第28卷 第7期 高能物理与核物理 Vol. 28, No. 7
2004年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jul., 2004

含 Maxwell-Chern-Simons 项 CP^1 非线性 σ 模型的分数自旋和分数统计性质*

王永龙[1)] 李子平[2)]
(北京工业大学应用数理学院 北京 100022)

摘要 在(2+1)维时空中研究了含 Maxwell-Chern-Simons(MCS)项的 CP^1 非线性 σ 模型的量子对称性质. 取库仑规范,用 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化方案对该系统进行量子化. 根据约束 Hamilton 系统的量子对称性质,在量子水平上得到了系统分数自旋性质.

关键词 约束 Hamilton 系统 分数自旋 CP^1 非线性 σ 模型

长期以来,(2+1)维非线性 σ 模型在凝聚态物理方面得到广泛地(尤其在量子霍尔效应[1]和高温超导[2,3]中)应用. 自文献[4—6]中提出在(2+1)维情况下有可能存在分数自旋和分数统计性质以来,该模型得到极大地关注. 首先是对(2+1)维非线性 σ 模型引入 Hopf 项使影射性质由 S^3 破缺为 S^2,证明了分数自旋和分数统计的存在[7—10]. 也可以从包含 Chern-Simons(CS)项的(2+1)维非线性 σ 模型的规范理论得到分数自旋和分数统计特性[11,12]. 近来,对含有 Hopf 项和 CS 项的 $O(3)$ 非线性 σ 模型在经典和量子水平上都给出了具有分数自旋和分数统计性质[13,14],并对含有 Maxwell 项的拓扑 $U(1)$ 规范场非线性 σ 模型也给出具有分数自旋和分数统计的结果[15]. 文献[7—13,15]都是从能量-动量张量对称性质给出分数自旋和分数统计特性,在量子水平上仍有待做出进一步讨论. 文献[14]中虽然给出了量子水平上的讨论,但是没有给出分数自旋性质的具体形式. 而 CP^1 非线性 σ 模型与 $O(3)$ 非线性 σ 模型在远程极限有密切的联系,近来该模型与高温超导的关系引起极大的关注[16]. 鉴于含有 CS 项标量[17]和旋量[18]电动力学系统中都存在分数自旋和分数统计的性质. 这里,将对含有 MCS 项(2+1)维 CP^1 非线性 σ 模型采用 FS 路径积分量子化方法对该系统进行量子化,讨论其量子对称性,并分析在含有 MCS 项情况下是否仍具有分数自旋和分数统计性质.

含有 MCS 项 CP^1 非线性 σ 模型的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{f}(D_\mu Z_k)^*(D^\mu Z_k) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda. \tag{1}$$

以下耦合常数 f 取为 1, $k=1,2$, Z_k 是满足约束条件:

$$Z_k Z_k^* = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1, \tag{2}$$

协变微商 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. 这里 A_μ 是 CS 规范场. 对应场量 Z_k, Z_k^* 和 A_μ 的正则动量分别为

$$\pi_k = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{Z}_k} = (D_0 Z_k)^*, \quad \bar{\pi}^k = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{Z}_k^*} = (D_0 Z_k),$$

$$\pi^i = -F^{0i} + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}A_j, \quad \pi^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_0} = 0. \tag{3}$$

2003-12-10 收稿
* 北京市自然科学基金(1942005)和北京工业大学校青年基金(JQ0607200370)资助
1) E-mail: wylong@emails.bjpu.edu.cn
2) E-mail: zpli@solaris.bjpu.edu.cn

可见初级约束为

$$\Lambda^0 = \pi^0 \approx 0, \tag{4}$$

$$\theta = Z_k Z_k^* - 1 \approx 0, \tag{5}$$

其中符号"≈"表示 Dirac 意义下的弱等. 正则 Hamilton 量为

$$\mathscr{H}_c = \pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi^k \dot{Z}_k + \bar{\pi}^k \dot{Z}_k^* - \mathscr{L} = \mathscr{H}_0 + A_0[J^0 - (\partial_i \pi^i + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j)]. \tag{6}$$

其中

$$\mathscr{H}_0 = 2\pi^k \bar{\pi}^k - \frac{1}{2}\pi^i\pi^i - (D_\mu Z_k)^*(D^\mu Z_k) + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{\theta^2}{32\pi^4}A^iA_i + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon_{ij}\pi^iA^j, \tag{7}$$

$$J_0 = \mathrm{i}[Z_k(D_\mu Z_k)^* - Z_k^*(D_\mu Z_k)]. \tag{8}$$

总 Hamilton 量为

$$H_T = \int d^2x(\mathscr{H}_c + \lambda_0\Lambda^0 + \mu_0\theta^0), \tag{9}$$

其中 λ_0 和 μ_0 为约束乘子. 由初级约束自洽性条件 $\{\Lambda^0, H_T\} \approx 0$ 和 $\{\theta^0, H_T\} \approx 0$ 分别给出次级约束为

