第20卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol.20, No.3
1996年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1996

$SU(2)$Thirring 模型边界算子的 Boson 表达式

王延申　石康杰　杨文力　赵　柳　侯伯宇

(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

1995－01－27 收稿

摘　　要

得到了有边界的 $SU(2)$Thirring 模型的反射矩阵 $R_a'^{\,b}(\theta)$，以及相应的边界算子的 Boson 表达式.

关键词　$SU(2)$Thirring 模型，边界反射矩阵，边界算子.

1　引　　言

可积模型的可积性最终表现为求得关联函数或形状因子的明显表达式，这方面近来取得了重要的进展. 在可解格点模型方面[1－3]，运用 q 畸变的仿射代数[4] 的玻色实现[5] 给出了用 Boltzmann 权构成的满足 Zamolodchikov－Faddeev 代数(ZF 代数)的 I、II 型顶角算子，从而可以成功地计算六顶角或 XXZ 模型的关联函数与形状因子. 在可积量子场论中，例如 $SU(2)$Thirring 模型和 Sine－Gordon 模型，Lukyanov[6] 用自由玻色场及 q 玻色振子构造了与这两个模型相应的可因式化 S 矩阵，并构成了 ZF 代数的产生子，其行为与上述 I、II 型顶角算子类似，并用来计算了形状因子[7]. 可积模型的另一重要进展为 Ghoshal 和 Zamolodchikov[8] 提出的可积边界及相应的边界算子. Jimbo 等人[9] 求出了 XXZ 模型的边界算子的 q 玻色振子表达式，并算出了形状因子. 本文给出了 $SU(2)$不变 Thirring 模型(ITM)的边界反射矩阵及边界算子的 q 玻色振子表达式，为此我们将采用 Lukyanov 的自由场表达式.

2　有边界时$SU(2)$ITM 的反射矩阵

为了求得 $SU(2)$ITM 的反射矩阵，先回顾 Lukyanov 用自由玻色场及 q 玻色振子构造的可因式化 S 矩阵及 ZF 代数的产生子. 根据 Lukyanov[6]，满足 ZF 代数

$$Z_a'(\beta_1)Z_b'(\beta_2)=S_{ab}'^{\,cd}(\beta_1-\beta_2)Z_d'(\beta_2)Z_c'(\beta_1) \tag{1}$$

的产生子 $Z_a'(\beta)$可用玻色场 $\varphi'(\beta)$表示如下

$$Z_+'(\beta)=V'(\beta)\equiv :\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'(\beta)}:,$$

$$Z'_{-}(\beta)=\mathrm{i}(\chi' V'(\beta)+V'(\beta)\chi'),\tag{2}$$

χ'由下式定义：

$$\langle u|\chi'|v\rangle\equiv\langle u|\int_{c'}\frac{\mathrm{d}\gamma}{2\pi}\overline{V}'(\gamma)|v\rangle,$$

$$\overline{V}'(\gamma)\equiv:\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\overline{\varphi}'(\gamma)}:$$

$$\overline{\varphi}'(\gamma)=\varphi'\left(\gamma+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)+\varphi'\left(\gamma-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right),\tag{3}$$

积分路线 c'从 $\mathrm{Re}\gamma=-\infty$ 到 $\mathrm{Re}\gamma=+\infty$，并使所有与$|v\rangle$有关的极点处于它的下边，使与$\langle u|$ 有关的极点处于它的上边. 散射矩阵 $S'^{cd}_{ab}(\beta)$为

$$S'^{cd}_{ab}(\beta)=\begin{bmatrix}1&&&\\&\frac{-\beta}{\mathrm{i}\pi+\beta}&\frac{\mathrm{i}\pi}{\mathrm{i}\pi+\beta}&\\&\frac{\mathrm{i}\pi}{\mathrm{i}\pi+\beta}&\frac{-\beta}{\mathrm{i}\pi+\beta}&\\&&&1\end{bmatrix}S'(\beta),$$

$$S'(\beta)=\frac{\Gamma\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\Gamma\left(\frac{2\pi\mathrm{i}+\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\pi\mathrm{i}+\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)\Gamma\left(\frac{2\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)},\tag{4}$$

