

# Fokker-Planck 方程局域谐振 方法近似解的研究\*

孙喆民 吴锡真 冯仁发 卓益忠

(中国原子能科学研究院, 北京)

邢静如 张树发

(国防科技大学, 长沙)

## 摘 要

本文通过与精确数值解的比较, 在相当大的核温度和粘滞性范围内验证了具有非谐位的 Fokker-Planck 方程的局域谐振近似的可靠性。

## 一、引 言

核裂变扩散模型的理论经过近年来的一系列工作, 在简化模型定性研究、定量计算等方面取得了很大进展<sup>[1-9]</sup>。由于 Bohr-Wheeler 公式的理论基础过于简化, Kramers 的准稳态近似在温度较高和粘滞性较小时又不可靠, 而且不能描述随时间的演变过程, 所以将基于非平衡输运理论基础上的扩散模型发展成为一种比较实用的裂变理论是必要的。就目前处理的 Fokker-Planck 方程或 Langevin 方程而言, 沿着这个方向的工作存在两个基本问题。首先是量子化的问题, 在处理裂变位、质量参数、粘滞性以及核温度时都应考虑这一点, 并且研究动力学时必须从量子方程出发。第二, 如果考虑壳效应、对效应等因素的影响, 裂变位势将会带来较复杂的形式, 使方程的严格求解几乎成为不可能。近来处理非谐的 Fokker-Planck 方程的局域谐振方法被较为广泛地使用, 其优点在于计算量相对较小并且很容易得到其传播子的量子化形式<sup>[10]</sup>, 但其可靠性还缺乏验证。我们将其数值结果与大计算量的精确数值解进行比较得到了比预期更好的结果。

## 二、数学模型

将裂变核变形运动看作布朗粒子在外势中的扩散, 在形变坐标  $x$  和共轭动量  $p$  的二维相空间中, 几率分布函数  $W(x, p, t)$  可由如下 F-P 方程描述:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} [(\beta p - F(x))] W + D \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}$$

\* 国家自然科学基金资助课题。

本文 1988 年 4 月 2 日收到。

其中  $\beta$ 、 $m$ 、 $D = \beta m T$  分别为粘滞系数, 质量系数和扩散系数.

$$F(x) = -\partial U(x)/\partial x$$

$U(x)$  为裂变位势, 取为二个谐振子和库仑势的光滑联接

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega_A^2 x^2 & -\infty < x \leq x_1 \\ E_f - \frac{1}{2} m \omega_B^2 (x - x_1)^2 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ -p + c \frac{Z^2}{x}, & x_2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

以裂变核  $^{240}\text{Pu}$  为例. 取  $m = 60\text{amu}$ ,  $\hbar\omega_A = 1.64\text{MeV}$ ,  $\hbar\omega_B = 1.16\text{MeV}$ ,  $E_f = 8\text{MeV}$  (4MeV), 断点位  $x_1 = -20\text{MeV}$   $x_2 = 200\text{MeV}$ . 初始分布取零点能下的高斯分布.

$$N_0(x_0, p_0, t = 0) = N \cdot \exp[-x^2/a_x^2 - p^2/a_p^2]$$

$$a_x^2 = \hbar/m\omega_A, \quad a_p^2 = m\hbar\omega_A, \quad a_x \cdot a_p = \hbar.$$

### 三、数值结果与比较

#### 1. 暂态过程的比较

非平衡扩散模型可以描述核裂变的暂态过程, 在考虑中子多次发射与裂变的竞争时, 暂态过程可以产生可观的物理效应<sup>[11]</sup>, 影响中子多重性. 图1给出了中等粘滞性 ( $\beta = 7.5 \times 10^{21}/\text{s}$ ) 下的计算结果, 核温度和裂变位垒高度分别取为  $T = 1.5\text{MeV}$ ,  $E_f = 8\text{MeV}$ . 可以看出两种方法计算得到的鞍点裂变速率随时间的演化有完全相似的暂态过程并且数值符合得很好.

