i}^{\alpha_i} L(u_{i+2}, u_{i+3})_{\alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}}^{\alpha_{i+2}} K(u_{i+4})_{\beta_{i+4}}^{\alpha_{i+4}} S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{\beta_{i+2}, \beta_{i+3}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4}} \\ & = \sum_{c_{i+2}=0}^{2N-1} S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{\beta_{i+2}, \beta_{i+3}}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+3}, \alpha_{i+4}} K(u_{i+3})_{\alpha_{i+3}}^{\alpha_i} L(u_{i+4}, u_{i+1})_{\alpha_{i+4}}^{\alpha_{i+4}} \end{aligned}$$

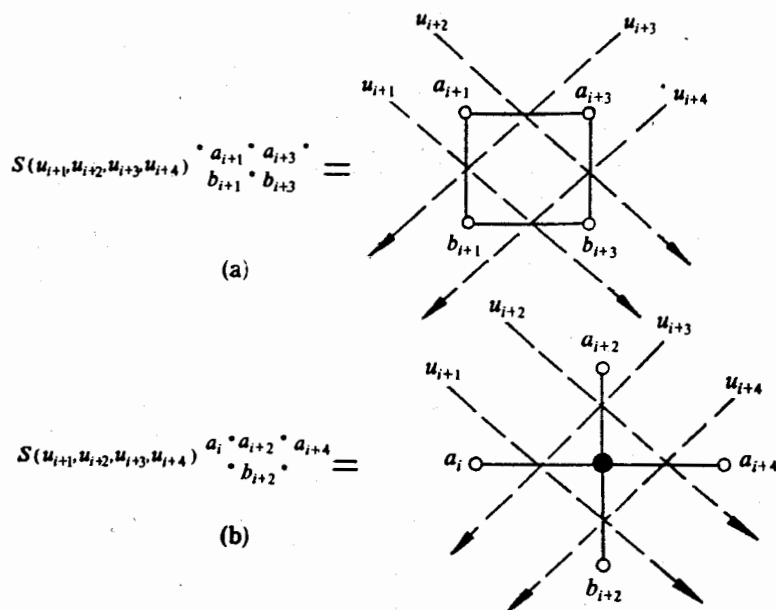


图 4(a)、图 4(b) 式 (38a) 及 (38b) 的图形表示

$$\bullet K(u_{i+2})_{b_{i+4}}^{a_{i+4}}, \tag{39a}$$

$$\sum_{c_{i+1}+c_{i+3}=0}^{2N-1} L(u_{i+1}, u_{i+2})_{n_1 c_{i+1}}^{a_{i+1}} L(u_{i+3}, u_{i+4})_{n_2 c_{i+3}}^{a_{i+3}} S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{b_{i+1} c_{i+3}}^{c_{i+1} c_{i+3}} \\ = \sum_{c_{i+1}+c_{i+3}=0}^{2N-1} S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{c_{i+1} c_{i+3}}^{a_{i+1} a_{i+3}} L(u_{i+3}, u_{i+4})_{n_1 b_{i+1}}^{c_{i+1}} L(u_{i+1}, u_{i+2})_{n_2 b_{i+3}}^{c_{i+3}}. \tag{39b}$$

其中对重复的 n_1, n_2 ($=0, 1$) 指标进行求和, 并且 $L(u, v)_{j_b}^{i_a} = K(u)_b^{i_a} K(v)_j^a$. 各 $K(u)_b^{i_a}$ 、 $K(v)_j^a$ 由 (4) 式给出.