$S'(\beta)$可作 Riemann－Hilbert 分解

$$S'(\beta)=\frac{g'(-\beta)}{g'(\beta)},\quad g'(\beta)=\frac{\Gamma\left(\frac{2\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)}.\tag{5}$$

$g'(\beta)$在下半平面($\mathrm{Im}\beta<0$)解析. 玻色场 $\varphi'(\beta)$满足

$$\begin{aligned}&[\varphi'(\beta_1),\ \varphi'(\beta_2)]=\ln S'(\beta_2-\beta_1),\\&\langle 0|\varphi'(\beta_1)\varphi'(\beta_2)|0\rangle=-\ln g'(\beta_2-\beta_1),\\&\langle 0|\overline{\varphi}'(\beta_1)\varphi'(\beta_2)|0\rangle=\ln w'(\beta_2-\beta_1),\end{aligned}\tag{6}$$

其中，$w'(\beta)=k^{-1}\dfrac{2\pi}{\mathrm{i}\left(\beta-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right)}$，$k$ 是与 β 无关的常数. 这样得到的产生子 $Z'_a(\beta)$是定域的，对应着粒子的定域量，

$$\begin{aligned}&C_{ab}Z'_a(\beta+\mathrm{i}\pi)Z'_b(\beta)=\mathrm{i},\\&Z'_a(\beta-\mathrm{i}\pi)Z'_b(\beta)=\mathrm{i}C_{ab},\end{aligned}\tag{7}$$

C_{ab}是电荷共轭矩阵，$C_{ab}=\delta_{a+b,0}$.

为了把自由玻色场 $\varphi'(\beta)$ 用振子表达，Lukyanov 用玻色场 $\varphi'_{\varepsilon}(\beta)$ 逼近 $\varphi'(\beta)$，在这种方法中，β 被限制在

$$-\frac{\pi}{\varepsilon}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{\varepsilon}, \tag{8}$$

相应的 $\varphi'_{\varepsilon}(\beta)$ 满足对易关系

$$[\varphi'_{\varepsilon}(\beta_1),\ \varphi'_{\varepsilon}(\beta_2)]=\ln S'_{\varepsilon}(\beta_2-\beta_1), \tag{9}$$

其中

$$S'_{\varepsilon}(\beta)=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\varepsilon\beta}{2}\right)\frac{g'_{\varepsilon}(-\beta)}{g'_{\varepsilon}(\beta)},$$

$$g'_{\varepsilon}(\beta)=(1-q)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma_2\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)}{\Gamma_q\left(\dfrac{\pi\mathrm{i}-\beta}{2\pi\mathrm{i}}\right)},\ (q=\exp(-2\pi\varepsilon))$$

$$\Gamma_q(x)=(1-q)^{1-x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^k}{1-q^{x+k-1}}, \tag{10}$$

$\varphi'_{\varepsilon}(\beta)$ 可用 q 振子 a'_m 表示如下

$$\varphi'_{\varepsilon}(\beta)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(Q-\varepsilon\beta P)+\varphi_{\varepsilon}'^{+}(\beta)+\varphi_{\varepsilon}'^{-}(\beta), \tag{11}$$

其中

$$\mathrm{i}\varphi_{\varepsilon}'^{+}(\beta)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a'_m}{\sinh(\pi m\varepsilon)}\exp(\mathrm{i}m\varepsilon\beta),$$
$$\mathrm{i}\varphi_{\varepsilon}'^{-}(\beta)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a'_{-m}}{\sinh(\pi m\varepsilon)}\exp(-\mathrm{i}m\varepsilon\beta),$$
$$[P,\ Q]=-\mathrm{i}$$
$$[a'_m,\ a'_n]=\frac{\sinh\dfrac{\pi m\varepsilon}{2}\sinh\pi m\varepsilon}{m}\exp\left(-\frac{\pi|m|\varepsilon}{2}\right)\delta_{m+n,\,0}. \tag{12}$$

在紫外截断的情况下(见(8)式)，ZF 代数的产生子表示为

$$Z'_{\varepsilon+}(\beta)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\varepsilon\beta}{4}}V'_{\varepsilon}(\beta)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\varepsilon\beta}{4}}:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'_{\varepsilon}(\beta)}:,$$
$$Z'_{\varepsilon-}(\beta)=\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\varepsilon\beta}{4}}(\mathrm{e}^{-\frac{\pi\varepsilon}{4}}\chi'_{\varepsilon}V'_{\varepsilon}(\beta)+\mathrm{e}^{\frac{\pi\varepsilon}{4}}V'_{\varepsilon}(\beta)\chi'_{\varepsilon}), \tag{13}$$

