

# 一种基于灵敏度分析的最短路可靠性评估模型

杨晓凌<sup>1</sup>, 谢政<sup>1</sup>, 陈挚<sup>1</sup>, 徐桢<sup>2</sup>

YANG Xiao-ling<sup>1</sup>, XIE Zheng<sup>1</sup>, CHEN Zhi<sup>1</sup>, XU Zhen<sup>2</sup>

1.国防科技大学 理学院, 长沙 410073

2.北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100083

1.School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China

2.School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China

E-mail: missthan111@yahoo.com.cn

**YANG Xiao-ling, XIE Zheng, CHEN Zhi, et al. Reliability evaluating model of shortest path in network based on sensitivity analysis. Computer Engineering and Applications, 2008, 44(18): 106-108.**

**Abstract:** This paper extends the concept of Sensitivity Analysis of the Shortest Path (SASP), then gives the basic formula for SASP. Associated with the actual situation of links in communication network, it is supposed that the length of every arc in a directed graph is stochastic variable and has independent probability distribution function. Finally, a new type of reliability evaluating model of the shortest path in the light of the basic formula for SASP is presented.

**Key words:** shortest path; SASP; probability distribution; reliability

**摘要:** 首先对最短路灵敏度分析的概念进行了拓展, 然后给出了最短路灵敏度分析的基本公式。与通信网络链路实际相联系, 假设图中各弧的权值是随机变量, 具有独立的概率分布函数。最后基于最短路灵敏度分析基本公式, 给出了一种新型的最短路可靠性评估模型。

**关键词:** 最短路; 灵敏度分析基本公式; 概率分布; 可靠性

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.18.033 **文章编号:** 1002-8331(2008)18-0106-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** O157.6

## 1 引言

目前, 通信网络已经逐步从单一的数据传送网向数据、语音、图像等多媒体信息的综合传输网演化。不同的信息类型要求有不同的服务质量(QoS)保证, 如语音信息对传输时延及时延抖动有严格的要求, 而丢包率则是影响图像质量的主要原因。服务质量保证是通信网络面临的一大难题, 也是下一代高速网络的一个具有挑战性的问题, 服务质量路由(QoS Routing, QoS SR)则是其中的一项核心技术。

QoS 度量参数一般包括: 带宽、时延、时延抖动、丢包率、可靠性和跳数等。根据运算规则, 这些度量参数可分为加性度量参数, 如时延、跳数、代价等; 乘性度量参数, 如丢包率、可靠性; 凹性度量参数, 如带宽。其中乘性度量参数可通过对数变化转换为加性度量参数<sup>[1]</sup>。

QoSR 问题的研究目标是为 QoS 业务寻找满足 QoS 约束的最优路径, 针对加性 QoS 度量约束, 可以寻找使加性度量参数达到最小值的信息传输路径。将链路的加性 QoS 参数值作为它的权值, 可认为最优路径为最短路。QoSR 问题研究的另一个内容是: 最优路径的可靠性问题, 即在网络运行过程中最优

路径在多大程度上能够维持其结构的稳定性, 以及如何确定影响信息传输路径最优性的关键链路。

本文从最短路灵敏度分析理论出发, 给出了最短路(对应了通信网络信息传输最优路径)的可靠性评估模型, 并通过实例说明了最短路可靠性的计算方法。

## 2 最短路灵敏度分析

将通信网络抽象成一个连通的有向图  $D(V, A)$ , 其中通信网络节点集对应了顶点集  $V$ , 链路集对应弧集  $A$ 。弧  $a$  的非负权  $c(a)$  表示链路  $a$  的某个加性 QoS 度量参数值, 对不同的 QoS 度量参数,  $c(a)$  的取值范围不同。若  $S \subset A$ , 则  $c(S) = \sum_{a \in S} c(a)$ 。

