第22卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.22, No.1
1998 年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1998

快报

# Maxwell–Chern–Simons场的 Casimir 效应

张智和
(首都医科大学生物医学工程系 北京 100054)

李子平
(北京工业大学应用物理系 北京 100022)

**摘要** 利用约束理论对 Abel Maxwell–Chern–Simons 场进行路径积分量子化. 并利用复变函数论中 Plana 求和公式,计算(2+1)维空间中两个平行导线型边界的 Casimir 效应. 不引任何截断参数,而得出有限的解析表达式.

**关键词** Casimir 效应 路径积分 Plana 求和公式

## 1 引 言

随着(3+1)维空间中 Casimir 效应的不断深入研究,(2+1)维空间中的 Casimir 效应也开始受到人们的重视[1]. 尤其对 Chern–simons(C–S)场的研究,不断地更新着人们的观念,并提出了任意子(具有分数自旋和分数统计性)的 C–S规范场理论. 任意子与分数量子 Hall 效应[2]的理论有关. 电磁场的 Casimir 效应已有广泛的研究,近来已有用局域 Green 函数方法讨论 C–S场的 Casimir 效应及有限温度下的 Casimir 效应[1].

本文利用路径积分方法研究 Maxwell C–S场的Casimir 效应. 在第二节中,利用约束理论对 Maxwell C–S 场进行量子化,第三节中,考虑两个平行导线型边界,利用复变函数论中的 Plana 公式计算出真空的Casimir 能,进而计算Casimir 力.

## 2 Maxwell–Chern–Simons 场路径积分量子化

Maxwell C–S场的路径积分量子化过程,在文献[4]中已给出,但所给出的量子化结果是有问题的,这里重新予以讨论.

Maxwell C–S场的拉氏量密度为[1]:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu A_\nu A_\lambda, \tag{1}$$

1997–04–16收稿

其中 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$, $\mu,\nu,\lambda=0,1,2$; $\varepsilon^{012}=1$．选度规为 $g_{\mu\nu}=(1,-1,-1)$.

由文献 [4] 中的 (22) 式相对应得:

$$Z=\int \mathrm{D}\pi^\mu \mathrm{D}A_\mu \delta(\pi^0)\,\delta(\partial_i\pi^i)\delta(\partial_i A^i)\delta(\nabla^2 A_0-m\varepsilon^{ij}\partial_i A_j)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\times\right.$$

$$\left.\left[\pi^i\dot{A}_i-\frac{m}{2}\varepsilon^{ij}A_j\dot{A}_i+\frac{1}{2}\pi^i\pi_i+\frac{m^2}{2}A_iA^i+A_0\partial_i\pi^i-\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right]\right\}.$$

由 $\delta$ 函数 $\delta(\nabla^2 A_0-\varepsilon^{ij}\partial_i A_j)$ 可保证

$$\partial_i A_0=-m\varepsilon^{ij}A_j,$$

从积分中积出 $A_0$, 同时注意到

$$-\frac{m}{2}\varepsilon^{ij}A_j\dot{A}_i\approx\frac{1}{2}\dot{A}_i\partial^i A_0\approx\frac{1}{2}\partial^i(\dot{A}_iA_0),$$

因它为积分表面项, 可从积分中略去, 再积出 $\pi^0$ 得

$$Z=\int \mathrm{D}\pi^i\mathrm{D}A_i\delta(\partial_i\pi^i)\delta(\partial_iA^i)\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\pi^i\dot{A}_i+\frac{m^2}{2}A_iA^i+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2}\pi^i\pi_i+A_0\partial_i\pi^i-\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}\right]\right\}.$$

这里 $\delta$ 函数 $\delta(\partial_i\pi^i)\,\delta(\partial_iA^i)$ 要求积分只对场的横向分量积分, 所以

$$Z=\int \mathrm{D}\pi^i_{\mathrm{T}}\mathrm{D}A_{\mathrm{T}_i}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\pi^i_{\mathrm{T}}\dot{A}_{\mathrm{T}_i}+\frac{m^2}{2}A_{\mathrm{T}_i}A^i_{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\pi^i_{\mathrm{T}}\pi_{\mathrm{T}_i}-\frac{1}{4}F^{ij}_{\mathrm{T}}F_{\mathrm{T}_{ij}}\right]\right\}.$$

利用高斯积分积出 $\pi^i_{\mathrm{T}}$, 并略去横向角标 T 得

$$Z=\int \mathrm{D}A_i\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}_i-\frac{1}{2}\nabla^2A_iA^i+\frac{m^2}{2}A_iA^i\right]\right\}=$$

$$\int \mathrm{D}A_i\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}_i-\frac{1}{2}A_i(\nabla^2-m^2)A_i\right]\right\},\qquad(2)$$

此处是与 [3] 中 (25) 式的不同之处.