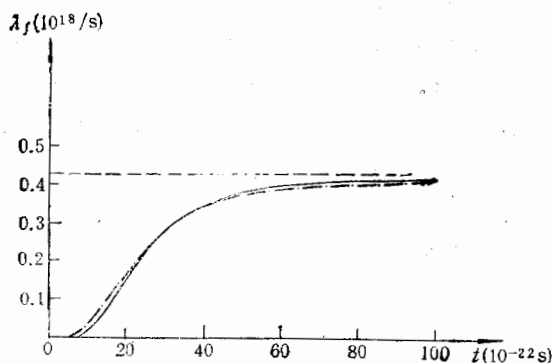


图1 鞍点裂变速率随时间的变化

----- Kramers    ——— 局域谐振近似    - · - · - · 精确数值解  
 $T = 1.5\text{MeV}$   
 $E_f = 8\text{MeV}$   
 $\beta = 7.5 \times 10^{21}/\text{s}$

图2给出了另一组参数  $T = 4\text{MeV}$ ,  $E_f = 4\text{MeV}$  的计算结果. 当  $T \geq E_f$  时, 两种方法均给出明显的 Overshooting 现象, 且在数值上也是符合的.

#### 2. 准稳态的比较

裂变系统经过一个暂态过程后达到准稳态, 鞍点裂变速率也达到相对稳定值. 局域谐振近似方法, 精确数值解及 Kramers 准稳态近似的比较如图3所示. 可以看出两种方法的计算结果均不同于 Kramers 值, 随着粘滞性的增加趋于 Kramers 值, 这是由于基态的真实分布窄于 Maxwell-Blax 分布引起的. 与

精确解相比, 当  $\beta > 0.75 \times 10^{21}/\text{s}$  时局域谐振近似方法的计算误差不超过 10%, 在中等

粘滞性时两种方法的计算误差基本一致。图 4 表示断点平均动能随粘滞性的变化。结果表明两种计算方法的相近程度与图 3 给出的范围一致。

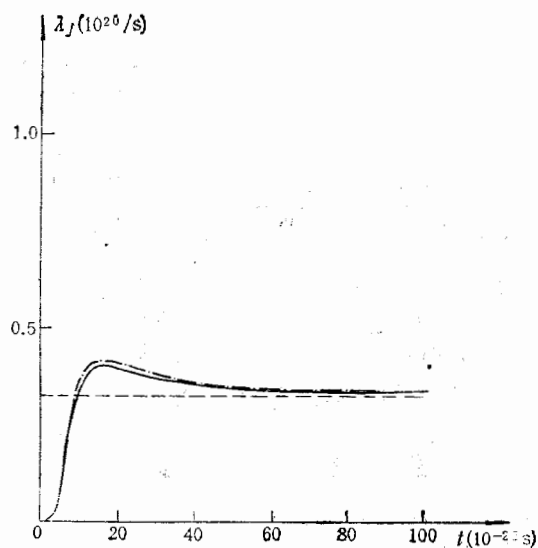


图 2 鞍点裂变速率随时间的变化

----- Kramers    —— 局域谐振近似    -·-·-·- 精确数值解  
 $T = 4\text{MeV}$      $E_f = 4\text{MeV}$      $\beta = 7.5 \times 10^{21}/\text{s}$

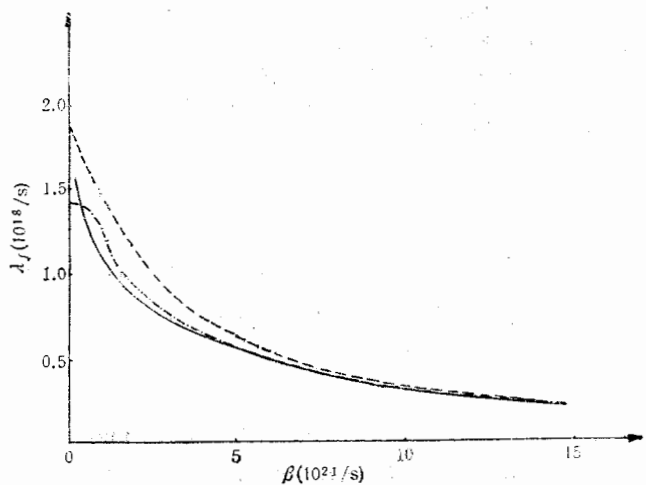


图 3 鞍点裂变速率准稳态值随粘滞系数的变化

----- Kramers    —— 局域谐振近似    -·-·-·- 精确数值解  
 $T = 1.5\text{MeV}$      $E_f = 8.0\text{MeV}$