其满足的 ZF 代数的 $S'^{cd}_{\varepsilon ab}(\beta)$ 的矩阵元为

$$S'^{++}_{\varepsilon++}(\beta)=S'^{--}_{\varepsilon--}(\beta)=S'_{\varepsilon}(\beta),$$

$$S'^{+-}_{\varepsilon+-}(\beta)=S'^{-+}_{\varepsilon-+}(\beta)=-S'_{\varepsilon}(\beta)\frac{\mathrm{sh}\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon\beta}{2}}{\mathrm{sh}\dfrac{\mathrm{i}\varepsilon(\mathrm{i}\pi+\beta)}{2}},$$

$$S'^{+-}_{\varepsilon-+}(\beta)=S'^{-+}_{\varepsilon+-}(\beta)=-S'_{\varepsilon}(\beta)\frac{\mathrm{sh}\frac{\pi\varepsilon}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\mathrm{i}\varepsilon(\mathrm{i}\pi+\beta)}{2}}.\tag{14}$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，$S'_{\varepsilon}\to S'$(见(4)式). 下面来求有边界情况下满足边界反射方程

$$Z'_a(\beta)|B\rangle=R'^{b}_a(\beta)Z'_b(-\beta)|B\rangle\tag{15}$$

的反射矩阵 $R'^{b}_a(\beta)$. 由边界杨 − Baxter 方程[8,10]

$$\begin{aligned}&R'^{c_2}_{a_2}(\beta_2)S'^{c_1d_2}_{a_1c_2}(\beta_1+\beta_2)R'^{d_1}_{c_1}(\beta_1)S'^{b_2b_1}_{d_2d_1}(\beta_1-\beta_2)\\&=S'^{c_1c_2}_{a_1a_2}(\beta_1-\beta_2)R'^{d_1}_{c_1}(\beta_1)S'^{d_2b_1}_{c_2d_1}(\beta_1+\beta_2)R'^{b_2}_{d_2}(\beta_2),\end{aligned}\tag{16}$$

解得

$$R'^{b}_a(\beta)=\frac{R'(\beta)}{-\sqrt{4D_1D_2+A^2}\ \beta-B}\begin{pmatrix}-A\beta-B & 2D_1\beta\\ 2D_2\beta & A\beta-B\end{pmatrix},\tag{17}$$

这里，A、B、D_1、D_2 是边界参数. 由边界反射矩阵的幺正条件和交叉对称条件

$$R'^{c}_a(\beta)R'^{b}_c(-\beta)=\delta^b_a,$$

$$C^{ac}R'^{b}_c\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\beta\right)=S'^{ab}_{cd}(2\beta)C^{de}R'^{c}_e\left(-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}+\beta\right),\tag{18}$$

可求得 $R'^{b}_a(\beta)$的标量因子 $R'(\beta)$,

$$R'(\beta)=\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{2\mathrm{i}\pi+\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}+\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{2\mathrm{i}\pi-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)},$$

$$\mu=\frac{B}{\sqrt{4D_1D_2+A^2}}.\tag{19}$$

以下为了方便地计算边态算子，将限定 $R'^{b}_a(\beta)$为对角形式，对于一般形式的 $R'^{b}_a(\beta)$，如(17)式，将在以后的文章中予以深入地讨论. 令 $D_1=D_2=0$，得到

$$R'^{b}_a(\beta)=R'(\beta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\mu+\beta}{\mu-\beta}\end{pmatrix}.\tag{20}$$

若用 q 振子表达产生子 $Z'_{\varepsilon a}(\beta)$，可用同样的办法从(14)和(16)式求得

$$R'^{b}_{\varepsilon a}(\beta)=R'_{\varepsilon}(\beta)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{sh}\frac{\mathrm{i}\varepsilon(\mu+\beta)}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\mathrm{i}\varepsilon(\mu-\beta)}{2}}\end{bmatrix},$$

$$R'_{\varepsilon}(\beta)=\left[\Gamma_{q^2}\left(\frac{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_{q^2}\left(\frac{2\mathrm{i}\pi+\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu+\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu-\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\right]$$

$$\left[\Gamma_{q^2}\left(\frac{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}+\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_{q^2}\left(\frac{2\mathrm{i}\pi-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu-\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu+\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\right]^{-1}. \tag{21}$$