$$\Lambda^1 = 2J_0 - (\partial_i\pi^i + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j) \approx 0, \tag{10}$$

$$\theta^1 = \pi^k Z_k + \bar{\pi}^k Z_k^* \approx 0. \tag{11}$$

次级约束自洽性不再产生新的约束. 不难验证 (Λ^0, Λ^1) 是第一类约束, (θ^0, θ^1) 是第二类约束. 采用 FS 路径积分量子化方法, 对每一个第一类约束需选取一个规范条, 考虑库仑规范：

$$\Omega_0 = \partial_i A_i \approx 0. \tag{12}$$

由 Ω_0 的自治性 $\partial_i \dot{A}_i \approx \{\Omega_0, H_T\} \approx 0$, 可以给出另外一个规范条件：

$$\Omega_1 = \nabla^2 A_0 + \partial_i \pi^i - \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\partial_i A_i \approx 0. \tag{13}$$

对动量也引入外源, 相空间的 Green 函数生成泛函为[19]

$$Z[\bar{J}^k, J^k, J^\mu, \bar{K}_k, K_k, K_\mu] = \int DZ_k DZ_k^* DA_\mu D\pi^k D\bar{\pi}^k D\pi^\mu \delta(\Lambda)\delta(\Omega)\delta(\theta) \times \det|\{\Lambda^l, \Omega_m\}| \cdot [\det|\{\theta_i, \theta_j\}|]^{\frac{1}{2}} \times \exp\{\mathrm{i}\int d^3x(\mathscr{L}^P + \bar{J}^k Z_k + J^k Z_k + J^\mu A_\mu + \bar{K}_k\pi^k + K_\mu\bar{\pi}^k + K_\mu\pi^\mu)\}. \tag{14}$$

其中因子 $\det|\{\Lambda^k, \Omega_l\}|$ 不依赖于场变量, 将其从生成泛函中省略. 通过对 $\det|\{\theta_i, \theta_j\}|$ 计算, 根据 Grassman 变量的积分和 δ 函数性质(14)式可以写为

$$Z[J, K] = \int D\phi D\pi \exp\{i\int d^3x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} + J\phi + K\pi)\}. \tag{15}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^P = \mathscr{L}^P + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{gh}, \tag{16}$$

$$\mathscr{L}^P = \pi_k\dot{Z}_k + \bar{\pi}_k\dot{Z}_k^* + \pi^\mu\dot{A}_\mu - \mathscr{H}_c, \tag{17}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_l\Lambda_l + \lambda_n\Omega_n + \mu_i\theta_i, \tag{18}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = 4\bar{C}(x)(Z_k(x)^* Z_k^*(x))^2 C(x), \tag{19}$$

$\mathscr{L}_{gh}$ 表示鬼场 Lagrange 量密度, 且记 $J = (\bar{J}^k, J^k, J^\mu)$, $K = (\bar{K}_k, K_k, K_\mu)$, $\phi = (Z_k, Z_k^*, A_\mu)$, $\pi = (\pi^k, \bar{\pi}^k, \pi^\mu)$.

$(\bar{J}^k, J^k, J^\mu, \bar{K}_k, K_k, K_\mu)$ 分别是对应场量 $(Z_k, Z_k^*, A_\mu\, \pi^k, \bar{\pi}^k, \pi^\mu)$ 引入的外源.

如果在下面整体变换：

$$\begin{cases} x^{\mu'} = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi) \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma\xi^\sigma(x, \varphi, \pi) \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma\eta^\sigma(x, \varphi, \pi) \end{cases} \tag{20}$$

下, 有效作用量 $I_{\mathrm{eff}}^P = \int d^2x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^P$ 不变. 其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, r)$ 是无穷小参数. 且变换的 Jacobi 行列式为 1, 那么由正则量子 Noether 定理, 有量子守恒荷[14,20,21]：

$$Q^\sigma = \int d^3x[\pi(\xi^\sigma - \varphi_k\tau^{k\sigma}) - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}] = \mathrm{const}. \tag{21}$$

其中 $\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$ 是与 $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^P$ 联系的有效 Hamilton 量密度. 在 (x, y) 平面内旋转变换下 $(\tau^{0\sigma} = 0)$, 注意到 A_μ 为矢量场; 且 $\mathscr{L}_{gh}$ 中不含场的微商, 对正则动量无贡献. 由(21)式可得该系统的量子守恒量为

$$L = \int d^2x\varepsilon^{ij}(x_i\pi^k\partial_j Z_k + x_i\bar{\pi}^k\partial_j Z_k^* + \pi_\mu S_{ij}^{\mu\nu}A_\nu + x_i\pi^\mu\partial_j A_\mu). \tag{22}$$