中的有向途径是指一个非空序列  $W = v_0 a_1 v_1 \cdots v_{n-1} a_n v_n$ , 其中的项交替地为  $D$  的顶点和弧, 且  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ )。  $v_0$  称为  $W$  的起点,  $v_n$  称为  $W$  的终点。  $W$  称为有向  $(v_0, v_n)$  途径。有向途径  $W = v_0 a_1 v_1 \cdots v_{n-1} a_n v_n$  常常简单地用顶点序列  $W = v_0 v_1 \cdots v_{n-1} v_n$  表示。若有向途径  $W$  中包含的顶点互不相同, 则称  $W$  为路, 其中权值最小者称之为最短路,  $d(v_0, v_n)$  表示顶点  $v_0$  到  $v_n$  的最短路的权

**基金项目:** 国家安全重大基础研究项目(973)(National Security Major Basic Research 973 Projects No.613610202)。

**作者简介:** 杨晓凌(1982-), 男, 硕士生, 主要研究方向: 组合最优化理论及其应用; 谢政(1960-), 男, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向: 组合最优化理论及其应用; 陈挚(1965-), 男, 副教授, 主要研究方向: 组合最优化理论及其应用; 徐桢(1975-), 女, 讲师, 硕士生导师, 主要研究方向: 天空地一体化网络、移动通信网、无线传感器网及移动 Ad Hoc 网络。

**收稿日期:** 2007-09-18 **修回日期:** 2007-12-12

值,  $v_0$  到  $v_n$  的最短路又称最短  $(v_0, v_n)$  路。于是可用最短  $(v_0, v_n)$  路表示在通信网络中从信息发点  $v_0$  到收点  $v_n$  的最优路径。

假设  $P^*$  是  $D$  中唯一的最短  $(v_0, v_n)$  路,  $V(P^*)$  是其顶点集,  $A(P^*)$  是其弧集。目前的最短路灵敏度分析, 研究的是在保持  $P^*$  权值最小的条件下, 在其它弧权值不变时, 如何确定某条弧权值变化的最大范围。显然, 为保证  $P^*$  权值最小, 对  $P^*$  上的弧其权值可增加量必须有一个上界, 而对非  $P^*$  上的弧其权值减少量必须有一个下界。为建立最短路可靠性评估模型, 考虑弧权值的变化只发生在  $P^*$  上的情况, 并且对最短路灵敏度分析的概念进行扩展: 最短路的灵敏度分析, 研究的是为保持  $P^*$  权值最小, 当其它弧的权值不变时, 对  $A(P^*)$  的任意子集  $A'(P^*)$ , 如何确定  $A'(P^*)$  中的弧的权值必须满足的约束条件。

当  $|A'(P^*)|=1$  时, 有如下结论成立:

**定理 1<sup>[2]</sup>** 假设  $P^*$  是  $D$  中最短  $(v_0, v_n)$  路。若弧  $a \in A(P^*)$ , 则为保证  $P^*$  权值最小, 当其它弧的权值不变时,  $c(a)$  的上界  $\beta_a = d^{a,*}(v_0, v_n) - c(P^*) + c(a)$ , 下界  $\alpha_a = 0$ 。这里,  $d^{a,*}(v_0, v_n)$  表示将弧  $a$  的权值改为  $\infty$  后  $v_0$  到  $v_n$  的最短路的权值。

由定理 1 可知, 为保证  $P^*$  权值最小, 当其它弧的权值不变时,  $P^*$  上弧权值的下界为 0, 而上界可通过计算一条最短路的权值得到。称弧  $a$  的权值的最大可增加量  $\Delta c(a) = \beta_a - c(a)$  为弧  $a$  的可行增加。

当  $|A'(P^*)| > 1$  时, 情况则要复杂许多。这里需要引入第  $j$  最短路的概念。最短路又叫第 1 最短路, 于是可以递归的定义第  $j$  最短路: 设  $P_i$  是  $D$  中顶点  $v_0$  到  $v_n$  的第  $i$  最短路 ( $1 \leq i \leq j-1$ )。

如果  $D$  中有一条  $v_0$  到  $v_n$  的路  $P_j$  满足下面两个条件:

- (1)  $\forall i, j$  且  $1 \leq i \leq j-1, P_i \neq P_j$ ;
- (2)  $D$  中不存在异于  $P_1, P_2, \dots, P_{j-1}$  的  $(v_0, v_n)$  路  $P$ , 使得  $c(P_{j-1}) \leq c(P) \leq c(P_j)$ ; 则称为  $D$  中顶点  $v_0$  到  $v_n$  的第  $j$  最短路。

用  $\Psi_i$  表示  $D$  中顶点  $v_0$  到  $v_n$  第  $i$  最短路集, 这样可以得到一个  $(v_0, v_n)$  路径集序列:  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_K (K \in \mathbb{Z}^+)$ 。

假设  $A'(P^*)$  中各弧的权值为变量, 只需给出为保证  $P^*$  仍为最短路时这些变量要满足的条件即可。为此用  $\bar{P}$  表示  $P^*$  上各弧权值为变量时所对应的  $(v_0, v_n)$  路, 用  $\bar{P}_{jk}$  表示第  $j$  最短路集中第  $k$  个元素  $P_{jk}$  上的弧的权值为变量时所对应的路。为保证  $\bar{P}$  的权值最小, 需要对  $\bar{P}$  的权值与第  $j$  最短路的权值进行比较 ( $j=2, 3, \dots, K$ )。即有:  $c(\bar{P}) \leq c(P_{jk}), (\bar{P}_{jk} \in \Psi_j; k=1, 2, \dots, |\Psi_j|; j=2, 3, \dots, K)$ , 进而有

$$\sum_{a \in A'(\bar{P})} c(a) \leq c(\bar{P}_{jk}) - c(P^*) + \sum_{a \in A'(P^*)} c(a), (\bar{P}_{jk} \in \Psi_j; k=1, 2, \dots, |\Psi_j|; j=2, 3, \dots, K) \quad (1)$$

可对式(1)进行改进, 结论如下:

**定理 2** 假设  $P^*$  是  $D$  中最短  $(v_0, v_n)$  路。若  $A'(P^*) \subset A(P^*)$ , 则当其它弧权值不变时, 为保证  $P^*$  仍为最短路, 必存在  $N \in \mathbb{Z}^+$  且  $N \leq K$ , 使得下列不等式组成立:

$$\sum_{a \in A'(\bar{P})} c(a) \leq c(\bar{P}_{jk}) - c(P^*) + \sum_{a \in A'(P^*)} c(a), (\bar{P}_{jk} \in \Psi_j; k=1, 2, \dots, |\Psi_j|; j=2, 3, \dots, N) \quad (2)$$

**证明** 如果不深究, 似乎只需比较  $\bar{P}$  和第 2 最短路的权值即可, 但是实际并非如此。这是因为如果  $A'(\bar{P})$  与所有的第 2 最

短路均存在公共弧, 那么式(1)中  $j=2$  时与公共弧相关的项都可消去, 即式(1)对公共弧将不起作用(实际情况是: 当公共弧的权值发生变化时, 第 2 最短路的权值发生变化, 甚至不再是第 2 最短路)。这样, 必须继续比较  $\bar{P}$  和第 3 最短路的权值, 即式(1)中  $j$  必须取到 3。同理, 若  $A'(\bar{P})$  与所有的第 3 最短路均存在公共弧, 必须继续比较  $\bar{P}$  和第 4 最短路的权值。这样一直进行下去, 直到存在某条第  $N$  最短路, 使得它与  $A'(\bar{P})$  没有公共弧, 这时  $A'(\bar{P})$  中各弧的权值都将出现在式(1)中。另一方面, 由于第  $j$  最短路的权值随  $j$  单调增加, 容易知道无需继续比较  $\bar{P}$  和第  $N+i$  最短路的权值 ( $i=1, 2, 3, \dots, K-N$ )。最后得到一组不等式组式(2)。

