有限长标准正交小波基滤波器的构造

洪明坚,张小洪
HONG Ming-jian,ZHANG Xiao-hong

重庆大学 软件学院,重庆 400030
School of Software Engineering,Chongqing University,Chongqing 400030,China
E-mail:hmj@cqu.edu.cn

HONG Ming-jian,ZHANG Xiao-hong.Construction of finite-length filter for orthonormal wavelet basis.Computer Engineering and Applications,2009,45(15):44-46.

Abstract: This paper gives several non-linear difference equations based on the orthogonality,regularity and standardity of the orthogonal wavelet with compact support.Then the paper designs a least square objective function from these equations and optimize it by the Gauss-Newton algorithm.However,because of local convergence of Gauss-Newton algorithm,the paper combines the Gauss-Newton algorithm with the stochastic algorithm to get a more feasible algorithm.This algorithm can not only approximate the solutions well given by Daubechies,but also give wavelets which have better symmetricality and locality.Finally,the algorithm proposed can also be used to construct the biorthogonal wavelet or multiwavelet.

Key words: orthonormal wavelet basis;optimization;stochastic algorithm

摘 要:从紧支撑正交小波滤波器的正交性、规范性及正则性条件出发,获得了求解滤波器系数的非线性差分方程组,并采用最优化方法求解。由于该优化问题的目标函数是具有零残数的最小二乘,可以用 Gauss-Newton 法求解。为了克服 Gauss-Newton 法的局部收敛性,结合随机算法和 Gauss-Newton 法形成了一种更为可行的算法。它不仅计算出了 Daubechies 小波的滤波器系数,还可以得到其他对称性与局部性更好的小波。另外,该算法还可以用于双正交或多小波滤波器的构造,具有很好的可移植性。

关键词:正交小波基;最优化;随机算法
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.15.013 **文章编号:**1002-8331(2009)15-0044-03 **文献标识码:**A **中图分类号:**TN941.1

1 引言

小波分析已经成为应用数学及数字信号处理领域重要的分析工具。在理论研究和实际应用的过程中,小波基的构造和选取对于分析的结果有很大的影响[1]。到目前为止,研究人员已经利用分析的方法构造出了各种各样的小波基[1-4]。但是,用分析的方法只能得到部分小波基,且推导计算过程繁琐。

从紧支撑正交小波滤波器的正交性、规范性及正则性条件出发,获得了求解滤波器系数的非线性差分方程组,并将该方程组转化为最优化问题。针对最优化问题的目标函数是具有零残数的最小二乘,采用 Gauss-Newton 算法进行求解。为了克服 Gauss-Newton 算法的局部收敛性,随机算法被用于进行初始点的选择,取得了较好的效果。

2 理论基础

设为 $\phi(t)$某正交 MRA 的尺度函数,则成立如下双尺度方程:

$$\phi(t)=\sum_n h_n\phi(2t-n) \tag{1}$$

其中$\{h_n\}\in l^2$。若能从式(1)中解出 $\phi(t)$,只需令:

$$\psi(t)=\sum_n(-1)^n\bar{h}_{1-n}\phi(2t-n) \tag{2}$$

即可证明为 $\psi(t)$所要的小波母函数。文献[2]已经证明当式(1)右端只有有限项时,$\phi(t)$的支集一定是紧的,从而小波母函数 $\psi(t)$的支集也必紧。通过简单的变量替换可把双尺度方程化为:

$$\phi(t)=\sum_{n=0}^{N-1}h_n\phi(2t-n),h_i=0(i<0 \text{ 或 } i\geqslant N) \tag{3}$$

文中只考虑 h_n 为实数且 N 为偶数的情形。

为了能从方程(3)解出 $\phi(t)$,首先必须给出$\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$的值。下面给出一组关于$\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$的等式,它们是使式(3)的解能成为正交 MRA 尺度函数的必要条件。

对式(3)式两端取 Fourier 变换可得:

$$\hat{\phi}(\omega)=H(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{4}$$

其中 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}h_ne^{-in\omega}$。

关于 $H(\omega)$有如下定理[8]:若由方程(3)解出的 $\phi(t)$是正交 MRA 的尺度函数,则:

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2=1 \tag{5}$$

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60604007)。
作者简介:洪明坚(1977-),男,博士研究生,讲师,主研领域为图像处理和机器学习;张小洪(1973-),男,博士,副教授,主研领域为图像处理和模式识别。
收稿日期:2008-08-22 **修回日期:**2008-11-03