$R_\varepsilon'(\beta)$可作 Riemann－Hilbert 分解

$$R_\varepsilon'(\beta)=\frac{f_\varepsilon'(-\beta,\ \mu)}{f_\varepsilon'(\beta,\ \mu)},$$

$$f_\varepsilon'(\beta,\ \mu)=\frac{\Gamma_{q^2}\left(\frac{2\mathrm{i}\pi-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu-\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma_q\left(\frac{\mu-\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}, \tag{22}$$

$f_\varepsilon'(\beta,\ \mu)$在下半平面($\mathrm{Im}\beta<0$)解析.

3 边界算子的玻色表达式

当$a=+$时，边界反射方程为

$$f_\varepsilon'(\beta,\ \mu)Z_{\varepsilon+}'(\beta)|B\rangle=(\beta\longleftrightarrow-\beta). \tag{23}$$

这样的边界态$|B\rangle$可用算子表为$|B\rangle=\mathrm{e}^{\Psi_-}|0\rangle$. (24)

$$\Psi_-=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\exp\left(\frac{\pi n\varepsilon}{2}\right)\alpha_n}{2\mathrm{sh}\frac{\pi n\varepsilon}{2}\ \mathrm{sh}\pi n\varepsilon}a_{-n}'^{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\exp\left(\frac{\pi n\varepsilon}{2}\right)}{\mathrm{sh}\frac{\pi n\varepsilon}{2}}\lambda_n a_{-n}', \tag{25}$$

这里，α_n、λ_n是待定系数. 有如下 Bogoliubov 变换:

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\Psi_-}a_n'\mathrm{e}^{\Psi_-}=a_n'+\alpha_n a_{-n}'+\lambda_n\mathrm{sh}\pi n\varepsilon,\\&\mathrm{e}^{-\Psi_-}a_{-n}'\mathrm{e}^{\Psi_-}=a_{-n}',\ n>0.\end{aligned} \tag{26}$$

把公式(13)、(25)和(26)代入(23)式，通过直接地计算，可以得到:

$$\alpha_n=-1,$$

$$\lambda_n=-\frac{q^{\frac{\mu+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}n}}{n(1+q^{\frac{n}{2}})}+\theta_n\frac{q^{\frac{n}{2}}-q^{\frac{n}{4}}}{n(1+q^{\frac{n}{2}})},$$

$$\theta_n=\begin{cases}0,\ m\ \mathrm{odd},\\1,\ m\ \mathrm{even}.\end{cases} \tag{27}$$

下面将证明由(23)式计算出的边态算子依然满足当$a=-$时的边界反射方程,

$$\mathrm{sh}\frac{\mathrm{i}\varepsilon(\mu-\beta)}{2}f_\varepsilon'(\beta,\ \mu)Z_{\varepsilon-}'(\beta)|B\rangle=(\beta\longleftrightarrow-\beta). \tag{28}$$

利用(27)式，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'^{+}(\beta)}|B\rangle=f_\varepsilon'(-\beta,\ \mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'^{-}(-\beta)}|B\rangle,$$

$$e^{-i\bar{\varphi}'^{+}(\beta)}|B\rangle=\frac{2\left(\mu+\beta+\frac{i\pi}{2}\right)\beta}{2i\pi}e^{-i\bar{\varphi}'^{-}(-\beta)}|B\rangle. \tag{29}$$

在以下的证明中，将不再用到 q 振子表达式，为了方便讨论，令 $\varepsilon\to 0(q\to 1)$，这时相应的各量均不带 ε 下指标. 由 $Z_-(\beta)$的表达式和(29)式可知(28)式等价于

$$\int_{c'}\frac{d\gamma}{2\pi}\frac{i\pi(\mu-\beta)\left(\mu+\gamma+\frac{i\pi}{2}\right)\gamma}{\left(\gamma-\beta-\frac{i\pi}{2}\right)\left(\gamma-\beta+\frac{i\pi}{2}\right)\left(\gamma+\beta+\frac{i\pi}{2}\right)}$$

$$\cdot\ e^{-i\bar{\varphi}'^{-}(\gamma)-i\bar{\varphi}'^{-}(-\gamma)}|B\rangle=(\beta\longleftrightarrow-\beta), \tag{30}$$