其中 $S_{ij}^{\mu\nu} = \delta_i^\mu\delta_j^\nu - \delta_j^\mu\delta_i^\nu$. 将(3)式代入(22)式得

$$L = \int d^2x\varepsilon^{ij}(x_i\pi_k\partial_j Z_k + x_i\bar{\pi}_k\partial_j Z_k^* - x_iF_{0i}\partial_jA^i) - \int d^2xF_{0i'}S_{ij}^{i'j'}A_{j'} + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\int d^2xx_iA_j\varepsilon^{kl}\partial_kA_l. \tag{23}$$

在约束超曲面上由 $\Omega_1 \approx 0$ 有

$$\partial_i\pi^i = -\nabla^2 A_0 + \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j. \tag{24}$$

将(24)式代入(10)式得

$$J_0 + \nabla^2 A_0 = \frac{\theta}{2\pi^2}\varepsilon^{ij}\partial_iA_j. \tag{25}$$

由 Gauss 积分定理(23)式右边第三项表示为

$$\frac{\theta}{2\pi^2}\int d^2x\varepsilon^{ij}x_iA_j\varepsilon^{kl}\partial_kA_l = \frac{\pi}{2\theta}Q^2. \tag{26}$$

其中 $Q = \int d^2xJ_0$, 方程(23)右边第一项是轨道角

动量,右边第二项是通常的自旋角动量,右边第三项是附加项给出系统的分数自旋性质. 结果说明在含有 MCS 项的 CP^1 非线性 σ 模型仍然具有和不含有 Maxwell 项相同的分数自旋和分数统计性质[11]. 值得指出的是,这里没有发现文献[22]和[23]分数自旋特性的差异.

参考文献(References)

1 Haiperin B. Phys. Rev. Lett., 1984, **52**:1583

2 Laughlin R B. Science, 1988, **242**:525

3 Laughlin R B. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**:2677

4 Laidlaw M G G, De Witt C M Phys. Rev., 1971, **D3**:1375

5 Dowker J S. J. Phys., 1972, **A5**:936

6 WU. Y S Phys. Rev. Lett., 1984, **52** :2103

7 Wilczek F, Zee. A Phys. Rev. Lett., 1983, **51**:2250

8 Bowick M, Karabali D, Wijewardhana L C R. Nucl. Phys., 1986, **B271**:417

9 Mackenzie R. Phys. Lett., 1988, **B214**:471

10 Tsurumaru, T Tsutsui I. Phys. Lett., 1999, **B**:94

11 Panigrahi P K, Roy S, Scherer W Phys. Rev. Lett., 1988, **61**: 2827

12 Mukherjee P. Phys. Lett., 1997, **B**:70

13 Banerjee R. Nucl. Phys., 1994, **B419**[**FS**]:611

14 LI Z P. Since in China, 1996, **A39**:738

15 Karabali D Phys. Rev., 1987, **D35**:1522

16 Polyakov A M. Mod. Phys. Lett., 1988, **A 3**:325

17 JIANG J H, LI Z P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(8):784(in Chinese)
(江金环,李子平. 高能物理与核物理,1999,**23**(8):784)

18 LI R J, LI Z P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2002, **26**(4):325(in Chinese)
(李瑞洁,李子平. 高能物理与核物理, 2002,**26**(4):325)

19 LI Z P, JIANG J H. Symmetries in Constrained Canonical Systems. Beijing:Science Press, 2002

20 LI Z P. Inter. J. Theor. Phys., 1996, **35**:1353

21 LI Z P. Acta. Phys. Sin., 1996, **45**:1601 (in Chinese)
(李子平. 物理学报,1996,**45**:1601)

22 JIANG J H, LIU Y, LI Z P. Chinese Phys., 2004, **2**:153—158

23 Kim J K, Kim W T, Shin H J. Phys. A:Math. Gen., 1994, **27**:6

Symmetries in the Non-linear Sigma Model with Maxwell-Chern-Simons Term*

WANG Yong-Long[1] LI Zi-Ping[2]

(College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract The quantal symmetry property in the CP^1 non-linear sigma model with Maxwell-Chern-Simons (MCS) term in $(2+1)$ dimensions is studied. In the Coulomb gauge, the system is quantized in the Faddeev-Senjanovic (FS) path-integral formalism. Based on the quantal symmetries of a constrained Hamiltonian system, the fractional spin at the quantum level of this system is presented.

Key words constraint Hamiltonian system, fractional spin, CP^1 non-linear σ model

Received 10 December 2003

* Supported by Beijing Municipal Natural Science Foundation (1942005) and the Youth Foundation of Beijing University of Technology (JQ 0607200370)

1) E-mail: wylong@emails. bipu. edu. cn

2) E-mail: zpli@solaris. bjpu. edu. cn