若采用 Koji Hasegawa 对 $K(u)_b^{i_a}$ 及 $L(u, v)_{j_b}^{i_a}$ 、 $K(v)_j^a$ 的图形表示法图 5

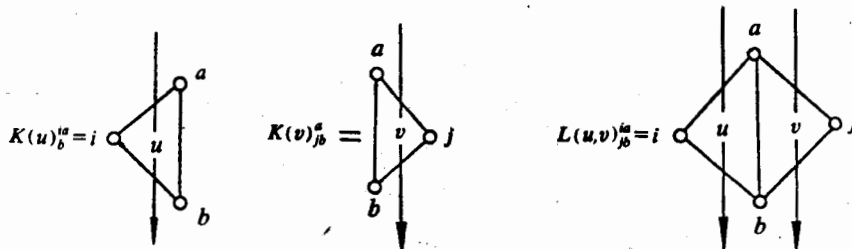


图 5 $K(u)$ 及 $L(u, v)$ 的图形表示

式 (39a) 可按下图式图 6 得到证明.

其中利用了式 (2) 及 (3). 采用同样方法容易证明式 (39b) 也成立. 从而说明式 (37) 所定义的算子 S 与 ΔQ^m 对易.

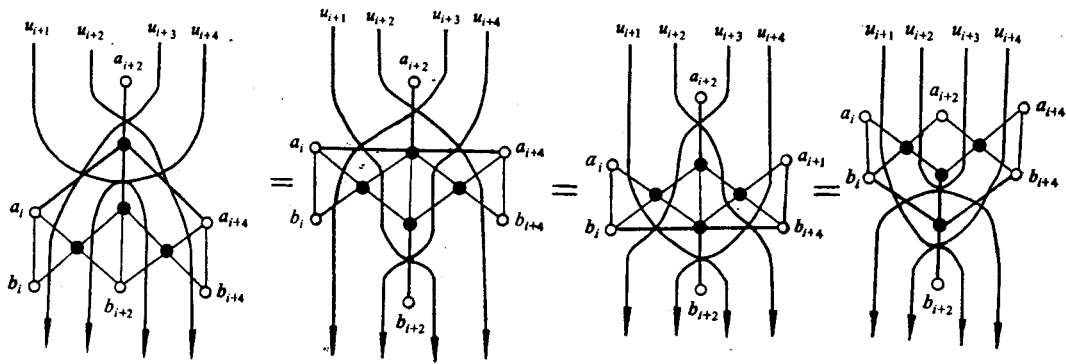


图6 式(39a)的图示法证明

令 $R(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}) = (R(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{a'b'}^{ab})$,
 $\hat{R}(u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}, u_{i+4}) = (\hat{R}(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{a'b'}^{ab})$.

其中 $a, a', b, b' = 0, \dots, 2N - 1$. 并且

$$R(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{a'b'}^{ab} \equiv S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{b'a'}^{*ab*}, \tag{40}$$

$$\hat{R}(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{a'b'}^{ab} \equiv S(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})_{a'a}^{*bb*a} \cdot \delta_{a,b'}.$$

由(39b)及(39a)分别可得:

$$L(u_{i+1}, u_{i+2})^{01} L(u_{i+3}, u_{i+4})^{02} R(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})^{12} \\ = R(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})^{12} L(u_{i+3}, u_{i+4})^{02} L(u_{i+1}, u_{i+2})^{01}, \tag{41}$$

$$(L(u_{i+4}, u_{i+1})^{01} \circ L(u_{i+2}, u_{i+3})^{02}) \hat{R}(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})^{12} \\ = \hat{R}(u_{i+1}, \dots, u_{i+4})^{12} (L(u_{i+2}, u_{i+3})^{02} \circ L(u_{i+4}, u_{i+1})^{01}). \tag{42}$$

其中, $L(u, v) = (L(u, v)_{j\delta}^{i\epsilon})_{i,j=0,1; \epsilon, \delta=0, \dots, 2N-1}$. 并且引入了运算:

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes B_3) = \text{tr}(A_1 B_1) I \otimes A_2 B_2 \otimes A_3 B_3. \tag{43}$$

A_i, B_i 为 $n_i \times n_i$ 的方阵 ($i = 1, 2, 3$), 这里 I 为 $n_1 \times n_1$ 的单位矩阵. 取 $u_{i+1} = u_{i+2} = u, u_{i+3} = u_{i+4} = v$, 式(41)就退化为杨-Baxter关系式(27).

