新息改进 GM(1,1)模型参数估计的新方法

郭文艳,任大卫
GUO Wen-yan,REN Da-wei

西安理工大学 理学院,西安 710048
School of Science,Xi'an University of Technology,Xi'an 710048,China
E-mail:wyguoxjtu@163.com

GUO Wen-yan,REN Da-wei.New method of estimating model parameters of modified GM(1,1).Computer Engineering and Applications,2008,44(24):62-64.

Abstract: In order to improve the forecast precision of modified GM(1,1) model,a new parameter estimation formula based on accumulating method to modified GM(1,1) model is proposed.This new method reduces the calculation quantity and complexity because it avoids large numbers of matrix operations.The computation results show that accumulating method modified GM(1,1) model has higher forecast precision than other GM(1,1) model.So the accumulating method modified GM(1,1) model can be applied extensively.

Key words: modified GM(1,1) model;accumulating method;parameter estimation

摘 要: 为了提高新息改进 GM(1,1)模型的预测精度,引入累积法对新息改进 GM(1,1)模型的参数进行估计,给出了新的参数估计公式。该方法避免了大量的矩阵运算,降低了计算量。数值计算结果表明,累积法新息改进 GM(1,1)模型具有很高的预测精度,是一种值得推广的新模型。

关键词: 新息改进 GM(1,1)模型;累积法;参数估计
DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2008.24.017 **文章编号:** 1002-8331(2008)24-0062-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** N941

1 引言

计算模型的参数是灰色系统建模过程的首要任务,传统模型参数的计算方法要进行大量的矩阵运算,导致实际运行时系统的执行效率较低[1],因而设计简洁、高效的参数计算方法是灰色系统建模的关键。

灰生成技术是使灰过程变白的一种方法,能为建模提供中间信息,弱化原始数据的随机性。累加生成是灰色建模的一种主要的生成方法,基于累加生成的累积法是一种新的曲线拟合技术,在经济计量模型的结构参数估计方面有着非常好的效果[2]。本文将累积法引入新息改进 GM(1,1)模型的参数估计之中,给出了新的参数估计公式,计算结果表明,该模型预测精度高,计算量小,是一种值得推广应用的新模型。

2 GM(1,1)模型的参数空间

记 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n-1))$为原始序列,序列 $\boldsymbol{x}^{(0)}$的 GM(1,1)模型定义为:

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \quad k=2,3,\cdots,n-1 \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n-1))$为由 $\boldsymbol{x}^{(0)}$经过一次累加生成的序列,其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$,$k=1,2,\cdots,n-1$,$z^{(1)}=(z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n-1))$表示 $\boldsymbol{x}^{(1)}$的均值生成序列,$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1)+x^{(1)}(k))$,$k=2,3,\cdots,n-1$。令 $C=\sum_{k=2}^{n-1}z^{(1)}(k)$,$D=\sum_{k=2}^{n-1}x^{(0)}(k)$,$E=\sum_{k=2}^{n-1}z^{(1)}(k)x^{(0)}(k)$,$F=\sum_{k=2}^{n-1}(z^{(1)}(k))^2$,则模型(1)参数 a、b 的表达

$$a=\frac{CD-(n-1)E}{(n-1)F-C^2} \quad b=\frac{DF-CE}{(n-1)F-C^2} \tag{2}$$

在 n 时刻,系统收到最新信息 $x^{(0)}(n)$,由于它与预测时间最为接近,从而对系统特征的研究更具价值,记 $\boldsymbol{x}_1^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}\cup\{x^{(0)}(n)\}$,由 $\boldsymbol{x}_1^{(0)}$建立的 GM(1,1)模型称为新息 GM(1,1)模型,该模型的边界条件为$\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$。若将含系统最新信息的条件作为边界条件,即$\hat{x}^{(1)}(n)=x^{(1)}(n)$,有如下新息改进 GM(1,1)模型:

$$\begin{cases} x^{(0)}(k)+a_1z^{(1)}(k)=b_1 & k=2,3,\cdots,n \\ \hat{x}^{(1)}(n)=x^{(1)}(n) \end{cases} \tag{3}$$

其参数 a_1、b_1 的估计为:

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863)(the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.2005AA113150);西安理工大学创新计划(No.108-210602)。
作者简介: 郭文艳(1973-),女,博士生,主要研究方向为灰色理论、数据融合理论及应用;任大卫(1981-),男,主要研究方向为最优化理论。
收稿日期: 2008-03-13 **修回日期:** 2008-04-18

$$a_1=\frac{1}{|D_1|}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)[\beta_1-(n-1)z^{(1)}(k)]$$
$$b_1=\frac{1}{|D_1|}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)[\alpha_1-z^{(1)}(k)\beta_1] \tag{4}$$

其中 $\alpha_1=\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2,\beta_1=\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k),|D_1|=(n-1)\alpha_1-\beta_1^2$。

