一类二元有理插值曲面的有界性和逼近性质

邓四清[1],方 逵[2,3],谢 进[4]
DENG Si-qing[1],FANG Kui[2,3],XIE Jin[4]

1.湘南学院 数学系,湖南 郴州 423000
2.湖南农业大学 信息科学技术学院,长沙 410128
3.湖南师范大学 数学与计算机科学学院,长沙 410081
4.合肥学院 数理系,合肥 230601
1.Department of Mathematics,Xiangnan University,Chenzhou,Hunan 423000,China
2.School of Information Science and Technology,Hunan Agricultural University,Changsha 410128,China
3.School of Mathematics and Computer,Hunan Normal University,Changsha 410081,China
4.Department of Mathematics and Physics,Hefei University,Hefei 230601,China
E-mail:dengsq66@163.com

DENG Si-qing,FANG Kui,XIE Jin.Bounded property and approximation of bivariate rational interpolating surface. Computer Engineering and Applications,2009,45(11):189-192.

Abstract: A bivariate rational biquartic interpolating spline based on function values with four parameters is constructed,and this spline is with biquartic numerator and biquadratic denominator.The interpolating function has a simple and explicit mathematical representation,which is convenient both in practical application and in theoretical study.The interpolating surface is C^1 in the interpolating region when two of the parameters satisfiy a simple condition,when the another two parameters are selected suitably, the interpolating function could be expressed in matrix form.The interpolating surface can be modified by selecting suitable parameters under the condition that the interpolating data are not changed.It is proved that the values of the interpolating function in the interpolating region are bounded no matter what the parameters might be,this is called the bounded property of the interpolation.The approximation expressions of the interpolation are derived:they do not depend on the parameters.
Key words: computer application;bivariate interpolation;rational spline;parameter;computer aided geometric design

摘 要:构造了一种带参数的仅基于函数值的分子为双四次、分母为双二次的二元有理插值样条函数。得到了二元有理插值样条函数的矩阵表示,给出了插值曲面在插值区域上 C^1 光滑的一个充分条件,讨论了插值基函数的性质和插值函数的有界性及误差估计。由于插值函数中含有参数,这样可以在插值数据不变的情况下通过对参数的选择进行插值曲面的局部修改。
关键词:计算机应用;二元插值;有理样条;参数;计算机辅助几何设计
DOI:10.3778/j.issn.1002-8331.2009.11.057 **文章编号**:1002-8331(2009)11-0189-04 **文献标识码**:A **中图分类号**:TP391;O241.3

1 引言

曲线曲面的构造和数学描述是计算机辅助几何设计中的核心问题。现在已有很多这种方法[1-13],如多项式样条方法、B样条及非均匀有理B样条(NURBS)方法、Bézier方法等等。这些方法已广泛应用于工业产品的形状设计,如飞机、汽车、轮船的外形设计。通常来说,多项式样条方法一般都是插值型方法,插值曲线和插值曲面均通过插值点。构造这些多项式样条,其插值条件除插值点处的函数值外,一般还需要表示方向的导数值。但在很多实际问题中,导数值是很难得到的。同时,多项式样条方法的一个缺点是它的整体性质,在插值条件不变的情况下,在“插值函数关于插值条件的唯一性”的约束下,无法进行所构造的曲线曲面的整体或局部修改。NURBS方法和Bézier方法是所谓的非插值型方法,用这些方法所构造出来的曲线曲面一般不通过给定的点,给定的点是作为控制点出现的,通过给定点的变动控制插值曲线曲面的形状。因此,如果能设计出一种方法,它兼顾以上两种类型方法的优点,即既是插值型的,又能进行局部或整体修改,同时又是在便于获取的插值数据下使插值函数具有简洁的显示表示,将是非常有意义的。文献[13]

基金项目:国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60773110);湖南省教育厅科研资助项目(No.06C791);湖南省科技计划项目(No.2008FJ3046);湖南省重点学科建设资助项目;湖南省高校科技创新团队计划支持项目;安徽省教育厅自然科研项目(No.KJ2008B250)。
作者简介:邓四清(1966-),男,教授,主要研究方向为数值逼近、计算机辅助几何设计;方逵(1963-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学;谢进(1970-),男,博士生,讲师,主要研究方向为计算机辅助几何设计。
收稿日期:2008-02-27 **修回日期**:2008-05-05

