第 34 卷 第 14 期 计 算 机 工 程 2008 年 7 月
Vol.34 No.14 Computer Engineering July 2008

·人工智能及识别技术· 文章编号：1000—3428(2008)14—0194—03 文献标识码：A 中图分类号：TP301.6

基于遗传算法的 NURBS 曲线降阶

刘 彬

(贵州师范大学数学与计算机学院，贵阳 550001)

摘 要：采用遗传算法实现 NURBS 曲线直接降多阶。提出并证明了 NURBS 曲线保端点降阶的必要条件，在此基础上将 NURBS 曲线的节点序列、控制顶点和权用浮点数编码为基因个体，运用遗传算法，通过循环执行选择、交叉、变异求解得到最优解或者次优解。实例说明了采用该方法实现 NURBS 曲线降阶有较高的精确度。

关键词：遗传算法；NURBS 曲线；降阶

Degree Reduction of NURBS Curves Based on Genetic Algorithm

LIU Bin

(School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001)

【Abstract】The genetic algorithms is introduced to reduce several degrees in one time on NURBS curves. Before using the method, necessary conditions of NURBS curves' degree reduction with the same end points have been given and proved. The knot series control vertices and weights of NURBS curves are encoded as genes. The selection, crossover and mutation process are executed cyclically to get the global optimum or the sub-optimal by genetic algorithms. The following example proves the NURBS curves can be reduced several degrees precisely and efficiently with this method.

【Key words】genetic algorithm; NURBS curves; degree reduction

1 概述

在计算机图形学和计算机辅助几何设计领域，非均匀有理B样条(NURBS)曲线已经成为设计和描述各种复杂曲线的标准，它能表示所有的自由曲线。NURBS曲线不仅能表达一般的B样条和Bézier曲线，还能精确描述二次曲线。由于在不同的设计制造系统中所采用的阶数各不相同，为了能够在系统之间实现数据的转换，必然要解决其降阶问题。因此，NURBS曲线的降阶问题不仅有着重要的理论价值，而且有着迫切的应用需求。人们对于Bézier曲线、B样条等曲线的降阶有很多的研究成果，文献[1]利用约束优化方法先求出退化的B样条曲线来逼近原曲线，再对退化的曲线通过分段解线性方程组进行降阶。文献[2]先将整个曲线分成几个区间，再分区间将B样条进行降阶。文献[3]提出了B样条的降阶公式和近似降价方法和算法。文献[4]通过控制点扰动项用退化B样条曲线逼近原曲线。但对于NURBS曲线，由于其比较复杂，对它的降阶问题研究得比较少，目前仅找到利用显示矩阵和多项式逼近论来解决NURBS曲线降阶的问题[5]。

本文提出了一种 NURBS 曲线降阶的新方法，证明了保持端点不变的条件，采用该方法能够实现一次对 NURBS 曲线降多阶，得到的 NURBS 曲线为全局最优或次优。

2 问题的提出

设$P_1,P_2,\cdots,P_n$为给定的n个控制顶点，$w_1,w_2,\cdots,w_n$为相应控制顶点的权，$T=\{\,t_0\le t_1\le\cdots\le t_r\le\cdots\le t_{n+1}\le\cdots\le t_{r+n}\,\}$为节点序列，由这些控制顶点、权和节点定义的$r$次($r$+1 阶) NURBS曲线的参数方程为

$$f(t)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}P_j w_j N_{j,r}(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n}w_j N_{j,r}(t)} \tag{1}$$

其中，$N_{j,r}(t)$为 B 样条基函数，满足

$$\begin{cases} N_{i,0}(t)=\begin{cases}1 & t_i\le t<t_{i+1}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\\ N_{i,k}(t)=\dfrac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\dfrac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)\\ t_0\le t_1\le\cdots\le t_r\le\cdots\le t_{n+1}\le\cdots\le t_{r+n}\\ \text{规定}\dfrac{0}{0}=0\end{cases} \tag{2}$$