首先，式（5）等价于：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_n h_{n-2l}=2\delta_{0l} \tag{6}$$

又由式（4）可得：

$$\hat{\phi}(\omega)=\hat{\phi}(\omega/2^k)\prod_{i=1}^{k} H(\omega/2^j)$$

令 $k\rightarrow+\infty$ 得：

$$\hat{\phi}(\omega)=\hat{\phi}(0)\prod_{j=1}^{+\infty} H(\omega/2^j)$$

所以 $\hat{\phi}(0)\neq 0$。

在式（4）中令 $\omega=0$，得 $\hat{\phi}(0)=H(0)\hat{\phi}(0)$，所以 $H(0)=1$，即：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_n=2 \tag{7}$$

又对式（2）进行 Fourier 变换：

$$\hat{\psi}(\omega)=-e^{-i\omega/2}\overline{H}(\omega/2+\pi)\hat{\phi}(\omega/2)$$

令 $\omega=0$ 有 $\hat{\psi}(0)=-\overline{H}(\pi)\hat{\phi}(0)=0$，故 $H(\pi)=0$，即：

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n h_n=0 \tag{8}$$

上述的式（6）~（8）是双尺度方程的解能成为正交 MRA 尺度函数时，滤波器系数 $\{h_n\}_{n=0}^{N-1}$ 应满足的必要条件。

另外由文献[2]知道，如果要求 $\phi(t)$ 与 $\psi(t)$ 具有一定的正则性，滤波器 $H(\omega)$ 应具有如下形式：

$$H(\omega)=[1/2(1+e^{-i\omega})]^L Q(e^{-i\omega})$$

其中 $Q(z)$ 是 $(N-L)$ 次多项式。

由此：

$$\left.\frac{d^jH(\omega)}{d\omega^j}\right|_{\omega=\pi}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} h_n(-in)^j(-1)^n=0, j=1,2,\cdots,(L-1)$$

亦即：

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n n^j h_n=0, j=1,2,\cdots,(L-1) \tag{9}$$

联立式（6）~（9）各方程得：

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N-1} h_n h_{n-2k}=2\delta_{0k}, k=0,1,2,\cdots,(N/2-1)\\ \sum\limits_{n=0}^{N-1}(-1)^n n^j h_n=0, j=1,2,\cdots,(L-1)\\ \sum\limits_{n=0}^{N-1} h_n=2\end{cases} \tag{10}$$

上述方程组共有 N 个变量，$(N/2+L+1)$ 个方程。但是，因 $\sum\limits_n h_{2n}=\sum\limits_n h_{2n-1}=1$，故：

$$(\sum_n h_{2n})^2+(\sum_n h_{2n-1})^2=\sum_{n=0}^{N-1} h_n^2+2\sum_{n=0}^{N-1} h_n h_{n-2}=2$$

所以，若 $\sum\limits_{n=0}^{N-1} h_n^2=2$，则 $\sum\limits_{n=0}^{N-1} h_n h_{n-2}=0$。因此上述方程组只有 $(N/2+L)$ 个独立方程，故取 $L=N/2$ 即可。

为了表达形式更为简洁，引进下列符号：

$$\boldsymbol{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{N-1})^{\mathrm{T}}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}_{N-2k}\in R^{N\times N}(k=0,1,\cdots,N/2-1)$，它们的第 i 行 j 列元素为：

$$(\boldsymbol{M}_{N-2k})_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i-j=2k\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{(N/2+1)\times N}$，它的第 i 行 j 列元素为：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } i=1 \text{ 或 } (i,j)=(2,1)\\ (-1)^{j-1}(j-1)^{i-2}, & \text{否则}\end{cases}$$

再设 $\boldsymbol{b}\in R^{(N/2+1)\times N}$，其中 $b_1=2, b_i=0(i>1)$。

利用这些记号可将方程（10）表示成如下形式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{N-2k}\boldsymbol{h}=2\delta_{0k}, k=0,1,\cdots,N/2-1\\ \boldsymbol{Ah}=\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{11}$$