值得指出的是,本部分之所以称为 S 矩阵的形式推广在于仅考虑了由式(37)所定义的 S 算子与对称性算子 ΔQ^m 的对易性,而未讨论其与么正性. 交叉对称性等相对应的性质.

实际上,采用这种方法,我们可得出取更多快速度值的 S 算子: $S(u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+2j})$, $i + 2j \leq M$, 而 M 为所考虑渐近态的 Kink 数. 比如,定义

$$\langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | S(u_{i+1}, \dots, u_{i+6}) \\ = \sum_{\{\beta_j\}} \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_i, \beta_1}(u_{i+4}) K_{\beta_1, \beta_2}(u_{i+5}) K_{\beta_2, \beta_3}(u_{i+6}) \\ \cdot K_{\beta_3, \beta_4}(u_{i+1}) K_{\beta_4, \beta_5}(u_{i+2}) K_{\beta_5, \alpha_{i+6}}(u_{i+3}) K_{\alpha_{i+6}, \alpha_{i+7}}(u_{i+7}) \cdots \\ \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | S(u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+6})_{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5}^{\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \alpha_{i+4} \alpha_{i+5} \alpha_{i+6}}. \tag{44}$$

其中 $i + 6 \leq M$. 及:

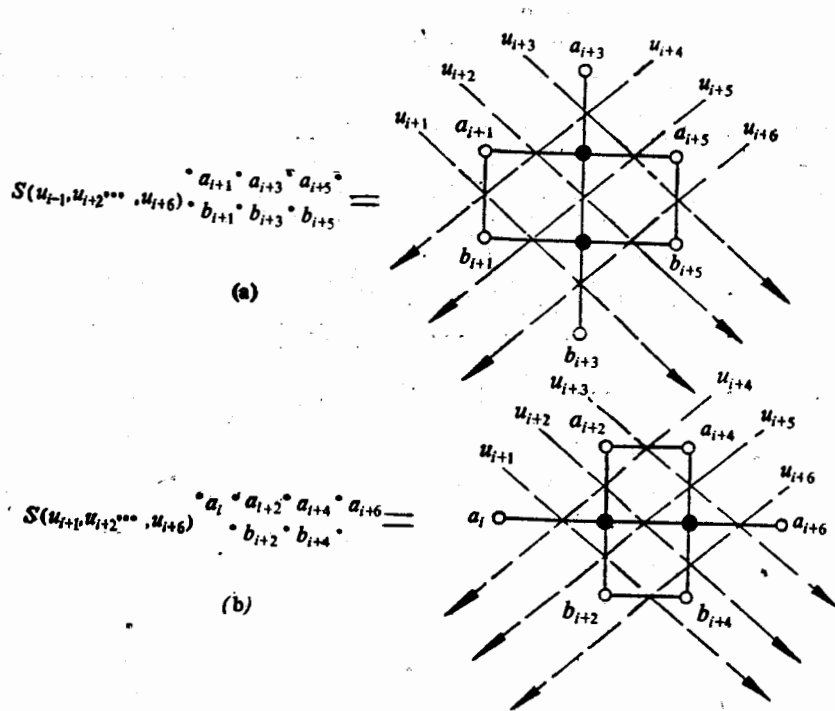


图 7(a)、(b) $S(u_{i+1}, \dots, u_{i+6})$ 的矩阵元

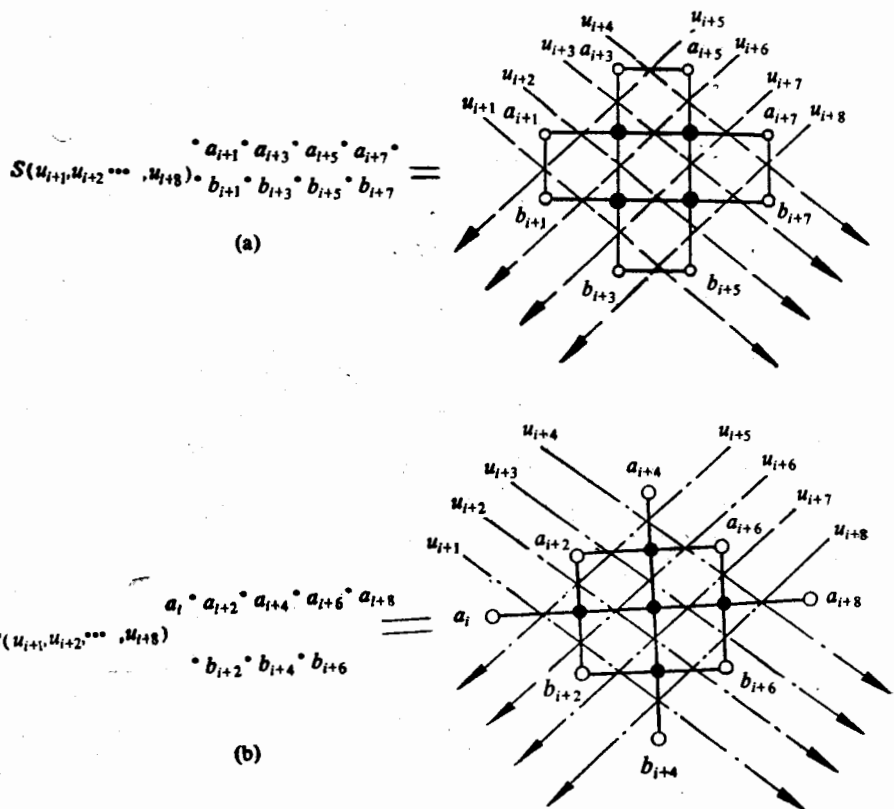


图 8(a)、(b) $S(u_{i+1}, \dots, u_{i+8})$ 的矩阵元