不等式组式(2)称之为最短路灵敏度分析基本公式。实际上  $|A'|=1$  的结论也可由式(2)给出。

需要说明的是, 目前已产生时间复杂度为  $O(jn(m+n \log n))$  的算法用来计算第  $j$  最短路, 但是计算第  $j$  最短路集十分困难。最直接的方法是找出所有的  $(v_0, v_n)$  路, 并按照权值大小进行排序, 得到顶点  $v_0$  到  $v_n$  的第 2 最短路集  $\Psi_2$ , 第 3 最短路集  $\Psi_3$ ,  $\dots$ , 第  $K$  最短路集  $\Psi_K$ 。可惜的是, 在一个网络中找出所有的  $(v_0, v_n)$  路是一个 NP 难题, 文献[3]指出: 在不考虑运算时间的情况下, 解决该问题的惟一方法是进行穷尽搜索, 如采用深度优先搜索。因此由式(2)给出的算法适用于高速计算环境, 而一般情况下只能应用于顶点数目较少或者是稀疏图的情形。

### 3 最短路可靠性评估模型的建立

在通信网络中由于人为或自然的因素, 链路的 QoS 度量参数值可能会发生变化, 如由于某个节点的通信能力下降, 导致该节点处数据包的转发速度变小, 从而与该节点相关联的链路上信息传输时延增大。可以假设网络  $D$  中每条弧的权值是独立的随机变量, 弧  $a \in A(P^*)$  的权值  $c(a)$  有连续的概率分布函数  $F_a(x)$ 。

首先计算最短路  $P^*$  不可靠的概率  $UR_{P^*}$ , 所谓  $P^*$  不可靠是指由于  $P^*$  上弧权值的变化导致  $P^*$  不再具有“最短性”, 即  $A'(\bar{P})$  取为  $A(\bar{P})$ , 不等式组式(2)不成立。

设  $A'(\bar{P})$  中的弧依次为  $a_1', a_2', \dots, a_m'$ , 其权值分布的概率密度函数分别为  $p_i'(x) (i=1, 2, \dots, m)$ , 则  $c(a_1'), c(a_2'), \dots, c(a_m')$  的联合概率密度  $p'(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m p_i'(x_i)$ 。

当  $A'(\bar{P})$  取为  $A(\bar{P})$ , 可将不等式组式(2)化简为:

$$\sum_{a \in A'(\bar{P})} c(a) \leq c(\bar{P}_{jk}), (\bar{P}_{jk} \in \Psi_j; k=1, 2, \dots, |\Psi_j|; j=2, 3, \dots, N) \quad (3)$$

易知不等式组(3)的解可表示为:  $L(c(a_1'), c(a_2'), \dots, c(a_m')) \leq \alpha$ , 其中  $L$  和  $\alpha$  均为向量, 其表达式是和具体问题相联系的。于是

$$UR_{P^*} = \text{Prob}\{L(c(a_1'), c(a_2'), \dots, c(a_m')) \leq \alpha\} =$$

$$\int_{L(c(a_1'), c(a_2'), \dots, c(a_m')) \leq \alpha} p'(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m = \int_{L(c(a_1'), c(a_2'), \dots, c(a_m')) \leq \alpha} \prod_{i=1}^m p_i'(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

进而最短路  $P^*$  可靠的概率为:  $R_{P^*} = 1 - UR_{P^*}$ 。

另外,针对最短路灵敏度分析的另一个研究内容——最短路关键弧问题,给出如下两种关键弧的定义。

**定义 1** 对给定的最短 $(v_0, v_n)$ 路 $P^*$ ,在图 $D$ 中寻找某条弧 $a$ ,使得去掉此弧后,图 $D'=(V, A-\{a\})$ 中最短 $(v_0, v_n)$ 路权值最大,即寻找弧 $a$ ,使得对任意的弧 $a' \in A$ ,都有 $c(P_{D-a}^*) \geq c(P_{D-a'}^*)$ ,这里 $c(P_{D-a}^*), c(P_{D-a'}^*)$ 分别指图 $D-a$ 和图 $D-a'$ 中的最短 $(v_0, v_n)$ 路。