3 模型建立

因为式（11）是非线性差分方程组，理论上精确求解较为困难，所以考虑将它转化为最优化问题，并用数值方法求解。将式（11）中第一个方程作为优化目标，第二个方程为约束，即：

$$\min_{h\in R^N} Z(\boldsymbol{h})=\sum_{k=0}^{N/2-1}(\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{N-2k}\boldsymbol{h}-2\delta_{0k})^2$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{Ah}=\boldsymbol{b}$$

这是带等式线性约束的非线最小二乘问题，下面将它转化为无约束非线性最小二乘。

设 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，则可令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_b,\boldsymbol{A}_n)$，其中 $\boldsymbol{A}_b$ 为非奇异方阵。又设 $\boldsymbol{h}=(\boldsymbol{h}_b^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{Ah}=\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{A}_b\boldsymbol{h}_b+\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{h}_b=(\boldsymbol{A}_b^{-1})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x})$，所以 $\boldsymbol{h}=[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_b^{-1})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。

将 $\boldsymbol{M}_{N-2k}$ 分块：

$$\boldsymbol{M}_{N-2k}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_k & \boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{S}_k & \boldsymbol{Q}_k\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{P}_k\in R^{(N/2+1)\times(N/2+1)}$。令 $\boldsymbol{T}_k=(\boldsymbol{A}_b^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{A}_b^{-1}$，则：

$$r_k(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{N-2k}\boldsymbol{h}-2\delta_{0k}=C_k+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_k+\boldsymbol{E}_k)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_k\boldsymbol{x}$$

其中：

$$C_k=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{b}-2\delta_{0k}$$

$$\boldsymbol{D}_k^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_b^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{A}_n$$

$$\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{A}_b^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{A}_b^{-1}\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{A}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_b^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{Q}_k$$

用 $r_k(\boldsymbol{x})$ 可将模型化为：

$$\min_{x\in R^{N/2-1}} f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N/2-1} r_i^2(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

求出 $\boldsymbol{x}$ 后，代入 $\boldsymbol{h}=[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_b^{-1})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 即得 $\boldsymbol{h}$。

从文献[2]中的结果知道，方程组（11）至少有一个解，亦即最优化问题式（12）至少有一个全局最优解，其对应的最优值为零。因此，可以通过求解优化问题的全局最优解来构造正交小波基。

4 算法

下面求解最优化问题式（12）。对求 $r_i(\boldsymbol{x})$ 梯度及 Hesse 矩阵得：

$$\nabla r_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{D}_i+\boldsymbol{E}_i+(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},\ \nabla^2 r_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}$$

令 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})=(\nabla r_0(\boldsymbol{x}),\nabla r_1(\boldsymbol{x}),\nabla r_{N/2-1}(\boldsymbol{x}))$，$r(\boldsymbol{x})=(r_0(\boldsymbol{x}),r_1(\boldsymbol{x}),\cdots,r_{N/2-1}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$ 则：