定理 NURBS曲线首末端点取P_1, P_n的必要条件：节点序列规范化并取值为 $t_0=t_1=\cdots=t_r=0$， $t_n=t_{n+1}\cdots=t_{r+n}=1$。

证明：由上可知该 NURBS 曲线的首端点的值为 $f(t_r)$，末端点为 $f(t_n)$。

$$f(t_r)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}P_j w_j N_{j,r}(t_r)}{\sum\limits_{j=0}^{n}w_j N_{j,r}(t_r)}=$$

$$\frac{P_0w_0N_{0,r}(t_r)\ +P_1w_1N_{1,r}(t_r)\ +\ldots+P_nw_nN_{n,r}(t_r)}{w_0N_{0,r}(t_r)\ +w_1N_{1,r}(t_r)\ +\ldots+w_nN_{n,r}(t_r)}\overset{\text{由式(2)可得}}{=\!=\!=}$$

$$\frac{P_0w_0\times 1\ +P_1w_1\times 0\ +\ldots+P_nw_n\times 0}{w_0\times 1+w_1\times 0\ +\ldots+w_n\times 0}=P_0$$

同理可得： $f(t_n)=P_n$ 证毕。

由上面的定理可知，满足这一条件的 NURBS 曲线首末端点很容易控制，便于在工程上的应用，在本文中所讨论的 NURBS 曲线都将节点规范化并且满足该定理。

作者简介：刘 彬(1973－)，男，讲师、硕士，主研方向：计算机图形学，网络计算

收稿日期：2007-08-12 **E-mail：**csuliubin@126.com

NURBS 曲线的降阶问题实质上就是要找出另外一条 $s(s<r)$次 NURBS 曲线。

$$g(t)=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}P_j w_j N_{j,s}(t)}{\sum_{j=0}^{n}w_j N_{j,s}(t)} \tag{3}$$

使 $g(t)$尽量逼近 $f(t)$。2 条曲线的逼近程度可以用其参数方程差的最大值来描述，即

$$h=\max(|g(t)-f(t)|) \quad t_r \le t \le t_{n+1} \tag{4}$$

如果 h 的值越小，降阶后的曲线就越逼近原曲线。由于控制顶点、权和节点向量都会影响 NURBS 曲线，为了减少计算量，同时保持曲线的端点不变，将降阶后的 NURBS 曲线的节点向量在降阶前 NURBS 曲线的节点向量维数稍作修改即可。如降一阶，可将降阶前节点向量的第一个分量和最后一个分量删除作为降阶后的节点向量，相应降阶后曲线的控制顶点也要比降阶前少一个。因此，问题的实质就是找出一组控制顶点、权和节点向量，使由控制顶点、权和节点矢量确定的 NURBS 曲线尽可能逼近原 NURBS 曲线。将其转化为带约束条件的优化问题：

$$H(f,g,t)=\min\ h \quad \text{s.t.} \quad f,g\in R^2 \tag{5}$$

通常解决优化问题是基于迭代原理的方法，如模拟退火法、共轭方向法、罚函数法等，但传统方法存在以下缺点：(1)一般对目标函数有较强的限制，如连续、可微、单峰等。大部分优化方法很容易陷入局部最优，难达到整体最优。(2)在算法前要有很多准备工作，如求目标函数的导数，矩阵的逆等，当目标函数很复杂时，这些工作会很困难甚至不可能完成。(3)结果与选取的初始值有很大关系，而初始值的选取又依赖于优化者对问题背景的认识及所掌握的知识。(4)算法通用性。在使用优化方法时需要有相当多的知识去判断使用哪一种方法较为适合。

近年来，遗传算法等智能计算中的仿生学方法在优化领域取得了较好的应用。遗传算法是一类以达尔文自然进化论与 Mendel 遗传变异理论为基础的求解复杂全局问题的仿生性算法，它模拟生物进化过程，通过向自然学习来解决问题，具有以下独特特征：

