

基于FRFT的均匀圆阵DOA估计

屈海涛, 齐林, 穆晓敏, 杨守义

(郑州大学信息工程学院, 郑州 450052)

摘要: 针对广泛应用于第三代移动通信系统中的均匀圆阵, 将分数阶 Fourier 变换的时频特性和分数阶 Fourier 域波束形成技术相结合, 给出一种多分量 LFM 信号的波达方向估计算法。与其他方法相比, 该算法在一定程度上提高了精确度。仿真验证了在多径和多普勒频移存在的复杂信道中算法的有效性。

关键词: 分数阶 Fourier 变换; DOA 估计; 均匀圆阵

DOA Estimation of Uniform Circular Array Based on FRFT

QU Hai-tao, QI Lin, MU Xiao-min, YANG Shou-yi

(Information Engineering School, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052)

【Abstract】 For the UCA widely used in the third mobile communication system, characteristics of the FRFT are combined with the beamforming technique in the fractional Fourier domain, an algorithm for the Direction Of Arrival(DOA) estimation of the multi-component LFM sources is proposed. Compared with other methods, the accuracy is enhanced in a certain extent. Simulation verifies that the method is effective in the multipath and doppler frequency of signals incident channels.

【Key words】 fractional Fourier transform; Direction Of Arrival(DOA) estimation; Uniform Circular Array(UCA)

1 概述

均匀圆阵(Uniform Circular Array, UCA)具有能实施全方位测向、测向精度随方位角变化不明显、可进行系统校正等线阵无法比拟的优点, 是第三代移动通信基站系统中的主要接收天线。因此, 基于均匀圆阵的波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计一直是阵列信号处理领域的研究热点。文献[1]提出了一种均匀圆阵测向的UCA-RB-MUSIC方法, 但是算法仅适合处理平稳信号, 而实际中大量存在的是以 LFM 为代表的非平稳信号。文献[2]将时频分析和阵列信号处理相结合, 通过对空间时频矩阵插值实现了 LFM 信号的 DOA 估计, 但计算量大且存在交叉项干扰等问题。借助新的时频分析工具——分数阶 Fourier 变换(Fractional Fourier Transform, FRFT), 文献[3]提出了一种 LFM 信号 DOA 估计方法, 但该方法不适用于均匀圆阵。

基于此, 本文提出了一种基于FRFT的均匀圆阵DOA估计算法, 对于多分量 LFM 信号, 利用FRFT的时频旋转和解线调特性, 首先将观测信号变换为一系列平稳的单频信号。然后在分数阶 Fourier(Fractional Fourier, FRF)域进行波束空间的映射, 将阵元空间的均匀圆阵转化为模式空间的虚拟均匀线阵, 从而利用传统的谱估计方法实现了 LFM 信号的 DOA 估计。算法挖掘了信号的时、频、空信息, 和其他方法相比, 避免了复杂的时频汇聚、参数配对运算, 有效地提高了精确度^[4]; 对于多分量信号, 不存在交叉项干扰, 在多径和多普勒频移等环境中算法仍具有适用性。

2 FRFT 与阵列模型

2.1 FRFT 的定义及性质

近年来, FRFT 引起了信号处理领域的广泛关注。V. Namis 首先从数学的角度提出了 FRFT 的定义, Lalmeicla^[5] 分析了它和 Wigner-Ville 分布的关系并将其解释为时频平面

的旋转。如果信号的 FFT 看成将其由时间轴上逆时针旋转 $\pi/2$ 后到频率轴上的表示, 则 FRFT 可以看成将信号在时间轴上逆时针旋转 α 到 u 轴上的表示, 如图 1 所示。

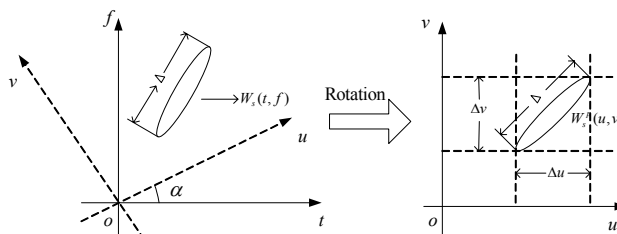


图 1 FRFT 及 Wigner-Ville 分布

信号 $x(t)$ 的 FRFT 定义为

$$X_\alpha(u) = F^p[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) K_\alpha(t, u) dt \quad (1)$$