定义 1 是已有的关键弧定义,基于最短路灵敏度分析理论,也可给出最短路关键弧的一种新定义。

**定义 2** 对给定的最短 $(v_0, v_n)$ 路 $P^*$ ,在其它弧权值不变时,由于 $P^*$ 上某条弧 $a$ 的权值增量超过其可行增加从而破坏了 $P^*$ 的最短性。在给出 $D$ 中每条弧的权值概率分布函数的情况下,若在 $P^*$ 上找到一条弧 $a$ ,它的权值增量超过其可行增加的概率值最大,则称弧 $a$ 为最短路 $P^*$ 的关键弧。即寻找弧 $a \in A(P^*)$ ,使得: $\text{Prob}\{c(a) > \beta_a\} = \max_{a' \in A(P^*)} \text{Prob}\{c(a') > \beta_{a'}\}, \beta_a, \beta_{a'} \in A(\bar{P})$ 的定义见

本文第 2 章。同样,也可给出次关键弧、第 3 关键弧等概念。

相比之下,定义 2 与实际应用联系紧密,比如在通信网络中由于各种原因各链路的 QoS 度量参数可认为是随机变化的,定义 2 给出的关键弧概念反映了链路的性能参数对信息传输路由可靠性的影响。另外,前一种关键弧的概念强调的是对最短路权值的影响大小,而定义 2 则侧重于最短路被破坏的可能性,即最短路的稳定性。基于上述原因,称前一种最短路关键弧为费用型关键弧,后一种关键弧为稳定型关键弧。

**4 实例**

给出一个定向图 $D$ ,如图 1 所示。各条弧旁边的数字表示该弧的权值,每条弧的权值都有同样的概率密度函数 $p(x)=e^{-x}, x \in (0, \infty)$ 。易知图中最短 $(v_1, v_5)$ 路为 $P^*=v_1v_2v_3v_4v_5, c(P^*)=4$ 。下面将按照前述方法计算该最短路的可靠性概率和关键弧。

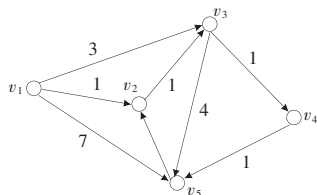


图 1 最短路可靠性评估模型实例

采用深度优先搜索算法,得到

第 2 最短路集  $\Psi_2=\{P_2|P_2=v_1v_3v_4v_5\}, c(P_2)=5$ ;

第 3 最短路集  $\Psi_3=\{P_3|P_3=v_1v_2v_3v_4v_5\}, c(P_3)=6$ ;

第 4 最短路集  $\Psi_4=\{P_1^A, P_2^A|P_1^A=v_1v_3v_5, P_2^A=v_1v_5\}, c(P_1^A)=c(P_2^A)=7$ 。

$A'(\bar{P})$ 取为 $A(\bar{P})$ 时,由式(2)可得:

$$\begin{cases} c_{12}+c_{23} \leq 3 \\ c_{34}+c_{45} \leq 4 \end{cases}$$

其中 $c_{ij}$ 表示弧 $(v_i, v_j)$ 的权值。于是

$$UR_{P^*} = \int_{x_1+x_2 > 3} e^{-(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 + \int_{x_1+x_2 > 4} e^{-(x_1+x_2)} dx_1 dx_2$$