#### 四、结 论

通过局域谐振近似方法与精确解的比较可以得到如下结果:

1. 当粘滞性  $\beta > 0.75 \times 10^{21}/\text{s}$  时, 局域谐振近似方法是基本可靠的。在中等粘滞

性条件下,其数值与精确解几乎完全符合。

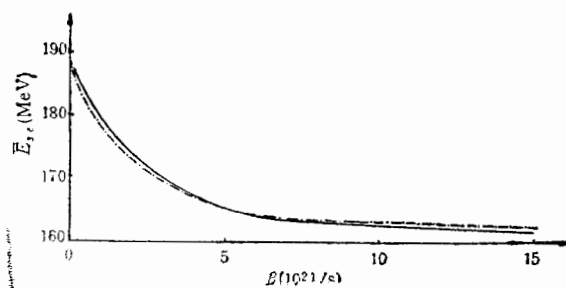


图4 断点平均动能随粘滞系数的变化。

— 局域谐振近似    - - - - - 精确数值解  
 $T = 1.5 \text{ MeV}$      $E_f = 8.0 \text{ MeV}$

本工作精确数值解部分是在银河计算机上完成的。

2. 核温度的大小对计算准确性影响不大。

3. 在很小的粘滞性情况下,局域谐振近似方法完全不可靠。

近年来的实验及理论估计表明,真实核的粘滞性  $\beta \sim 5.0 \times 10^{21}/\text{s}$ ,因此应用于核裂变计算的局域谐振近似方法是可靠的。如何将局域谐振近似方法应用于多维计算还是一个尚待解决的问题。

### 参 考 文 献

- [1] A. Gavron et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 835.
- [2] H. A. Kramers, *Physica*, **7**(1940), 284.
- [3] 冯仁发,卓益忠,李君清,高能物理与核物理,**8**(1984),453.
- [4] 冯仁发,卓益忠,李君清,原子核物理,**6**(1984),113.
- [5] F. Scheuter, H. Hofmann, *Nucl. Phys.*, **A394**(1983), 477.
- [6] H. A. Weidenmuler, J. S. Zhang, *Phys. Rev.*, **C29**(1984), 879.
- [7] Z. D. Lu, J. S. Zhang, R. F. Feng, Y. Z. Zhuo, *Z. Phys. A*, **323**(1986), 477.
- [8] 吴锡真,卓益忠,高能物理与核物理,**4**(1980),113.
- [9] 邢静如,张树发,“Fokker-Planck 方程的精确解”,(1988).
- [10] W. Z. Wu, Z. X. Li, J. A. Maruhn, W. Greiner and Y. Z. Zhuo, *J. of Phys.*, **G14**(1988), 1049.
- [11] P. Grange et al., *Phys. Rev.*, **C34**(1986), 209.

## ON RELIABILITY OF THE LOCALLY HARMONIC APPROXIMATION METHOD FOR SOLVING THE FOKKER-PLANCK EQUATION

SUN ZHEMIN    WU XIZHEN    FENG RENFA    ZHUO YIZHONG

(Institute of Atomic Energy, P. O. Box275, Beijing)

XING JINGRU    ZHANG SHUFA

(National University of Defense Technology, Changsha)

### ABSTRACT

By comparing the results calculated by the locally harmonic approximation method and the numerical solution for the FOKKER-PLANCK equation with a nonlinear force, the reliability of the locally harmonic approximation has been examined and discussed in a considerably wide range of nuclear temperature and viscosity.