其中, p 为 FRFT 的阶; $\alpha = p\pi/2$; $F^p[\cdot]$ 为 FRFT 的算子符号; $K_\alpha(t, u)$ 为 FRFT 的变换核:

$$K_\alpha(t, u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2\pi}} \exp(j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - jtu \csc \alpha), & \alpha \neq n\pi \\ \delta(t - u), & \alpha = 2n\pi \\ \delta(t + u), & \alpha = (2n + 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

FRFT 是一维的线性变换, 满足旋转相加性。信号在 FRF 域上的表示, 同时融合了信号的时域和频域信息, 可以看作一种时频分析方法。文献[6]给出 FRFT 的几个重要性质:

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60472044)

作者简介: 屈海涛(1981—), 男, 硕士研究生, 主研方向: 非平稳信号处理及其在参数估计中的应用; 齐林、穆晓敏、杨守义, 教授、博士生导师

收稿日期: 2007-11-10 **E-mail:** quhaitao1999@126.com

$$F^p[e^{j\alpha^2/2}] = \sqrt{\frac{1+j\tan\alpha}{1+c\tan\alpha}} \exp\left(\frac{u^2}{2} \frac{c-\tan\alpha}{1+c\tan\alpha}\right) \quad (3)$$

$$F^p[x(t)e^{j\omega t}] = X_p(u-v\sin\alpha) \exp\left[-j\left(\frac{v^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha + uv\cos\alpha\right)\right] \quad (4)$$

$$F^p[x(t-\tau)] = X_p(u-\tau\cos\alpha) \exp[j(\tau^2\sin\alpha\cos\alpha/2 - u\tau\sin\alpha)] \quad (5)$$

2.2 阵列模型及问题描述

D 个相互独立的 LFM 信号分别以方位角和俯仰角 $\{(\theta_1, \phi_1), (\theta_2, \phi_2), \dots, (\theta_D, \phi_D)\}$ 入射到阵元数为 N 、半径为 r 的均匀圆阵上, 圆心是接收天线参考点, 如图 2 所示。则观测信号在第 i 个阵元的输出为

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^D s_k[t - \tau_{ik}] + n_i(t), \quad i=1, 2, \dots, N, \quad k=1, 2, \dots, D \quad (6)$$

$$s_k(t) = \exp[j(\omega_k t + \mu_k t^2/2)] \quad (7)$$

$$\tau_{ik} = r \sin\theta_k \cos(\phi_k - \varepsilon_i) / c \quad (8)$$

$$\varepsilon_i = 2\pi(i-1)/N \quad (9)$$

其中, $s_k(t)$ 为第 k 个 LFM 信号; ω_k 和 μ_k 分别为其初始频率和调频率; τ_{ik} 为路径时延; c 为光速; $n_i(t)$ 是均值为零方差 σ^2 的加性高斯白噪声, 且与信号源之间统计独立。

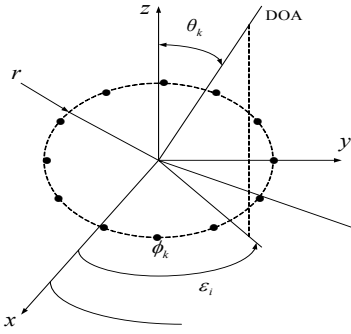


图 2 均匀圆阵模型

由式(6)和式(7)得: 在均匀圆阵上, 观测信号的方向矩阵是时变的, 而传统的算法仅适合方向矩阵是非时变的平稳信号模型。因此, 不能用它来直接处理 LFM 信号。