构造了一种仅基于函数值的分母为线性的有理三次插值样条，借助于该方法，文献[14]研究了一种空间曲面插值问题，给出了矩形分划上的仅基于函数值的分片二元有理插值样条的构造方法，导出了关于插值曲面的光滑性定理，最后讨论了插值基函数的性质。

有理四次插值样条由于其构造所花费的计算量太大以及在使用上的不方便而让人们忽视了其重要的应用价值，因此以前很少有人研究他们。但近些年来，有理四次插值样条是比较热门的研究课题[15-18]。实际上，在某些情况下有理四次插值样条有其独特的应用效果，比如叶懋冬[15]建立的一种具有局部插值性质的分母为二次的有理四次样条，即一个剖分子区间上的有理插值式只与邻近区间上的插值点有关，一个插值节点上的数值变动只影响其邻近的局部范围；闵杰等[16]构造了一种分母为线性的有理四次插值样条，研究得到了该种有理四次插值样条不但具有三次多项式的插值精度而且具有独特的逼近性质；Wang 等[17-18]先构造了一种有理四次插值样条，讨论了插值样条的保单调性、C^2 连续性以及逼近性质，然后将其推广到有理双四次插值曲面；张彩明等[19]讨论了 C^2 连续的四次样条曲面插值。本文先构造了一种新的仅基于函数值的分子为四次、分母为二次的有理四次插值样条，借助于该方法，给出一种新的矩形分划上的仅基于函数值的分片二元有理插值样条的构造方法，每片中带有关于 x 方向两个参数和关于 y 方向的两个参数，是分子为双四次、分母为双二次的有理函数；导出了关于插值曲面的光滑性定理，该定理指出，当选取其中关于 y 方向的两个参数满足一定条件时，插值曲面在插值区域 C^1 光滑。更有趣的是，当关于 x 方向的两个参数满足某种条件时，插值函数可表示为矩阵形式，并且这种表示具有对称性；讨论了插值基函数的性质，最后利用插值基函数的性质讨论了插值函数的有界性及逼近性质。

2 插值函数的构造

令 $\Omega:[a,b;c,d]$ 为一平面区域，$\{(x_i,y_j,f_{i,j}),i=1,2,\cdots,n+1;j=1,2,\cdots,m,m+1\}$ 为给定的空间数据点，此处 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$ 和 $c=y_1<y_2<\cdots<y_m<y_{m+1}=d$ 形成 $\Omega:[a,b;c,d]$ 上的矩形分划。记 $h_i=x_{i+1}-x_i$，$l_j=y_{j+1}-y_j$，对于 xy-平面上 $[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$ 内的任意点 (x,y)，令 $\theta=(x-x_i)/h_i$，$\eta=(y-y_j)/l_j$。对任一 $y_j,j\in\{1,2,\cdots,m+1\}$，首先构造沿 x 方向的在 $[x_i,x_{i+1}]$，$i=1,2,\cdots,n-1$ 上的一元有理插值函数：

$$P^*_{i,j}(x)=\frac{p^*_{i,j}(x)}{q^*_{i,j}(x)},i=1,2,\cdots,n-1 \tag{1}$$

此处：

$$p^*_{i,j}(x)=\alpha_{i,j}f_{i,j}(1-\theta)^4+U^*_{i,j}\theta(1-\theta)^3+V^*_{i,j}\theta^2(1-\theta)^2+W^*_{i,j}\theta^3(1-\theta)+f_{i+1,j}\theta^4$$

$$q^*_{i,j}(x)=\alpha_{i,j}(1-\theta)^2+\lambda_{i,j}\theta(1-\theta)+\theta^2$$

且：

$$U^*_{i,j}=(\alpha_{i,j}+\lambda_{i,j})f_{i,j}+\alpha_{i,j}f_{i+1,j}$$

$$V^*_{i,j}=kf_{i,j}+(\alpha_{i,j}+2\lambda_{i,j}+1-k)f_{i+1,j}$$

$$W^*_{i,j}=(\lambda_{i,j}+2)f_{i+1,j}-h_i\Delta^*_{i+1,j}$$

这里参数 $\alpha_{i,j}>0$，$\lambda_{i,j}>0$，$\Delta^*_{i,j}=(f_{i+1,j}-f_{i,j})/h_i$，$k$ 是任意常数。这种插值被称作分母为二次的仅基于函数值的一元有理插值，它满足：

$$P^*_{i,j}(x_i)=f_{i,j},P^*_{i,j}(x_{i+1})=f_{i+1,j},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}P^*_{i,j}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}=\Delta^*_{i,j},\quad \left.\frac{\mathrm{d}P^*_{i,j}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_{i+1}}=\Delta^*_{i+1,j}$$