积分路径 c 为从 $\mathrm{Re}\gamma=-\infty$ 到 $\mathrm{Re}\gamma=+\infty$，并处于 $\gamma_1=\beta-\frac{i\pi}{2}$ 和 $\gamma_2=-\beta-\frac{i\pi}{2}$ 的上方，$\gamma_3=\beta+\frac{i\pi}{2}$ 的下方. (30)式的成立只须直接求出 γ_1 和 γ_2 处的留数，然后作变换 $\gamma\to-\gamma$ 求出 γ_3 处的留数，两次求得的留数相减即可得到关于 β 和 $-\beta$ 对称的等式.

同样的方法可以用来求出左边的边态算子

$$\langle B|=\langle 0|e^{\Psi_+}, \tag{31}$$

$\langle B|$满足反射方程

$$\langle B|Z_a'^{*}(\beta)=\langle B|Z_a'^{*}(-\beta)R_a'^{*a}(-\beta), \tag{32}$$

其中

$$Z_a'^{*}(\beta)=C_{ab}Z_b'(\beta+i\pi),$$

$$R_a'^{*b}(\beta)=R_a'^{b}(\beta)=R'^{*}(\beta)\begin{pmatrix}\frac{\mu-\beta}{\mu+\beta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$R'^{*}(\beta)=\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{3i\pi}{2}-\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{2i\pi+\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\beta+i\pi}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta}{2i\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{3i\pi}{2}+\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{2i\pi-\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta+i\pi}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\beta}{2i\pi}\right)}. \tag{33}$$

$R'^{*}(\beta)$可作 Riemann－Hilbert 分解

$$R'^{*}(\beta)=\frac{f'^{*}(-\beta,\ \mu)}{f'^{*}(\beta,\ \mu)},$$

$$f'^{*}(\beta,\ \mu)=\frac{\Gamma\left(\frac{2i\pi-\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta+i\pi}{2i\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{\frac{3i\pi}{2}-\beta}{2i\pi}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\beta}{2i\pi}\right)}. \tag{34}$$

与算右边态算子 Ψ_- 相似，可设

$$\Psi_+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\exp\left(\frac{\pi n\varepsilon}{2}\right)\sigma_n}{2\mathrm{sh}\frac{\pi n\varepsilon}{2}\ \mathrm{sh}\pi n\varepsilon}a_n^{'2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\exp\left(\frac{\pi n\varepsilon}{2}\right)}{\mathrm{sh}\frac{\pi n\varepsilon}{2}}\rho_n a_n'. \tag{35}$$

由 $a=-$ 时的反射方程

$$f'^*(-\beta,\mu)\langle 0|\mathrm{e}^{\Psi_+}Z'_+(\beta+\mathrm{i}\pi)=(\beta\longleftrightarrow-\beta), \tag{36}$$

可解得

$$\sigma_n=-q^n,$$

$$\rho_n=-\frac{q^{\frac{\mu+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}n}}{n(1+q^{\frac{n}{2}})}+\theta_n\frac{q^{\frac{3n}{4}}-q^n}{n(1+q^{\frac{n}{2}})}, \tag{37}$$

类似于(29)式，我们有

$$\langle B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'^-(\beta+\mathrm{i}\pi)}=f'^*(\beta,\mu)\langle B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'^+(-\beta+\mathrm{i}\pi)},$$

$$\langle B|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}'^-(\beta)}=\frac{2\mathrm{i}\pi-2\beta}{\mu-\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\langle B|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}'^+(-\beta+2\mathrm{i}\pi)}. \tag{38}$$

那么 $a=+$ 时的方程

$$\langle B|Z'_-(\beta+\mathrm{i}\pi)=\langle B|Z'_-(-\beta+\mathrm{i}\pi)\frac{\mu+\beta}{\mu-\beta}R'^*(-\beta), \tag{39}$$