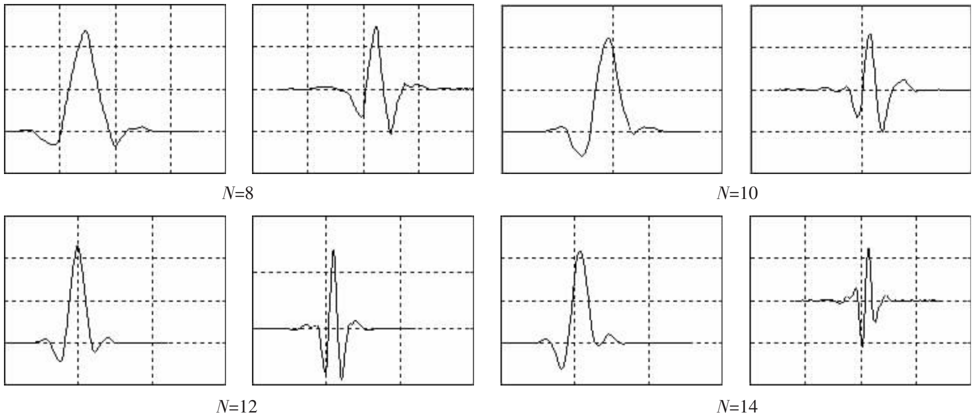

图 1　N=8,10,12,14 的尺度函数和小波函数

表 1　N=8,10,12,14 的滤波器系数

n	h_n			
	N=8	N=10	N=12	N=14
0	−0.107 148 901 522 68	0.027 632 152 934 93	0.021 784 700 325 60	0.014 521 398 990 22
1	−0.041 910 965 490 65	−0.029 842 499 924 30	0.004 936 612 328 60	0.005 671 359 505 07
2	0.703 739 068 285 70	−0.247 951 362 557 66	−0.166 863 215 658 85	−0.152 463 865 650 15
3	1.136 658 243 496 72	0.023 478 923 414 28	−0.068 323 122 148 92	−0.198 056 772 287 91
4	0.421 234 534 610 94	0.896 581 648 600 63	0.694 457 972 433 53	0.408 183 823 374 59
5	−0.140 317 623 907 23	1.023 052 966 775 27	1.113 892 783 989 73	1.085 782 678 518 09
6	−0.017 824 701 373 95	0.281 990 696 601 78	0.477 904 371 882 75	0.758 162 692 032 85
7	0.045 570 345 901 15	−0.055 344 186 226 28	−0.102 724 969 407 81	0.024 665 743 063 29
8		0.041 746 864 420 31	−0.029 783 751 122 48	−0.070 078 280 278 19
9		0.038 654 795 961 05	0.063 250 562 735 00	0.096 014 761 021 84
10			0.002 499 922 139 52	0.043 155 458 523 62
11			−0.011 031 867 496 62	−0.017 870 427 655 88
12				−0.001 481 226 990 21
13				0.003 792 657 835 08

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}+\sum_{i=0}^{N/2-1}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}})r_i(\boldsymbol{x})$$

从 $f(\boldsymbol{x})$的 Hesse 矩阵可看出,式(12)是典型的“零残数”(zero residual)问题。也就是说,当 $\boldsymbol{x}$ 取最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 时,各 $r_i(\boldsymbol{x}^*)$均等于零。因此在最优解附近,Hesse 矩阵是正定的,亦即在最优解附近的一个邻域内,目标函数是凸的。目标函数的这一特点对于求解该优化问题有很大帮助。

对“零残数”的最小二乘问题,最有效的算法是 Gauss-Newton 法,但是它只能保证局部收敛性。为了克服这一缺点,近年来人们发展了一些随机算法[9-10],如 GA(Genetic Algorithm,遗传算法)、SA(Simulated Annealing,模拟退火算法)以及将 SA 和 GA 相结合的 AE 算法(Annealing Evolution,退火演化算法)等。这类随机算法的主要优点是能跳出局部极小,收敛到全局极小,而且对初始点的选取不严格,但是算法的效率较低。为此我们采取随机算法与 Gauss-Newton 法相结合的策略:先用随机算法优化目标函数,当目标函数值下降到一定程度后,再改用 Gauss-Newton 法,以期能较快地收敛到全局极小。这样做既可以解决 Gauss-Newton 法初值选择问题,又回避了随机算法收敛慢的缺点。

5　结果与分析

采取 Gauss-Newton 法辅以 AE 法的策略,计算了 N=4,6,8,10,12,14 时的滤波器系数。计算结果表明该方法不仅能计算出 Daubechies 小波基,而且当 N 大于 6 时还可得到局部性和对称性较好的小波基(图 1)。它们所对应的滤波器系数见表 1,目标函数取值均小于 10^{-20} 数量级。另外,根据文献[2],用上述方法构造的滤波器系数应该满足如下条件:

$$\sup_{|x|\leqslant 1}|Q(\boldsymbol{x})|<2^{N/2-1}$$

经验证,计算结果都满足该条件。因此,这些解对应的双尺度方程均迭代可解,从而从理论上保证了其对应的尺度函数及小波函数的存在。

6　结论

给出了构造紧支撑正交小波基滤波器系数的一种最优化算法。它不仅可以求出 Daubechies 小波基的滤波器系数,而且还得到了局部性和对称性更好的小波基,它们都具有良好的整体最优性。另外,所给的算法也可以用于双正交小波(Biorthogonal wavelet),甚至更一般的多小波(multiwavelets)的滤波器系数的构造,具有很好的可移植性。

参考文献:

[1] Stéphane Mallat.A wavelet tour of signal processing[M].2nd ed.NY:Academic Press,1998.

[2] Daubechies I.Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J].Communication on Pure and Applied Mathematics,1988,41:909-996.

[3] Vaidyanathan P P.Multirate systems and filter banks[M].NJ:Prentice-Hall,1993.

(下转 66 页)