(1)对可行解表示的广泛性。遗传算法的处理对象不是参数本身，而是针对那些参数集进行编码的基因个体。编码操作使得遗传算法可以直接对结构对象进行操作。

(2)传统的搜索算法都是单点搜索，这种点对点的搜索方法，对于多峰分布的搜索空间常常会陷于局部的某个单峰的极值点。而遗传算法采用的是同时处理群体多个个体的方法，即同时对搜索空间中的多个解进行评估，因而遗传算法具有较好的全局搜索性能，易于并行化。

(3)遗传算法不需要求导或其他辅助知识，而只需要影响搜索方向的目标函数和相应的适应度函数。

(4)内在的启发式随机搜索特性。遗传算法不是采用确定性规则，而是采用概率的变迁规则来指导它的搜索方向，在搜索过程中不容易陷入局部最优。

3 算法描述

3.1 编码的表示和初始种群的选取

遗传算法的第 1 步就是要对所要解决的问题变量实现编码，主要有二进制编码、符号编码和浮点数编码 3 大类。本文采用的是浮点数编码，较其他编码方法有表示精度高、范围大、减少计算复杂性等主要优点。编码表示为一个实数向量，实数向量由 2 部分组成，前一部分为非 0 控制顶点和权，每个控制顶点的 x, y 轴坐标以及权分别用一个分量表示，每个个体的分量都由随机值填充，范围可以任意。后一部分表示节点矢量，在[0,1]之间，从小到大排列。由式(1)降一阶的编码如图 1 所示。

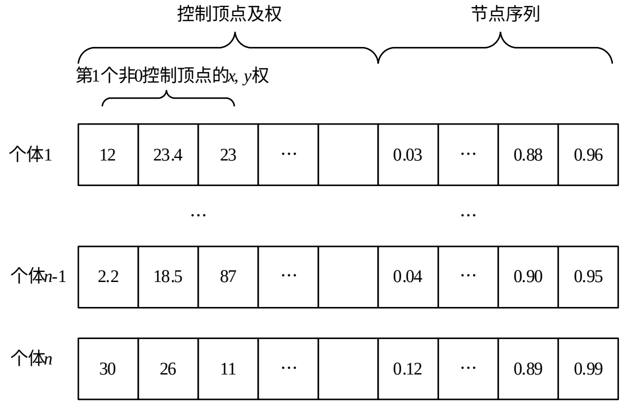

图 1 编码表示

3.2 适应值函数

群体的每个个体都有一个适应值，个体的性质越优秀，适应值就越大，其繁殖下一代的可能性就越大，故本适应值函数选为

$$F(t)=\frac{1}{\max|f(t)-g(t)|} \tag{6}$$

3.3 选择

选择的目的是为了从当前群体中选择出优良的个体，使它们有机会作为父代繁殖子孙，较大的选择压力会使最优个体具有较高的复制数目。常用的方法有轮盘赌选择、锦标赛选择、随机竞争、最佳保留等。为了能保留搜索过程中的最优解，本文采用的是锦标赛选择。

3.4 杂交

双亲的染色体以杂交的方式产生出子代染色体，从而使子代个体继承了双亲的遗传特性，这里采用算术交叉法。假设在 2 个个体 X_A^t, X_B^t 之间进行算术交叉，则交叉后所产生的 2 个新个体为

$$\begin{cases} X_A^{t+1}=\alpha X_B^t+(1-\alpha)X_A^t \\ X_B^{t+1}=\alpha X_A^t+(1-\alpha)X_B^t \end{cases} \tag{7}$$

其中，$\alpha\in(0,1)$ 可取定值也可取变化值，本文采用随机值。

3.5 变异

变异在遗传算法的作用主要有以下 2 个：

(1)改善遗传算法的局部搜索能力。遗传算法使用交叉算子已经从全局的角度出发找到了一些较好的个体编码结构，它们已接近或有助于接近问题的最优解。这时若再使用变异算子来调整个体编码串中的部分基因值，就可以从局部的角度出发使个体更加逼近最优解。