等价于

$$\int_{c^*}\frac{\mathrm{d}\gamma}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\pi(\mu-\beta)(2\gamma-2\mathrm{i}\pi)}{\left(\gamma+\beta-\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}\right)\left(\gamma-\mu-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)\left(\gamma-\beta-\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}\right)\left(\gamma-\beta-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}$$

$$\times\langle B|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}'^+(\gamma)-\mathrm{i}\bar{\varphi}'^+(-\gamma+2\mathrm{i}\pi)}=(\beta\longleftrightarrow-\beta), \tag{40}$$

积分路线 c^* 从 $\mathrm{Re}\gamma=-\infty$ 到 $\mathrm{Re}\gamma=+\infty$，并使 $\gamma_1=-\beta+\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}$，$\gamma_2=\mu+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}$，$\gamma_3=\beta+\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}$ 在它的上方，使 $\gamma_4=\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}$ 在它的下方．利用类似于证(30)式的方法并注意到积分变量作 $\gamma\to 2\mathrm{i}\pi-\gamma$ 的变换，(40)式得证．

这样就求得了局域算子 $Z'_a(\beta)$的右边态$|B\rangle$和左边态$\langle B|$ 的玻色子表达式．

4 渐近态的反射方程

在第二节中，产生子 $Z'_a(\beta)$满足(7)式，它是定域的，对应着粒子的守恒荷．Lukyanov[6]还给出了另一类产生子$Z_a(\beta)$，它满足

$$\mathrm{i}Z_a(\beta_2)Z_b(\beta_1)=\frac{C_{ab}}{\beta_2-\beta_1-\mathrm{i}\pi}+\cdots, \tag{41}$$

它是对应着渐近态的产生子，类似于Jimbo[9] 文中的二型算子. $Z_a(\beta)$亦满足 ZF 代数,

$$Z_a(\beta_1)Z_b(\beta_2)=S_{ab}^{cd}(\beta_1-\beta_2)Z_d(\beta_2)Z_c(\beta_1), \tag{42}$$

在 $SU(2)$ITM 时, $S_{ab}^{cd}(\beta_1-\beta_2)$由下式给出

$$S_{ab}^{cd}(\beta)=-S_{ab}^{\prime cd}(-\beta), \tag{43}$$

在有边界的情况下，也存在反射矩阵 $R_a^b(\beta)$. 类似于第二节中的讨论，可由边界杨－Baxter 方程(16)式和么正与交叉对称条件(18)式求出 $R_a^b(\beta)$. 这时各符号均改为不带撇，并且交叉对称条件改为

$$C^{ac}R_c^b\left(-\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)=S_{cd}^{ab}(2\beta)C^{de}R_e^c\left(\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right),$$

求得的 $R_a^b(\beta)$为(对角情况下)

$$R_a^b(\beta)=R(\beta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{\nu-\beta}{\nu+\beta}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}R(\beta)&=\frac{\Gamma\left(\dfrac{-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}+\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu+\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}\\&=\frac{f(-\beta,\ \nu)}{f(\beta,\ \nu)},\end{aligned} \tag{44}$$

$$f(\beta,\ \nu)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-\beta+2\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{-\beta}{2\mathrm{i}\pi}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-\beta+\mathrm{i}\pi}{2\mathrm{i}\pi}\right)}. \tag{45}$$

为了使 $Z_a(\beta)$和 $Z_a'(\beta)$有共同的边界态，要求边界参数 ν 和 μ 有以下关系

$$\nu=\mu-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}. \tag{46}$$

Lukyanov 也给出了 $Z_a(\beta)$的玻色振子表达式,

$$\begin{aligned}Z_+(\beta)&=V(\beta)\equiv\,:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\beta)}:,\\ Z_-(\beta)&=\mathrm{i}\,(\chi V(\beta)+V(\beta)\chi),\end{aligned} \tag{47}$$

χ由

$$\langle u|\chi|v\rangle=\langle u|\int_c\frac{\mathrm{d}\gamma}{2\pi}\,\overline{V}(\gamma)|v\rangle,$$

$$\overline{V}(\gamma)=\,:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\varphi}(\gamma)}:\,=\,:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{\varphi}(\gamma+\frac{\mathrm{i}\pi}{2})+\mathrm{i}\overline{\varphi}(\gamma-\frac{\mathrm{i}\pi}{2})}:, \tag{48}$$