3 均匀圆阵 DOA 估计算法

本节主要目标是把时变方向矩阵变换为非时变的模型。FRFT 是对信号在时频面的一个旋转, LFM 信号只有在适当的 FRF 域中呈现冲击。因此, 对于式(6)中的多分量 LFM 信号观测模型, 当旋转角度满足 $\alpha_k = \pi - \arccot \mu_k$ 时, $s_k(t)$ 在 FRF 域呈现冲击, 而其他信号源仍可以看作 LFM 信号, 而白噪声的能量则均匀分布在时频面内, 不会在任何 FRF 域中能量聚集^[7]。时移不改变 LFM 信号的调频率, 则 $s_k(t)$ 在各个阵元呈现冲击所对应的旋转角度不变^[3]。因此, 对式(6)作旋转角度为 α_k 的 FRFT。

$$W_i^{\alpha_k}(u') = Y_{ik}^{\alpha_k}(u') + \sum_{l \neq k}^D Y_{il}^{\alpha_k}(u') + V_i^{\alpha_k}(u') \quad (10)$$

其中, $Y_{ik}^{\alpha_k}(u')$ 是一冲击状的尖峰; $\sum_{l \neq k}^D Y_{il}^{\alpha_k}(u') + V_i^{\alpha_k}(u')$ 可近似看作 LFM 信号和高斯白噪声。

在 FRF 域, 按尖峰位置 m_{ik} 作遮隔处理, 即让 $W_i^{\alpha_k}(u')$ 通过一个中心频率为 m_{ik} 的窄带滤波器。适当选择带宽 $2L$, 则可以滤掉 $Y_{il}^{\alpha_k}(u')$ 的绝大部分能量。这一过程相当于一个开环

的自适应时变滤波器, 其中心频率随峰值位置线性变化。

然后对滤波后的 $W_i^{\alpha_k}(u')$ 进行 FFT 变换 ($p=1$ 的 FRFT), 根据旋转可加性^[5], 以上两步等价于对式(6)作旋转角度为 $\alpha_k = 3\pi/2 - \arccot \mu_k$ 的 FRFT, 即

$$\mu_k = \tan \alpha_k \quad (11)$$

由式(3)~式(6)得关于旋转角度 α_k 的 FRFT 为

$$S_k^{\alpha_k}(u) = B \exp(-ju\omega_k \cos \alpha_k) \quad (12)$$

其中,

$$B = \sqrt{\frac{1+j\tan\alpha_k}{1+\mu_k\tan\alpha_k}} \exp[-j(\omega_k^2 \sin \alpha_k \cos \alpha_k / 2)] \quad (13)$$

由式(12)、式(13)得, $s_k(t)$ 已经变成了 FRF 域平稳的单频信号 $S_k^{\alpha_k}(u)$ 。

类似地, $s_k(t)$ 的延时信号 $s_k(t-\tau)$ 关于旋转角度为 α_k 的 FRFT, 在实际应用中忽略 τ , 即

$$F^{\alpha_k}[S_k(t-\tau)] = \exp(j\tau\omega_k \cos^2 \alpha_k) S_k^{\alpha_k}(u) \quad (14)$$

由式(12)和式(14)得, 对式(6)描述的观测信号作旋转角度为 α_k 的 FRFT。

$$X_{ik}^{\alpha_k}(u) = S_{ik}^{\alpha_k}(u) + N_{ik}^{\alpha_k}(u) \quad (15)$$

式(15)的矩阵形式为

$$\mathbf{X}^{\alpha_k}(u) = \mathbf{A}^{\alpha_k} S_k^{\alpha_k}(u) + N^{\alpha_k}(u) \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^{\alpha_k} = [a_{1k}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{Nk}]^T \quad (17)$$

$$a_{ik} = \exp(j\tau\omega_k \cos^2 \alpha_k) = \exp(j2\pi r \sin\theta_k \cos(\phi_k - \varepsilon_i) \cos^2 \alpha_k / \lambda) \quad (18)$$

由式(17)和式(18)得: 在适当的 FRF 域, 方向矩阵 \mathbf{A}^{α_k} 仅和角度信息 ϕ, θ 有关, 即观测信号被变换为非时变的平稳信号模型。因此, 可利用模式激励法来估计 LFM 信号的 DOA。定义 FRF 域空间波束形成器 \mathbf{F}_r^H 为

$$\mathbf{F}_r^H = \mathbf{Q}^H \mathbf{C} \mathbf{e} \mathbf{R}^H \quad (19)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{e} = \text{diag}\{j^{-M}, \dots, j^{-1}, j^0, j^1, \dots, j^M\} \quad (20)$$

$$\mathbf{R}^H = \sqrt{N}(\mathbf{Q}_{-M}, \dots, \mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_M)^H \quad (21)$$