$$\begin{aligned}
& \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) | S(u_{i+1}, u_{i+2}, \cdots, u_{i+8}) \\
&= \sum_{\{\beta_j\}} \langle K_{\alpha_0, \alpha_1}(u_1) K_{\alpha_1, \alpha_2}(u_2) \cdots K_{\alpha_i, \beta_1}(u_{i+5}) K_{\beta_1, \beta_2}(u_{i+6}) K_{\beta_2, \beta_3}(u_{i+7}) \\
&\quad (j=1, 2, \cdots, 7) \\
&\quad \cdot K_{\beta_3, \beta_4}(u_{i+8}) K_{\beta_4, \beta_5}(u_{i+1}) K_{\beta_5, \beta_6}(u_{i+2}) K_{\beta_6, \beta_7}(u_{i+3}) K_{\beta_7, \alpha_{i+8}} \\
&\quad \cdot (u_{i+4}) K_{\alpha_{i+8}, \alpha_{i+9}}(u_{i+9}) \cdots K_{\alpha_{M-1}, \alpha_M}(u_M) \\
&\quad \cdot | S(u_{i+1}, \cdots, u_{i+8}) \rangle_{\beta_1, \cdots, \beta_7}^{\alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{i+7}, \alpha_{i+8}}.
\end{aligned} \tag{45}$$

其中 $i+8 \leq M$ 。并且利用图 1 容易写出与上图式所对应的具体表达式 (这里从略)。

前面已证明了式 (37) 所定义的算子 S 与 ΔQ^m 对易。采用与此类似的方法容易证明式 (44) 及 (45) 所定义的 S 算子也与 ΔQ^m 对易。并且由 $S(u_{i+1}, \cdots, u_{i+8})$ 与 ΔQ^m 的对易性可得 (详细推导从略)

$$\tilde{L}(u)^{012} \tilde{L}(v)^{034} \tilde{R}(u, v)^{1234} = \tilde{R}(u, v)^{1234} \tilde{L}(v)^{034} \tilde{L}(u)^{012}. \tag{46}$$