来决定，积分路线 c 的定义与 c'一样. $\varphi(\beta)$和 $\varphi'(\beta)$有如下关系

$$\varphi^{+}(\beta)=-\varphi'^{+}\left(\beta-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right),$$

$$\varphi^{-}(\beta)=-\varphi'^{-}\left(\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right). \tag{49}$$

利用(29)式和(49)式，可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^{+}(\beta)}|B\rangle=\frac{g'(-2\beta+\mathrm{i}\pi)}{f'\left(-\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^{-}(-\beta)}|B\rangle,$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}^{+}(\beta)}|B\rangle=\frac{2\beta}{\mu+\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}^{-}(-\beta)}|B\rangle. \tag{50}$$

用类似于第三节中的方法，可以验证由(24)式得到的边界态$|B\rangle$仍满足$Z_a(\beta)$的反射方程

$$Z_a(\beta)|B\rangle=R_a^b(\beta)Z_b(-\beta)|B\rangle \tag{51}$$

同样可验证由(31)式得到的$\langle B|$满足$Z_a(\beta)$的左边界反射方程

$$\langle B|Z_a(\beta+\mathrm{i}\pi)=\langle B|Z_b(-\beta+\mathrm{i}\pi)R_{\bar{a}}^{\bar{b}}(-\beta). \tag{52}$$

只需利用以下式子

$$\langle B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^{-}(\mathrm{i}\pi+\beta)}=\frac{g'(2\beta+\mathrm{i}\pi)}{f'^{*}\left(\beta+\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}\langle B|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi^{+}(\mathrm{i}\pi-\beta)},$$

$$\langle B|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}^{-}(\gamma)}=\frac{(\mu-\gamma)(\mathrm{i}\pi-\gamma)}{2(\mathrm{i}\pi)^2}\langle B|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\varphi}^{+}(2\mathrm{i}\pi-\gamma)}. \tag{53}$$

在以上的讨论中，将边界态$|B\rangle$用玻色振子a'_m来表示，这样将使带边界的问题的讨论如同不带边界时一样方便，例如计算带边界的形状因子和关联函数，这些我们将在以后的文章中予以讨论.

参 考 文 献

[1] M. Jimbo, T. Miwa, Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. RIMS Preprint (1994) 981.

[2] Bougurzi, Weston, N-point correlation functions of the spin-1 XXZ model. preprint 1896, CRM, Univ. de Montreal, 1993.

[3] E. Date, M. Okado, *Int. J. Mod. Phys.*, **A9** (1994) 399; O. Foda et al., *J. Math. Phys.*, **35** (1994) 13; M. Idzumi *et al.*, *Int. J. Mod. Phys.*, **A8** (1993) 1479; M. Jimbo, T. Miwa, Y. Ohta, *Int. J. Mod. Phys.*, **A8** (1993) 1457.

[4] V. G. Drinfel'd, Quantum Group, Proc. ICM-86 (Berkeley, CA), **1** (1987) 798.

[5] I. B. Frenkel, N. H. Jing, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. USA*, **85** (1988) 9373; A. Kato, Y. H. Quano, J. Shiraishi, *Commun. Math. Phys.*, **157** (1993) 119; A. Matsuo, *Commun. Math. Phys.*, **160** (1994) 33; J. Shiraishi, *Phys. Lett.*, **A171** (1992) 243.

[6] S. Lukyanov, Free Field Representation For Massive Integrable Models. (RU – 93 – 30) hep-th/9307196.

[7] F. A. Smirnov, Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory, (1992) World Scientific, Singapore.

[8] S. Ghoshal, A. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A21** (1994) 3841.

[9] M. Jimbo, R. Kedem, T. Kojima, XXZ chain with a boundary.

[10] I. V. Cherednik, *Theor. Math. Phys.*, **61** (1984) 977; E. K. Sklyanin, *J. Phys.*, **A21** (1988) 2375.

Bosonic Formulas for the Boundary state of $SU(2)$ Thirring Model

Wang Yanshen　Shi Kangjie　Yang Wenli　Zhao Liu　Hou Boyu

(*The Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Received 27 January 1995

Abstract

The boundary S matrix for the $SU(2)$ Thirring model is derived and the boundary state is constructed with the bosonic field.

Key words $SU(2)$ Thirring model, boundary S matrix, boundary state.