(2)维持群体的多样性，防止出现早熟现象。变异算子用新的基因值替换原有基因值，从而可以改变个体编码串的结构，维持群体的多样性，这样有利于防止出现早熟现象。变异算子使得遗传算法在接近最优解邻域时能加速向最优解收敛，并可以维持群体多样性，避免未成熟收敛。

在本文的问题中，个体经过变异后可能不一定能保持原来的特点，可能会出现不是问题可行解的情况。因此，为使变异后个体仍满足要求，必须保证变异后个体中节点部分仍然是[0,1]之间的递增序列，如图 1 所示。本文采用以下的变异法则。如式(1)降 1 阶，节点序列中删除 0 和 1 的节点各 1

个，故降阶后的NURBS曲线控制顶点为n-1 个，为了保持首末端点不变，在个体中包含的曲线非 0 控制顶点和权共有 3×(n-2r-1)项，节点项共有n+r-1 个。记待变异个体为I=(i_1,i_2,⋯,$i_{4n-5r-4}$)，产生一个 1~4n-5r-4 之间的随机数k，则个体的第k位基因g_k产生变异为 g'_k ，g'_k 由下式决定：

$$g'_k=\begin{cases}\text{随机数} & 1\le k\le 3n-6r-3\\ \alpha g_{k+1} & k=3n-6r-2\\ g_k+\alpha(g_{k+1}-g_k) & 3n-5r-3<k<4n\text{-}5r\text{-}4\\ g_k+\alpha(1-g_k) & k=4n\text{-}5r\text{-}4\end{cases}\qquad(8)$$

3.6 收敛条件

当满足下列条件之一时，遗传算法结束：

(1)已经处理完所有代群体；

(2)已经达到需要的误差范围。

3.7 控制参数

遗传算法中的控制参数主要有群体规模、交叉概率、变异概率、终止代数等 4 个参数。本文中群体规模取 40，交叉概率取 0.5，变异概率在算法早期取 0.1，后期取 0.01，这样便于在早期扩大搜索空间，在后期增加收敛的速度。遗传代数取 200。

4 算法实现

(1)输入降阶次数，降阶前NURBS曲线的节点序列{t_0, t_1,⋯,t_{n+r+1}}及控制顶点 p_i 和权 w_i $(i=0,1,\cdots,k)$ ；