从而 $P^*$ 的可靠概率: $R_{P^*}=1-UR_{P^*}=1-4e^{-3}-5e^{-4} \approx 0.71$ 。

根据费用型关键弧定义,可求出关键弧为 $(v_3, v_4)$ 和 $(v_4, v_5)$ 。下面,利用本文提出的关键弧定义,给出影响最短路稳定的关键弧。

将弧 $(v_1, v_2)$ 的权值改为 $\infty$ 后,图 $D$ 中最短 $(v_1, v_5)$ 路为 $P_{12}^*=v_1v_3v_4v_5$ ,从而 $d^{(v_1, v_2), \infty}(v_1, v_5)=5$ ;同样,可求得 $d^{(v_2, v_3), \infty}(v_1, v_5)=5, d^{(v_3, v_4), \infty}(v_1, v_5)=d^{(v_1, v_3), \infty}(v_1, v_5)=6$ ;于是, $\beta_{(v_1, v_2)}=d^{(v_1, v_2), \infty}(v_1, v_5)-c(P^*)+c(v_1, v_2)=2, \beta_{(v_2, v_3)}=2, \beta_{(v_3, v_4)}=\beta_{(v_4, v_5)}=3$ ;进而, $\text{Prob}\{c_{12} > \beta_{(v_1, v_2)}\} = \text{Prob}\{c_{23} > \beta_{(v_2, v_3)}\} = \int_2^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-2}, \text{Prob}\{c_{34} > \beta_{(v_3, v_4)}\} = \text{Prob}\{c_{45} > \beta_{(v_4, v_5)}\} = \int_3^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-3}$ ,最后得到最短路 $P^*$ 的稳定型关键弧为 $(v_1, v_2)$ 和 $(v_2, v_3)$ 。

**5 结束语**

本文从最短路灵敏度分析的角度,给出了一种与通信网络实际应用紧密结合的最短路可靠性评估模型。建立该模型的意义在于,当网络中存在多条最优路径时,可选择可靠性概率更高者用来实现业务需求。另外,由实例的结果可知,定义 1 和定义 2 给出的最短路关键弧一般是不同的。在通信网络运作过程中,根据最短路关键弧概念得到启发:当需要维持当前信息传输路由稳定时,可优先保证稳定型关键链路的通信性能,如进行路由备份。而当必须进行路由切换时,为了尽量降低切换后信息传输路由的费用,需要尽可能保证费用型关键弧的通信性能。

此外,本文只对弧权值是一维的情况进行了研究,即针对的是通信网络中一个 QoS 度量参数提出的服务质量要求(且为加性度量参数),而通信网络业务往往会对多个参数同时提出性能要求,因此今后将结合通信网络实际对多维的情形展开研究。

**参考文献:**

- [1] 齐小刚,刘三阳.计算机网络中的路由与性能优化[D].西安:西安电子科技大学,2005.
- [2] Ramkumar R, James B O, Nilopal C. Sensitivity analysis for shortest path problems and maximum capacity path problems in undirected graphs. MIT Sloan Working Paper 4391-02, 2004.
- [3] Migliore M, Martorana V, Sciortino F. An algorithm to find all the paths between two nodes in a graph[J]. Journal of Computational Physics, 1990, 87: 231-236.
- [4] 谢政,戴丽.组合图论[M].长沙:国防科技大学出版社,2003.
- [5] 谢政.网络算法与复杂性[M].2版.长沙:国防科技大学出版社,2003.

(上接 56 页)

**参考文献:**

- [1] 熊学.遗传算法在求解含错方程组中的应用[J].西南民族大学学报:自然科学版,2007(2).
- [2] Metropolis N, Rosenbluth A W, Rosenbluth M N, et al. Equations of state calculations by fast computing machines[J]. Chemical Physics, 1953, 21: 1087-1091.

- [3] Kirkpatrick S, Gelatt Jr C D, Vecchi M P. Optimization by simulated annealing[J]. Science, 1983, 220(4598).
- [4] 邢文训,谢金星.现代优化计算方法[M].北京:清华大学出版社,2003.
- [5] 赵天玉.模拟退火算法及其在组合优化中的应用[J].计算机与现代化, 1999, 61(3).
- [6] 康立山,谢云.非数值并行算法(第一册)[M].北京:科学出版社, 1994.
- [7] 张德富,顾卫刚,沈平.一种解旅行商问题的并行模拟退火算法[J].计算机研究与发展, 1995(2).