对任意 (i,j)，$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 且 $j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，利用 x 方向的插值函数 $P^*_{i,j}(x)$，定义 $[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$ 上的二元有理插值函数 $P_{i,j}(x,y)$：

$$P_{i,j}(x,y)=\frac{p_{i,j}(x,y)}{q_{i,j}(y)},i=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,m-1 \tag{2}$$

此处：

$$p_{i,j}(x,y)=\beta_{i,j}P^*_{i,j}(x)(1-\eta)^4+U_{i,j}\eta(1-\eta^3)+V_{i,j}\eta^2(1-\eta)^2+W_{i,j}\eta^3(1-\eta)+P^*_{i,j+1}(x)\eta^4$$

$$q_{i,j}(y)=\beta_{i,j}(1-\eta)^2+\mu_{i,j}\eta(1-\eta)+\eta^2$$

且：

$$U_{i,j}=(\beta_{i,j}+\mu_{i,j})P^*_{i,j}(x)+\beta_{i,j}P^*_{i,j+1}(x)$$

$$V_{i,j}=kP^*_{i,j}(x)+(\beta_{i,j}+2\mu_{i,j}+1-k)P^*_{i,j+1}(x)$$

$$W_{i,j}=(\mu_{i,j}+2)P^*_{i,j+1}(x)-l_j\Delta_{i,j+1}(x)$$

这里参数 $\beta_{i,j}>0$，$\mu_{i,j}>0$，$\Delta_{i,j}(x)=(P^*_{i,j+1}(x)-P^*_{i,j}(x))/l_j$。$P_{i,j}(x,y)$ 被称作带参数的分母为双二次的仅基于函数值的二元有理双四次插值函数，它满足：

$$P_{i,j}(x_r,y_s)=f(x_r,y_s),\quad r=i,i+1,s=j,j+1$$

3 插值曲面的光滑条件

由第 2 章易知，对任意的 $y_j,j\in\{1,2,\cdots,m,m+1\}$，当 $x\in[x_1,x_n]$ 时，由式(1)所定义的插值函数 $P^*_{i,j}(x)$ 在 $x\in[x_1,x_n]$ 上有一阶连续导数，因此，由式(2)所定义的插值函数 $P_{i,j}(x,y)$ 在插值区域 $[x_1,x_n;y_1,y_m]$ 上有一阶连续的偏导数 $\frac{\partial P_{i,j}(x,y)}{\partial y}$，而除点 (x_i,y)，$i=1,2,\cdots,n-1$，$y\in(y_j,y_{j+1})$，$j=1,2,\cdots,m-1$ 外，偏导数 $\frac{\partial P_{i,j}(x,y)}{\partial x}$ 也是连续的。于是只要合适的选择参数，使在这些点偏导数满足：

$$\frac{\partial P_{i,j}(x_i+,y)}{\partial x}=\frac{\partial P_{i,j}(x_i-,y)}{\partial x},y\in(y_j,y_{j+1}),i=2,3,\cdots,n-1,j=1,2,\cdots,m-1$$

则在插值区域 $[x_1,x_n;y_1,y_m]$ 上插值函数 $P_{i,j}(x,y)\in C^1$。于是有下面的定理：

定理 1 在插值区域 $[x_1,x_n;y_1,y_m]$ 上插值函数 $P_{i,j}(x,y)\in C^1$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$ 的充分条件是，对任一 $j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 和所有的 i，$i=1,2,\cdots,n-1$，参数 $\beta_{i,j}$，$\mu_{i,j}$ 满足 $\beta_{i,j}=$ 常数且 $\mu_{i,j}=$ 常数。即 $\beta_{1,j}=\beta_{2,j}=\cdots=\beta_{n-1,j}$，为方便起见，记之为 β_j；$\mu_{1,j}=\mu_{2,j}=\cdots=\mu_{n-1,j}$，记之为 μ_j。