旧模型(1)和新模型(3)的参数之间有如下关系:

$$D_1=|D|+\sum_{k=2}^{n-1}[z^{(1)}(n)-z^{(1)}(k)]^2 \tag{5}$$

$$a_1=\frac{1}{|D_1|}(|D|a+\sum_{k=2}^{n-1}[x^{(0)}(k)-x^{(0)}(n)][z^{(1)}(n)-z^{(1)}(k)]) \tag{6}$$

$$b_1=\frac{1}{|D_1|}(|D|b+\sum_{k=2}^{n-1}[z^{(1)}(n)-z^{(1)}(k)]\times$$
$$[z^{(1)}(n)x^{(0)}(k)-x^{(0)}(n)z^{(1)}(k)]) \tag{7}$$

3　累积法新息改进GM(1,1)模型的参数空间

累积法是一种基于累加生成技术的新的曲线拟合技术。本章将累积法引入新息改进GM(1,1)模型的参数估计中,给出新的参数估计公式。

对任意的自然数 r,数列$\{x_t\}$,$t=1,2,\cdots,n$ 的 r 阶累积算子为:

$$\sum_{t=1}^{n}{}^{(r)}x_t=\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{t}{}^{(r-1)}x_l \tag{8}$$

当 $x_t\equiv1$ 时,记其 r 阶累积算子 $\sum_{t=1}^{n}{}^{(r)}1$ 为 $\sum_{t=1}^{n}{}^{(r)}$。r 阶累积算子的计算方法为:

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{(r)}x^{(0)}(k)=\sum_{k=1}^{n}C_{n-k+r-1}^{r-1}x^{(0)}(k) \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}{}^{(r)}=C_{n+r-1}^{r-1} \tag{10}$$

为了给出新息改进GM(1,1)模型中参数的累积法估计,首先对模型(3)的第一个方程施加累积算子,假设累积法算子的最高阶数为 r,由于模型的参数有2个,故 r 一定不小于2。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)+a_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)=b_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\\&\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)+a_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k)=b_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\\&\cdots\\&\sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}x^{(0)}(k)+a_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}z^{(1)}(k)=b_1\sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}\end{aligned} \tag{11}$$

记 $\boldsymbol{X}_r=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\\ \sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\\ \vdots & \vdots\\ \sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}z^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Y}_r=\begin{bmatrix}-\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)\\ -\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)\\ \vdots\\ -\sum_{k=2}^{n}{}^{(r)}x^{(0)}(k)\end{bmatrix}$,$\hat{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{b}_1\end{bmatrix}$,

则方程组(11)的矩阵形式为 $\boldsymbol{X}_r\hat{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{Y}_r$,故参数$\hat{\boldsymbol{a}}$的解析解为:

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{X}_r^{-1}\boldsymbol{Y}_r\ \text{或}\ \hat{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_r)^{-1}\boldsymbol{X}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_r \tag{12}$$

实际应用过程中,一般 $\boldsymbol{X}_r^{-1}$ 是存在的,可直接取 $r=2$,此时由Cramer法则,解得累积法新息改进模型的参数表达式为:

$$a_1=\frac{1}{|B_1|}[\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)-\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)] \tag{13}$$

$$b_1=\frac{1}{|B_1|}[\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-$$
$$\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)] \tag{14}$$

其中$|B_1|=\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)$。

同理模型(1)累积法的参数表达式为:

$$a=\frac{1}{|B|}[\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}x^{(0)}(k)-\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(0)}(k)] \tag{15}$$

$$b=\frac{1}{|B|}[\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-$$
$$\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(0)}(k)] \tag{16}$$

其中$|B|=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)$。

公式(13)、(14)的结果完全没有考虑已由模型(1)累积法计算出的参数 a、b 与 a_1、b_1 的关系,从而计算量较大。下面研究累积法GM(1,1)模型的参数与累积法新息改进GM(1,1)模型的参数之间的关系,以便利用已有的计算结果,减少计算量。

定理1 累积法GM(1,1)模型的参数与累积法新息改进GM(1,1)模型的参数之间的关系为:

$$|B_1|=|B|-\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(1)}(k)-\frac{n^2-3n}{2}z^{(1)}(n) \tag{17}$$

$$a_1=\frac{1}{|B_1|}[a-\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(0)}(k)-(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(1)}(k)+$$
$$n\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}x^{(0)}(k)-\frac{n^2+n}{2}x^{(0)}(n)] \tag{18}$$

$$b_1=\frac{1}{|B_1|}[b+x^{(0)}(n)\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-z^{(1)}(n)\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(0)}(k)-$$
$$x^{(0)}(n)\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)] \tag{19}$$