## 3 Maxwell C–S 场的 Casimir 效应

文献 [1] 中计算了 Maxwell C–S 场在平行导线型边界的 Casimir 效应, 方法上仍是用传统的局域 Green 函数方法. 这里将讨论同一模型问题, 利用上节的约束 Hamilton 系统的路径积分量子化结果及利用复变函数论中的 Plana 求和公式[4], 不引入任何截断参数或函数, 也不用场论中的重正化方法, 直接得出有限的解析表达式.

利用上一节中的路径积分量子化结果, 考虑平行导线型边界, 并设在边界处场量为 0,

导线长为 $L$. 两线距离为 $a$,仿文献 [5]的方法,对 $A_\mu(x)$作如下付氏展开

$$A_\mu(x) = \sum_k \tilde{A}_\mu(k)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{TLa}}.$$

代入 $Z$中,并作一 Wick 转动,从闵氏空间过度到欧氏空间,则

$$Z = \int DA_i \exp\left\{-\int d^3x\left[\frac{1}{2}\sum_k k_0^2\frac{1}{TLa}\tilde{A}_i(-k)\tilde{A}_i(k) + \frac{1}{2TLa}\sum_k(-k_i^2 - m^2)\tilde{A}_i(-k)\tilde{A}_i(k)\right]\right\} =$$

$$\int DA_i \exp\left\{-\int d^3x\left[\frac{1}{2}\frac{1}{TLa}\sum_k(k_0^2 - k_i^2 - m^2)\tilde{A}_i(-k)\tilde{A}_i(k)\right]\right\} =$$

$$\int DA_i \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\sum_k(k_0^2 - k_i^2 - m^2)\tilde{A}_i(-k)\tilde{A}_i(k)\right]\right\}.$$

引入展开式

$$\tilde{A}_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_\mu^R(k) + iA_\mu^I(k)];\ \tilde{A}_\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_\mu^R(k) - iA_\mu^I(k)].$$

代入上式,并注意到 $\tilde{A}_i(-k)\tilde{A}_i(k)$对 $i$ 的求和,得

$$Z = \int DA_i \exp\left\{-\sum_k(k_0^2 - k_i^2 - m^2)([A_i^R(k)]^2 + [A_i^I(k)]^2)]\right\} =$$

$$\int DA_i \exp\left\{-\left[\sum_k(k_0^2 - k_i^2 - m^2)A_i(k)\right]^2\right\} =$$

$$\prod_k(k_0^2 - k_i^2 - m^2)^{-\frac{1}{2}},$$

由此得真空零点能为

$$E_0 = -\frac{1}{T}\ln Z = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_K\ln(k_0^2 - k_i^2 - m^2),$$

对 $k_0$求和,并抛掉与 $a$ 无关的项得

$$E_0 = \frac{L}{2(2\pi)}\int dk_1\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_1^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2},$$

当不考虑边界影响时,$n$ 应取连续值,即

$$E'_0 = \frac{L}{2(2\pi)}\int dk_1\left\{\int_0^\infty dn\left[k_1^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + m^2\right]^{\frac{1}{2}} - [k_1^2 + m^2]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

令 $f(n) = \sqrt{n^2 + \mu^2}$, $\mu^2 = \dfrac{(k_1^2 + m^2)a^2}{\pi^2}$, 则

$$E'_0 = \frac{L}{4a}\int dk_1\left[-f(0) + \int_0^\infty f(n)dn\right].$$

由于$f(0)$为真空背景项，即为积分无穷大项所以对其改变系数$\left(乘\frac{1}{2}\right)$，将不会影响物理结果，由此得 Casimir 能为：

$$E_c = E_0 - E'_0 = \frac{L}{4a}\int_0^\infty \mathrm{d}k_1\left[\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) - \int_0^\infty f(n)\,\mathrm{d}n\right].$$

利用 Plana 公式[4]