证明 不失一般性，对任意 $j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，对于插值函数 $P_{i,j}(x,y)$ 和 $P_{i-1,j}(x,y)$，只要选择合适的参数 $\beta_{i-1,j}$ 和 $\beta_{i,j}$，使之满足 $\frac{\partial P_{i,j}(x_i+,y)}{\partial x}=\frac{\partial P_{i-1,j}(x_i-,y)}{\partial x}$，$i=2,3,\cdots,n-1$，即证明了本定理。

因为：

$$\frac{\partial P_{i,j}(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{q_{i,j}(y)}[\beta_{i,j}\frac{\mathrm{d}P^*_{i,j}(x)}{\mathrm{d}x}(1-\eta)^4+\frac{\mathrm{d}U_{i,j}}{\mathrm{d}x}\eta(1-\eta)^3+$$

$$\frac{\mathrm{d}V_{i,j}}{\mathrm{d}x}\eta^2(1-\eta)^2+\frac{\mathrm{d}W_{i,j}}{\mathrm{d}x}\eta^3(1-\eta)+\frac{\mathrm{d}P^*_{i,j+1}(x)}{\mathrm{d}x}\eta^4]$$

且:

$$P^{*'}_{i,r}(x_i+)=\Delta^*_{i,r},r=j,j+1,j+2$$

于是:

$$U'_{i,j}(x_i+)=(\beta_{i,j}+\mu_{i,j})\Delta^*_{i,j}+\beta_{i,j}\Delta^*_{i,j+1}$$

$$V'_{i,j}(x_i+)=k\Delta^*_{i,j}+(\beta_{i,j}+2\mu_{i,j}+1-k)\Delta^*_{i,j+1}$$

$$W'_{i,j}(x_i+)=(\mu_{i,j}+2)\Delta^*_{i,j+1}-\frac{l_j}{l_{j+1}}(\Delta^*_{i,j+2}-\Delta^*_{i,j+1})$$

这样:

$$\left.\frac{\partial P_{i,j}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_i+}=\frac{Q_1(\eta)}{\beta_{i,j}(1-\eta)^2+\mu_{i,j}\eta(1-\eta)+\eta^2} \tag{3}$$

此处:

$$Q_1(\eta)=\beta_{i,j}\Delta^*_{i,j}(1-\eta)^4+((\beta_{i,j}+\mu_{i,j})\Delta^*_{i,j}+\beta_{i,j}\Delta^*_{i,j+1})\eta(1-\eta)^3+(k\Delta^*_{i,j}+(\beta_{i,j}+2\mu_{i,j}+1-k)\Delta^*_{i,j+1})\eta^2(1-\eta)^2+((\mu_{i,j}+2)\Delta^*_{i,j+1}-\frac{l_j}{l_{j+1}}(\Delta^*_{i,j+2}-\Delta^*_{i,j+1}))\eta^3(1-\eta)+\Delta^*_{i,j+1}\eta^4$$

类似地,因为:

$$P^{*'}_{i-1,r}(x_i-)=\Delta^*_{i,r},r=j,j+1,j+2,$$

可以得到:

$$\left.\frac{\partial P_{i-1,j}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_i-}=\frac{Q_2(\eta)}{\beta_{i-1,j}(1-\eta)^2+\mu_{i-1,j}\eta(1-\eta)+\eta^2} \tag{4}$$

此处:

$$Q_2(\eta)=\beta_{i-1,j}\Delta^*_{i,j}(1-\eta)^4+((\beta_{i-1,j}+\mu_{i-1,j})\Delta^*_{i,j}+\beta_{i-1,j}\Delta^*_{i,j+1})\eta(1-\eta)^3+(k\Delta^*_{i,j}+(\beta_{i-1,j}+2\mu_{i-1,j}+1-k)\Delta^*_{i,j+1})\eta^2(1-\eta)^2+((\mu_{i-1,j}+2)\Delta^*_{i,j+1}-\frac{l_j}{l_{j+1}}(\Delta^*_{i,j+2}-\Delta^*_{i,j+1}))\eta^3(1-\eta)+\Delta^*_{i,j+1}\eta^4$$