(2)绘制降阶前 NURBS 曲线；

(3)初始群体代数和控制参数；

(4)产生初始群体；

(5)计算群体的每个个体的适应值；

(6)若迭代次数小于代数并且个体适应值都大于给定的误差，转(7)，否则转(10)；

(7)按锦标赛选择原则从群体中复制个体进入下一代；

(8)按 0.5 的概率采用算术交叉的方法生成新个体；

(9)如果 $H\ge 20$，变异概率取 0.1，否则取 0.05。按变异概率对个体按式(8)产生新个体，转到(5)；

(10)绘制降阶后的 NURBS 曲线。

5 计算举例

数值计算软件采用 Matlab7.1, Windows 2000，硬件环境 CPU PD820 2.6 GHz，内存 1 GB。

例 ∶一条 5 阶 NURBS 曲线，节点序列 $T=\{t_i\}_{i=1}^{13}$={0,0,0,0,0, 0.1,0.3,0.8,1,1,1,1,1}，控制顶点及其权 $\{c_i\}_{i=1}^{8}$ 为{0,0,1},{10,45, 18},{18 65 12},{80 120 1},{110 50 12},{150 0 20},{180 -10 4},{260 20 1}。对此曲线用遗传算法降一阶所得曲线及相应的控制顶点与原曲线和控制顶点如图 2 所示。实曲线代表原曲线，实折线代表原曲线的控制多边形，虚曲线代表降阶后的曲线，虚折线代表降阶后的控制多边形。从图 2 可以看出，降阶后的曲线与原曲线基本重合，降阶效果比较好。其中，节点序列 $T=\{t_i\}_{i=1}^{11}$={0,0, 0, 0,0.266 3, 0.543 2, 0.876 5,1,1,1,1}。控制顶点及其权 $\{c_i\}_{i=1}^{7}$ 为{0, 0, 1}, {6.586 6, 43.441 4,96.386 6}, {11.016 1,88.694 9,108.475 2},{146.540 6,19.981 0,110.816 5}, {155.170 1, -8.021 1, 86.114 1}, {228.661 9, 4.537 3, 6.228 5}, {260 20 1}。

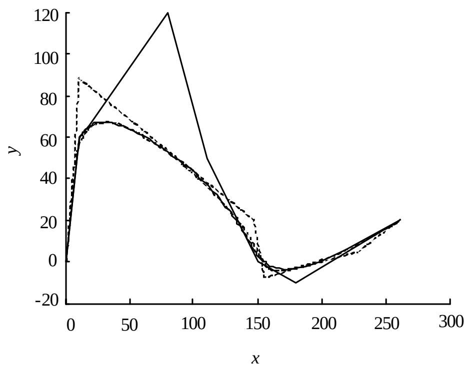

图 2 降一阶的曲线与控制线

对此曲线用遗传算法降两阶所得曲线及相应的控制多边形与原曲线和控制多边形如图 3 所示。线型表示同前，从图中可以看出，直接降两阶的曲线仍与原曲线吻合得比较好。其中，节点序列 $T=\{t_i\}_{i=1}^{9}$={0,0,0,0.225 7,0.579 6,0.832 8, 1,1,1}，控制顶点及其权 $\{c_i\}_{i=1}^{6}$ 为{0,0,1},{10.772 0,61.6797, 88.138 2}, {80.656 3,87.883 7,25.032 0},{152.596 6,-0.3529, 98.973 5}, {192.367 9,-11.454 5,4.820 1},{260 20 1}。

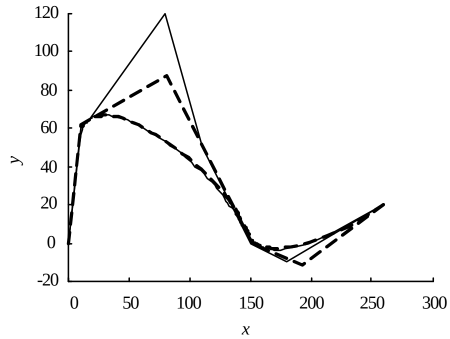

图 3 降两阶的曲线与控制线

6 结束语

虽然 NURBS 曲线能够将自由曲线与初等二次曲线的表示统一起来，用以解决一个几何系统存在几种数学方法的问题，但由于 NURBS 曲线的表达式过于复杂，这种曲线的降阶方法的研究成果相对比较少。本文将遗传算法应用到 NURBS 曲线的降阶，并且能实现一次降多阶，遗传算法得到的逼近曲线效果比较好，精度也很高，具有使用价值。

参考文献

[1] 秦开怀, 黄海昆. B 样条曲线降阶新方法[J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 306-310.

[2] Chen Falai, Yang Xiaofeng, Yang Wu. Degree Reduction of Interval B-spline Curves[J]. 软件学报, 2002, 13(4): 490-500.

[3] 潘日晶, 姚志强, 潘日红. B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法[J]. 计算机学报, 2003, 26(10): 1255-1260.

[4] 张彩明, 何 军, 张 锐. 拢动约束和最佳平方逼近的 B 样条曲线的降阶[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(10): 1392-1395.

[5] 成 敏, 王国瑾. 基于显式矩阵表示和多项式逼近论的 NURBS 曲线降多阶[J]. 中国科学(E 辑), 2003, 33(8): 673-680.