其中 $\tilde{L}(u) = (\tilde{L}(u)_{j a' b'}^{i a b})_{i, j=0, 1; a, a', b, b'=0, 1, \cdots, 2N-1}$ 。而 $\tilde{L}(u)_{j a' b'}^{i a b} = L(u)_{k a'}^i L(u)_{j b'}^k$ ，并对重复的 k 指标求和。另外：

$$\tilde{R}(u, v) = (\tilde{R}(u, v)_{a' b' c' d'}^{a b c d})_{a, a', b, b', c, c'=0, 1, \cdots, 2N-1}$$

而

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(u, v)_{a' b' c' d'}^{a b c d} &= \bar{W}(u-v)_{a'}^a \bar{W}(u-v)_{b'}^b W(u-v)_{c c'} W(u-v)_{d' d} \\
&\cdot \sum_{e_1, e_2, e_3, e_4=0}^{2N-1} \bar{W}(u-v)_{e_1}^b \bar{W}(u-v)_{e_2}^c \bar{W}(u-v)_{e_3}^d \bar{W}(u-v)_{e_4}^{c'} \\
&\cdot \bar{W}(u-v)_{d'}^{e_2} \bar{W}(u-v)_{c'}^{e_3} W(u-v)_{a e_1} W(u-v)_{e_1 e_2} \\
&W(u-v)_{e_2 d} W(u-v)_{c' e_3} W(u-v)_{e_3 e_4} W(u-v)_{e_4 b'}.
\end{aligned} \tag{47}$$

它可以用图 9 表示。

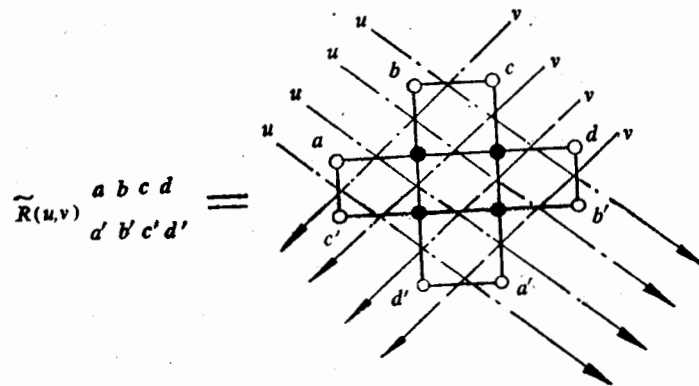


图 9 $\tilde{R}(u, v)$ 的图形表示

从而说明, 本文所定义的作为散射矩阵形式推广的 S 算子与对称性算子的对易性, 不仅可以自然给出杨-Baxter 关系, 且包含了更丰富的内容。

五、 Z_N 破缺模型的三角极限

我们知道,若(6)式中 $\tau \rightarrow i\infty$, 椭圆函数就退化为三角函数。这时,由式(2)、(3)有^[9]:

$$\frac{W(u, v)_{a+1, b+1}}{W(u, v)_{a, b}} = \frac{\bar{W}(u, v)_{b+1}^{a+1}}{\bar{W}(u, v)_b^a} = 1; \quad (48)$$

$$\frac{W(u, v)_{a+1, b-1}}{W(u, v)_{a, b}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2l}(u - v - (a - b + 1)\eta + J)}{\cos \frac{\pi}{2l}(u - v + (a - b + 1)\eta - J)}, \quad (49)$$

$$\frac{\bar{W}(u, v)_{b-1}^{a+1}}{\bar{W}(u, v)_b^a} = \Delta^{-1} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(u - v + (a - b)\eta)}{\sin \frac{\pi}{2l}(u - v - (a - b + 2)\eta)}. \quad (50)$$

其中, $\eta = 2lN'/N$.