比较式(3)与式(4),当 $\beta_{i-1,j}=\beta_{i,j},\mu_{i-1,j}=\mu_{i,j}$ 时,有:

$$\frac{\partial P_{i,j}(x_i+,y)}{\partial x}=\frac{\partial P_{i-1,j}(x_i-,y)}{\partial x}$$

从而定理的结论成立。

4 插值函数的矩阵表示

本文的以下部分,总假定分划是等距的。即考虑矩形插值域上的等距矩形分划,即对所有的 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $j=1,2,\cdots,m$,有 $h_i=h_j$,记之为 h,且 $l_i=l_j$,记之为 l。由定理 1,对任一 $j\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 和所有 $i=1,2,\cdots,n-1$,如果 $\beta_{i,j}$=常数且 $\mu_{i,j}$=常数,则式(2)所定义的插值函数在插值域上是 C^1 连续的,分别记之为 β_j 与 μ_j。发现,对任一 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$,当另一组参数 $\alpha_{i,j}$、$\lambda_{i,j}$ 对所有的 $j=1,2,\cdots,m-1$ 亦分别为常数时,不妨分别记之为 α_i、λ_i,此 C^1 连续的插值函数可以表示为简单的矩阵形式。

首先看由式(1)定义的插值函数 $P^*_{i,j}(x)$ 的矩阵表示:

$$\boldsymbol{P}^*_{i,j}(x)=\omega_0(\theta,\alpha_i,\lambda_i)f_{i,j}+\omega_1(\theta,\alpha_i,\lambda_i)f_{i+1,j}+\omega_2(\theta,\alpha_i,\lambda_i)f_{i+2,j} \tag{5}$$

其中:

$$\omega_0(\theta,\alpha_i,\lambda_i)=\frac{\alpha_i(1-\theta)^3+\lambda_i\theta(1-\theta)^3+k\theta^2(1-\theta)^2}{\alpha_i(1-\theta)^2+\lambda_i\theta(1-\theta)+\theta^2}$$

$$\omega_1(\theta,\alpha_i,\lambda_i)=\frac{\alpha_i\theta(1-\theta)^2+\lambda_i\theta^2(1-\theta)(2-\theta)-k\theta^2(1-\theta)^2+\theta^2(1+\theta-\theta^2)}{\alpha_i(1-\theta)^2+\lambda_i\theta(1-\theta)+\theta^2}$$

$$\omega_2(\theta,\alpha_i,\lambda_i)=\frac{-\theta^3(1-\theta)}{\alpha_i(1-\theta)^2+\lambda_i\theta(1-\theta)+\theta^2}$$

如此,$\boldsymbol{P}^*_{i,j}(x)$ 可表示为如下的矩阵形式:

$$\boldsymbol{P}^*_{i,j}(x)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 \tag{6}$$

这里:

$$\boldsymbol{A}_1=(\omega_0(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\quad\omega_1(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\quad\omega_2(\theta,\alpha_i,\lambda_i))$$

$$\boldsymbol{B}_1=(f_{i,j}\quad f_{i+1,j}\quad f_{i+2,j})^{\mathrm{T}}$$

类似地,由式(2)定义的二元有理插值函数 $P_{i,j}$ 亦可以表示成:

$$\boldsymbol{P}_{i,j}(x,y)=A_2B_2 \tag{7}$$

此处:

$$\boldsymbol{A}_2=(\omega_0(\eta,\beta_j,\mu_j)\quad\omega_1(\eta,\beta_j,\mu_j)\quad\omega_2(\eta,\beta_j,\mu_j))$$

$$\boldsymbol{B}_2=(P^*_{i,j}\quad P^*_{i,j+1}\quad P^*_{i,j+2})^{\mathrm{T}}$$

按照 $P^*_{i,j}$ 的矩阵描述,式(7)可以写成:

$$\boldsymbol{P}_{i,j}(x,y)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为:

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}f_{i,j}&f_{i,j+1}&f_{i,j+2}\\f_{i+1,j}&f_{i+1,j+1}&f_{i+1,j+2}\\f_{i+2,j}&f_{i+2,j+1}&f_{i+2,j+2}\end{pmatrix}$$

容易看到式(8)还可以写成:

$$\boldsymbol{P}_{i,j}(x,y)=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}=(A_1FA_2)^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