选择中心希尔伯特矩阵

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{M}} [v(\beta_{-M}), \dots, v(\beta_0), \dots, v(\beta_M)] \quad (22)$$

$$v(\psi) = [e^{-jM\psi}, \dots, e^{-j\psi}, e^{j0}, e^{j\psi}, \dots, e^{jM\psi}] \quad (23)$$

$$\beta_i = 2\pi/M', \quad t \in [-M, M] \quad (24)$$

其中, 最大模式数 $M \approx kr$, $M' = 2M + 1$ 。波数 $k = 2\pi/\lambda$, λ 为 LFM 信号的初始频率对应的中心波长。 \mathbf{F}_r^H 将阵元空间中的均匀圆阵转化为模式空间的均匀线阵, 可采用基于特征值分解的搜索方法来估计 DOA。

总结上文的主要步骤如下:

(1) 对观测信号连续进行 FRFT, 在 (α, m) 平面进行二维的搜索, 得第 k 个信号的峰值旋转角度 α_k 及对应的峰值位置 m_{ik} 。

(2) 选取以 m_{ik} 为对称中心的 $2L$ 个点并计算其 FFT ($p=1$ 的 FRFT), 变换得到第 k 个平稳的单频信号 $X_{ik}^{\alpha_k}(u)$ 。

(3) 让 $X_{ik}^{\alpha_k}(u)$ 通过波束转换器 \mathbf{F}_r^H , 即

$$Y_{ik}^{\alpha_k}(u) = \mathbf{F}_r^H X_{ik}^{\alpha_k}(u) = \mathbf{F}_r^H \mathbf{A}^{\alpha_k} S_k^{\alpha_k}(u) + \mathbf{F}_r^H N^{\alpha_k}(u) \quad (25)$$

并计算其协方差矩阵 $\mathbf{R}_Y = E[Y_{ik}^{\alpha_k}(u) Y_{ik}^{\alpha_k}(u)^H]$ 。

(4) 令 $R = Re(R_y)$, 对 R 进行特征值分解得到信号子空间 S 和噪声子空间 G 。

(5) 构造 $P(\theta_k, \phi_k) = \frac{1}{a_{ik}^H(\theta_k, \phi_k) G G^T a_{ik}(\theta_k, \phi_k)}$, 其中, $a_{ik}(\theta_k, \phi_k) = F_r^H a(\theta_k, \phi_k)$, 进行二维谱峰搜索得到 θ_k 和 ϕ_k 。

(6) 对于多分量 LFM 信号, 重复以上的过程, 得到各个信号的 DOA 估计。

4 仿真结果

4.1 算法精度对比分析

$D=2$ 个远场 LFM 信号源分别以 $\{(\theta_1=30^\circ, \phi_1=60^\circ), (\theta_2=50^\circ, \phi_2=70^\circ)\}$ 入射到 $N=20$ 的均匀圆阵上。信源模型为: $\omega_1=200 \pi\text{Hz}, \mu_1=300 \pi\text{Hz/s}; \omega_2=200 \pi\text{Hz}, \mu_2=-900 \pi\text{Hz/s}$ 。抽样率 $f_s=900 \text{Hz}$, 快拍数为 1024, 遮隔处理滤波器长度 $2L=300$ 。图 3 给出了在信噪比为 0 dB 时, 信号 1 的二维 DOA 估计。

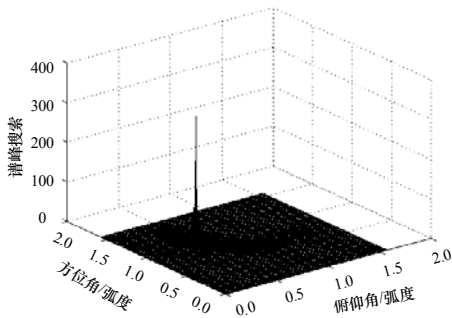


图 3 信号 1 的二维 DOA 估计

取输入信噪比变化范围为 0 dB~20 dB, 间隔 5 dB, 先以大步长进行搜索得到粗略 DOA 估计值, 然后以 0.001 rad 的步长进行高分辨率搜索。分别运行 300 次 Monte-Carlo 试验, 本文算法和文献[4]算法俯仰角的均方根误差 (root mean square error, RMSE) 对比曲线如图 4 所示。本文算法的精度相对于文献[4]算法有一定程度的改进。