若 $a - b$ 为偶数, 令

$$W(u, v)_{a, b} = W_{uv} \left(\frac{a - b}{2} \right); \quad (51a)$$

$$\bar{W}(u, v)_b^a = \bar{W}_{uv} \left(\frac{a - b}{2} \right). \quad (51b)$$

上二式与式(48)自洽。若 $J = 2nl$, n 为整数, 令

$$a_u = \exp(i\pi u/l), \quad (52)$$

$$\omega = \exp[-2\pi i(\eta + (2m + 1)l)/l]. \quad (53)$$

其中 m 为整数, 并使 $\Delta^{-1} = 1$, 则由式(49)及(50)得

$$\frac{W_{uv}(j)}{W_{uv}(j-1)} = \frac{1 - a_{uv}\omega^{j-\frac{1}{2}}}{a_{uv} - \omega^{j-\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\bar{W}_{uv}(j)}{\bar{W}_{uv}(j-1)} = \omega^{1/2} \cdot \frac{a_{uv} - \omega^{j-1}}{1 - a_{uv}\omega^j}.$$

其中 $j = (a - b + 2)/2$, $a_{uv} = a_u/a_v$. 依次取 $a - b = 0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$; 则:

$$\frac{W_{uv}(n)}{W_{uv}(0)} = \prod_{j=1}^n \frac{1 - a_{uv}\omega^{j-\frac{1}{2}}}{a_{uv} - \omega^{j-\frac{1}{2}}}; \quad (54)$$

$$\frac{\bar{W}_{uv}(n)}{\bar{W}_{uv}(0)} = \omega^{n/2} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{a_{uv} - \omega^{j-1}}{1 - a_{uv}\omega^j}. \quad (55)$$

若 $J = (2n + 1)l$, n 为整数, 则 N 必为偶数^[9], 这时, 若令

$$\omega = \exp[-2\pi i(\eta + 2ml)/l], \quad (m \text{ 为整数}) \quad (56)$$

并使 $\Delta^1 = -1$, 仍可由(49)及(50)得出(54)、(55)式。这时 a_u 仍由(43)给出, 并且 $a_{uv} = a_u/a_v$.

式(54)、(55)恰好是手征 Potts 模型自对偶亏格为零的极限情形^[7]. 这种情况下的 Z_N 破缺模型就退化为 Fateev 和 Zamolodchikov Z_N 对称模型。

参 考 文 献

- [1] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin and E. K. Sklyanin, *Lett. Math. Phys.*, **5** (1981), 393; M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10** (1985), 63.
- [2] V. A. Fateev, Integrable deformations in Z -symmetrical models of conformal quantum field theory, LPTHE preprint 90-52, June 1990.
- [3] L. D. Faddeev, *Sov. Sci. Rev.*, **C1** (1980), 107.
- [4] M. Kashiwara and T. Miwa, *Nucl. Phys.*, **B275** (1986), 121.
- [5] V. Fateev and A. B. Zamolodchikov, *Phys. Lett.*, **A** (1982), 37.
- [6] R. J. Baxter, V. V. Bazhanov and J. H. H. Perk, Functional relations for transfer matrices of the chiral Potts model, preprint, CMA-R38-89.
- [7] D. Bernard and V. Pasquier, Exchange algebra and exotic supersymmetry in the chiral Potts model, Preprint, SPHT/89-204.
- [8] V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov, Chiral Potts model as a descendant of the six-vertex model, preprint, CMA-R34-89.
- [9] K. Hasegawa and Y. Yamada, *Phys. Lett.*, **A146** (1990), 387.
- [10] M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Nucl. Phys.*, **B275** (1986), 517.
- [11] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics* (Academic Press, London, 1982).

Factorizable S-Matrix and Symmetry Operator With Toroidal Rapidity Values

HU ZHANNING HOU BOYU

(*Institute of Modern Physics Northwest University, Xi'an 710069*)

ABSTRACT

We constructed the factorizable S-matrix and obtained the symmetry operator which commutes with the S-matrix and has a new form of "coproduct", the elements of which depend on the parameters defining the toroidal rapidity surface. By defining a new operator which commutes with the symmetry operator the Yang-Baxter equation can be obtained. Finally, the relation between the broken Z_N -symmetric model and the chiral Potts model was expressed explicitly in the self-dual genus zero limit.