称之为二元插值函数 $P_{i,j}(x,y)$ 关于插值数据的对称性。

5 插值基函数的基本性质

在插值表达式(5)中,将 $\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)$,$r=0,1,2$ 看作一元插值函数的插值基,不难证明该插值基具有下述有趣的性质:

性质 1 在任意插值子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上,不论参数 α_i、λ_i 分别取任何正值,k 取任何常数,插值基函数数值之和恒等于 1,即:

$$\sum_{r=0}^{2}\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\equiv 1 \tag{10}$$

进一步,对于由式(8)所定义的二元有理插值函数 $P_{i,j}(x,y)$,有其与性质 1 平行的性质。将式(8)改写为:

$$P_{i,j}(x,y)=\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)f_{i+r,j+s} \tag{11}$$

这里:

$$\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)=\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\omega_s(\eta,\beta_j,\mu_j) \tag{12}$$

将 $\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)$,$r=0,1,2$,$s=0,1,2$ 视为由式(8)所定义的插值函数的基,有如下关于基的性质。

性质 2 在任意插值子区域 $[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$ 上,不论参数 α_i、λ_i、β_j、μ_j 取任何正值,k 取任何常数, 插值基函数数值之和恒等于 1,即:

$$\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)\equiv 1 \tag{13}$$

6 插值函数的有界性及逼近性质

对于给定的空间数据,不论参数 α_i、λ_i、β_j、μ_j 分别取任何正值,k 取任何常数,由式(2)定义的二元有理插值函数 $P_{i,j}(x,y)$ 在插值区域内是有界的,有下面的定理:

定理 2 在任何插值区域$[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$上，令：

$$M=\max_{r=0,s=0}^{r=2,s=2}|f_{i+r,j+s}|$$

不论参数α_i、λ_i、β_j、μ_j分别取任何正值，k取任何常数，则由式(2)定义的二元有理插值函数$P_{i,j}(x,y)$在$[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$上，有：

$$|P_{i,j}(x,y)|\leqslant\frac{9}{4}M$$

证明 由式(11)和式(12)得：

$$\begin{aligned}|P_{i,j}(x,y)|&\leqslant\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}|\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)||f_{i+r,j+s}|\leqslant\\ &M\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}|\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)|=\\ &M\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}|\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)||\omega_s(\eta,\beta_j,\mu_j)|=\\ &M\sum_{r=0}^{2}|\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)|\sum_{s=0}^{2}|\omega_s(\eta,\beta_j,\mu_j)|\end{aligned}\qquad(14)$$

因为当$\theta\in[0,1]$时，$\omega_0(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\geqslant0$，$\omega_1(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\geqslant0$但$\omega_2(\theta,\alpha_i,\lambda_i)\geqslant0$，所以通过计算可以得到：

$$\sum_{r=0}^{2}|\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)|=1+\frac{2\theta^3(1-\theta)}{\alpha_i(1-\theta)^2+\lambda_i\theta(1-\theta)+\theta^2}\qquad(15)$$

同理可得：

$$\sum_{s=0}^{2}|\omega_s(\eta,\beta_j,\mu_j)|=1+\frac{2\eta^3(1-\eta)}{\beta_j(1-\eta)^2+\mu_j\eta(1-\eta)+\eta^2}\qquad(16)$$

令：

$$g(\theta)=1+\frac{2\theta^3(1-\theta)}{\alpha_i(1-\theta)^2+\lambda_i\theta(1-\theta)+\theta^2}$$

因对任意的

$\alpha_i>0$，$\lambda_i>0$和$\theta\in[0,1]$

$g(\theta)\leqslant1+2\theta(1-\theta)$

又：

$$\max_{\theta\in[0,1]}g(\theta)\leqslant\frac{3}{2}$$

因此，由式(15)可知对任意的$\alpha_i>0$，$\lambda_i>0$和$\theta\in[0,1]$，有：

$$\sum_{r=0}^{2}|\omega_r(\theta,\alpha_i,\lambda_i)|\leqslant\frac{3}{2}\qquad(17)$$