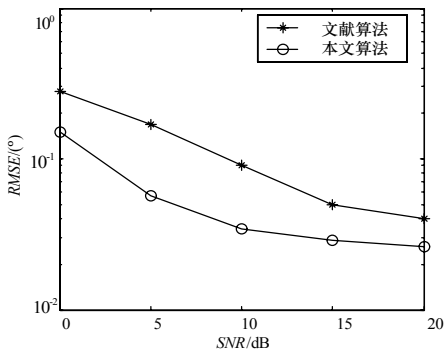


图 4 RMSE 曲线对比

4.2 复杂信道中算法性能

移动通信系统中, 将本文算法应用于多径效应多普勒频移同时存在的复杂信道环境中。相同的仿真条件, 随即产生两组多径信号源模型为

$$s_k(t) = \sum_{e=1}^E M_e \exp(jf_e t) \exp[j(\omega_k(t - \delta_e) + \mu_k(t - \delta_e)^2 / 2)]$$

其中, $M_1=1, M_2=0.9$; 多普勒频移 $f_1=0, f_2=2$; 多径时延 $\delta_1=0, \delta_2=1/900$ 。信噪比为 0 dB 时信号 1 最强径时的仿真结果如图 5 所示。

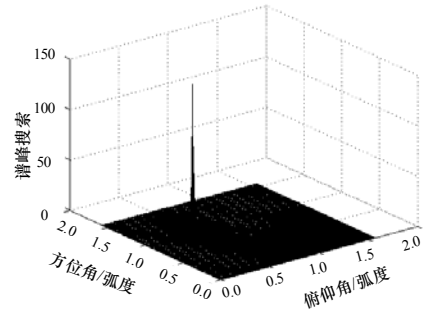


图 5 复杂信道中的二维 DOA 估计

取输入信噪比变化范围为 -21 dB~0 dB, 间隔 3 dB。在每个信噪比下分别进行 300 次 Monte-Carlo 试验, 信号 1 的 RMSE 曲线如图 6 所示。可见, 算法在复杂信道环境中是有效的。

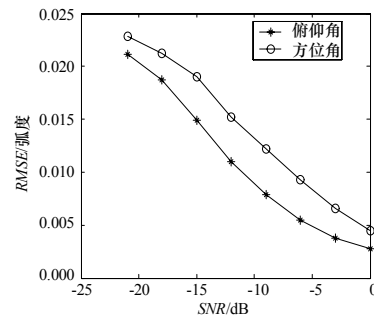


图 6 复杂信道中估计的 RMSE 曲线

5 结束语

本文分析了 FRFT 的定义和性质, 并将其应用于多分量 LFM 信号均匀圆阵的 DOA 估计。遮隔和解线调处理在不降低精度的前提下, 简化了计算过程。FRF 域波束形成技术在保证均匀圆阵性能的同时, 扩展了其适用范围。同时, 该算法也可以用来处理存在多径和多普勒频移情况下的 LFM 信号方向估计。就优效性而言, 算法的二维 Cramer-Rao 界是进一步研究的方向。

参考文献

- [1] Mathews C P. Eigenstructure Techniques for 2-D Angle Estimation with Uniform Circular Arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(9): 2395-2407.
- [2] Gershman A B, Amin M G. Wideband Direction of Multiple Chirp Signals Using Spatial Time-frequency Distributions[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(6): 152-155.
- [3] 陶然, 周云松. 基于分数阶傅里叶变换的宽带 LFM 信号波达方向估计新算法[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(10): 895-899.
- [4] Yang Liming. DOA Estimation for Wideband Sources Based on UCA[J]. Journal of Electronics(China), 2006, 23(1): 128-131.
- [5] Almeida L B. The Fractional Fourier Transform and Time Frequency Representations[J]. IEEE Trans. on SP, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [6] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [7] 齐林, 陶然, 周思永. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. 中国科学(E 辑), 2003, 33(8): 747-759.