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) + \frac{1}{2}f(0) - \int_0^\infty f(n)\mathrm{d}n = -2\int_\mu^\infty \mathrm{d}t\frac{\sqrt{t^2-\mu^2}}{\mathrm{e}^{2\pi t}-1},$$

得

$$E_c = -\frac{L}{2a}\int_0^\infty \mathrm{d}k_1\int_\mu^\infty \mathrm{d}t\frac{\sqrt{t^2-\mu^2}}{\mathrm{e}^{2\pi t}-1}.$$

令 $v = \frac{a}{\pi}k_1$，则

$$E_c = -\frac{L\pi}{2a^2}\int_{\frac{am}{\pi}}^\infty \mathrm{d}t\int_0^{\sqrt{t^2-\frac{m^2a^2}{\pi^2}}}\mathrm{d}v\frac{\sqrt{\left(t^2-\frac{m^2a^2}{\pi^2}\right)-v^2}}{\mathrm{e}^{2\pi t}-1} =$$

$$-\frac{L\pi^2}{4a^2}\int_{\frac{am}{\pi}}^\infty \mathrm{d}t\frac{t^2-\frac{m^2a^2}{\pi^2}}{\mathrm{e}^{2\pi t}-1} =$$

$$-\frac{L}{32a^2\pi}\int_{2am}^\infty \mathrm{d}t\frac{t^2-4m^2a^2}{\mathrm{e}^t-1}. \tag{3}$$

单位长度的 Casimir 力为

$$f = -\frac{\partial E_c}{L\partial a} \approx -\frac{1}{16\pi a^3}\int_{2ma}^\infty \mathrm{d}y\frac{y^2}{\mathrm{e}^y-1}, \tag{4}$$

此结果与 [1] 中的结果 (47) 式相同

考虑 $m$ 的极限情况，当 $m=0$ 时，利用公式

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y\frac{y^n}{\mathrm{e}^y-1} = \Gamma(n+1)\xi(n+1),$$

其中$\Gamma$为$\Gamma$函数，$\xi$为 Riemann $\xi$函数；得 $m=0$ 时的 Casimir 力为

$$f(m=0) = -\frac{1}{8\pi a^3}\xi(3); \tag{5}$$

当 $ma \gg 1$ 时，得

$$f(m\gg 1) = -\frac{1}{8\pi a^3}(2m^2a^2+2ma+1)\mathrm{e}^{-2ma}. \tag{6}$$

由此得到了与 [1] 相同的结论，即由 (5) 式给出，证明两平行线边界条件下的 Maxwell C－S 场的 Casimir 力为一种吸引力；同样讨论 $m$ 的两种极限情况 $m=0$；$m\gg 1$ 时，分别由 (6) 式；(7) 式给出．本文利用了较严格的计算方法——复变函数论中 Plana 求和公式，而没有利用重整化的近似方法．关于 C－S 场的 Casimir 效应问题，还有很多方面，如非

Abel 情况及 C－S 场与其它物质场耦合、有限温度、不同边界类型等，这些问题都有待于进一步研究．

## 参　考　文　献


[1] K. A. Miltton, Y. J. Ng. Phys. Rev., 1990, **D42**:2875; Phys. Rev., 1992, **D46**:842

[2] R. Tao, Y. S. Wu. ibid, 1985, **31**:6859

[3] Sze－Shiang Feng, Xi－Jun Qiu. Int. J. Phys., 1995, **34**:1827

[4] Ni Guangjiong, Zhang Min, Gong Jiawen. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1991, **15**:695
(倪光炯，张敏，宫家文．高能物理与核物理，1991，**15**：695)

[5] Zheng Taiyu. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1990, **14**:796
(郑泰玉．高能物理与核物理，1990，**14**：796)


# Casimir Effect of the Maxwell－Chern－Simons Field


Zhang Zhihe

(*Department of Bicmedicine Engineering, Capital University of Medical Sciences, Beijing* 100054)

Li Ziping

(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)



**Abstract**　Based on the Faddeev formalism of path－integral quantization for constrained Hamiltonian system, we reexammine the quantization of Maxwell Chern－Simons field, and use the Plana summation formula in the theory of conplex variable function, the Casimir effect belween two parallel lines in the (2＋1)－dimensional space－time has been calculated, in which we do not use any cutoff of parameter; the finite analytical expression is also obtained.



**Key word**　Casimir effect, path integral, Plana summation formula

Received 16 April 1997