同理，由式(16)可知对任意的$\beta_j>0$，$\mu_j>0$和$\eta\in[0,1]$，有：

$$\sum_{s=0}^{2}|\omega_s(\eta,\beta_j,\mu_j)|\leqslant\frac{3}{2}\qquad(18)$$

从而由式(14)知：

$$|P_{i,j}(x,y)|\leqslant\frac{9}{4}M$$

即定理的结论成立。

下面考虑插值函数的逼近性质。设(x,y)是插值子区域$[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$内任意一点，假设$f(x,y)\in C^1$，由Taylor公式得：

$$f(x,y)=f(x_{i+r},y_{j+s})+\left((x-x_{i+r})\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_{j+s})\frac{\partial}{\partial y}\right)f(\zeta_r,\upsilon_s)$$

$r=0,1,2;s=0,1,2$

这里ζ_r介于x与x_{i+r}之间，υ_s介于y与y_{j+s}之间。令：

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|=\max_{x\in[x_1,x_{n+1}]}\left\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\|$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|=\max_{y\in[y_1,y_{m+1}]}\left\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\|$$

于是有：

$$|f(x,y)-f(x_{i+r},y_{j+s})|\leqslant\left(2h\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|+2l\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|\right)$$

$r=0,1,2;s=0,1,2$

由式(11)和式(13)，得：

$$f(x,y)-P_{i,j}(x,y)=\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)(f(x,y)-f_{i+r,j+s})$$

于是有：

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-P_{i,j}(x,y)|\leqslant\\ &\sum_{r=0}^{2}\sum_{s=0}^{2}|\omega_{rs}(\theta,\alpha_i,\lambda_i;\eta,\beta_j,\mu_j)|\left(2h\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|+2l\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|\right)\end{aligned}$$

从而由式(17)及式(18)，有如下的逼近定理：

定理 3 在任何插值区域$[x_i,x_{i+1};y_j,y_{j+1}]$上，不论参数$\alpha_i$、$\lambda_i$、$\beta_j$、$\mu_j$取任何正值，$k$取任何常数，则由式(2)定义的二元有理插值函数$P_{i,j}(x,y)$与被插函数$f(x,y)$的误差满足：

$$|f(x,y)-P_{i,j}(x,y)|\leqslant\frac{9}{2}\left(h\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|+l\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|\right)$$

7 结束语

构造了矩形分划上的仅基于函数值的分子为双四次、分母为双二次的分片二元有理插值样条，插值函数具有简洁的显示表示，既便于应用，又便于理论研究。证明了不论参数取何正值，在给定插值区域内插值函数均有界。同时，给出了插值的逼近表达式，且表达式与参数无关。与多项式插值相比，本文所给出的二元有理插值最大优势在于给定插值点的数据不变的情况下通过改变插值函数中的参数来修改曲面片，即给定插值数据不变，可以改变曲面的形状以达到设计者的要求，这是几何设计中的实际工程中很重要的方面。

参考文献：

[1] Farin G.Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide[M].[S.l.]:Academic Press,1988.

[2] Chui C K.Multivariate spline[J].SIAM,1988.

[3] Bézier P E.The mathematical basis of the UNISURF CAD system[M]. London:Butterworth-Heinemann,1986.

[4] Dierck P,Tytgat B.Generating the Bézier points of β-spline curve[J]. Computer Aided Geometric Design,1989,6(2):279-291.

[5] Piegl L.On NURBS:a survey[J].IEEE Computer Graphics and Application,1991,11(1):55-71.

[6] Nielson G M.CAGD's top ten:what to watch[J].IEEE Computer Graphics and Automation,1993,13(1):35-37.

[7] Konno K,Chiyokura H.An approach of designing and controlling free-form surfaces by using NURBS boundary gregory patches[J]. Computer Aided Geometric Design,1996,13(4):825-849.

[8] Wilcox L M.First and second contributions to surface interpolation [J].Vision Research,1999,39:2335-2347.

[9] Lin R S.Real-time surface interpolator for 3-D parametric surface machining on 3-axis machine tools[J].Machine tools and Manufacture,2000,40:1513-1526.

[10] Jiang D H,Liu H N,Wang W G.Test a modified surface wind interpolation scheme for complex terrain in a stable atmosphere[J]. Atmospheric Environment,2001,35:4877-4885.

[11] Comninos P.An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters[J].Computer and Graphics,2001,25(4):463-481.

[12] Müller R.Universal parametrization and interpolation on cubic surfaces[J].Computer Aided Geometric Design,2002,19(4):479-502.

（下转 202 页）