证明 以式(17)为例,由阶累积算子的定义得:

$$\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}+1\quad \sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)+z^{(1)}(n)$$

$$\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}+n\quad \sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k)=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)$$

$$\begin{aligned}|B_1|=&\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)=\\&(\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}+1)(\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k))-\\&(\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}+n)(\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)+z^{(1)}(n))=\\&\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)+\\&\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)-z^{(1)}(n)\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}-\\&n\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}z^{(1)}(k)-nz^{(1)}(n)=\end{aligned}$$

$$|B|-\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}z^{(1)}(k)-\frac{n^2-3n}{2}z^{(1)}(n)$$

同理，由 $\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(0)}(k)=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(1)}x^{(0)}(k)+x^{(0)}(n)$，$\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}x^{(0)}(k)=\sum_{k=2}^{n-1}{}^{(2)}x^{(0)}(k)+\sum_{k=2}^{n}{}^{(1)}x^{(1)}(k)$可证得式(18)、(19)。

4 数值实验

以文献[3]中的经典实例为例，设系统特征数据序列 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(2.874,3.278,3.337,3.39,3.679)$，新息为 $x^{(0)}(6)=3.85$，$\boldsymbol{x}_1^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}\cup\{x^{(0)}(6)\}=(2.874,3.278,3.337,3.39,3.679,3.85)$，则

$$\boldsymbol{x}_1^{(1)}=(2.874,6.152,9.489,12.879,16.558,20.408\,0)$$

$$\boldsymbol{z}_1^{(1)}=(4.513,7.820\,5,11.184,14.718\,5,18.483)$$

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{6}{}^{(1)}z_1^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{6}{}^{(1)}\\ \sum_{k=2}^{6}{}^{(2)}z_1^{(1)}(k) & -\sum_{k=2}^{n}{}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}56.719 & -5\\ 135.319 & -20\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}-\sum_{k=2}^{6}{}^{(1)}x_1^{(0)}(k)\\ -\sum_{k=2}^{6}{}^{(2)}x_1^{(0)}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17.534\\ -51.116\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{X}_2^{-1}\boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}-0.042\,7\\ 3.022\,9\end{bmatrix}$$

建立模型为：

$$x_1^{(0)}(k)-0.042\,7z_1^{(1)}(k)=3.022\,9$$

白化方程为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}-0.042\,7z_1^{(1)}(k)=3.022\,9$$

取$\hat{x}_1^{(1)}(6)=x_1^{(1)}(6)=20.408\,0$，得时间响应函数：

$$x_1^{(1)}(k)=(x_1^{(1)}(n)-\frac{b_1}{a_1})e^{-a_1(k-n)}+\frac{b_1}{a_1}=91.201\,9e^{0.042\,7(k-6)}-70.793\,9$$

令 $k=1,2,3,4,5$，由上面的时间响应函数计算$\hat{x}_1^{(1)}$，再由$\hat{x}_1^{(0)}(k)=\hat{x}_1^{(1)}(k)-\hat{x}_1^{(1)}(k-1)$，取 $k=2,3,4,5,6$，得

$$\hat{x}_1^{(0)}=(2.874\,6,3.213\,8,3.354,3.500\,3,3.654\,8,3.821\,3)$$

表 1 列出了 3 个模型的预测值及误差：

表 1 预测及误差

k	$x_1^{(0)}(k)$	GM(1,1)		新息改进 GM(1,1)		新模型	
		$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	误差/(%)	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	误差/(%)	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	误差/(%)
1	2.874	2.874	0	2.874	0	2.874	0
2	3.278	3.236	1.402	3.212	2.013	3.214	1.959
3	3.337	3.355	0.524	3.353	0.467	3.354	0.509
4	3.390	3.482	2.705	3.499	3.232	3.500	3.253
5	3.679	3.614	1.778	3.653	0.707	3.655	0.658
6	3.850			3.813	0.957	3.821	0.745
原点误差		1.778		0.957		0.745	
平均误差		1.602		1.475		1.425	

由表 1 可知，累积法新息改进 GM(1,1)模型的原点误差和平均误差比新息改进 GM(1,1)模型和 GM(1,1)模型都小，而且 3 个模型中累积法新息改进 GM(1,1)模型的误差最小，预测较近点的精度最高，模型精度也最高。

5 结论

本文将累积法引入新息改进 GM(1,1)模型的参数估计中，给出了新的参数估计公式，并给出了新旧模型参数间的关系。数值计算表明，提出的新模型预测精度高，计算量小，是一种值得推广应用的预测模型。

参考文献：

[1] 肖新平，宋中民，李峰.灰色技术基础及其应用[M].北京：科学出版社，2005：163-172.

[2] 刘树华，邱莞华.多属性决策基础理论研究[J].系统工程理论与实践，1998，20(1)：38-43.

[3] Yeh Jing Feng，Lu Hung Ching.On some of the basic features of GM(1,1) model(1)[J].The Journal of Grey System，1996，8(1)：19-36.

[4] Wu J H，Lau Chi Ren.A study to improve GM(1,1) via heuristic method[J].The Journal of Grey System，1998，10(3)：183-192.

[5] 曾祥艳，肖新平.累积法 GM(2,1)模型及其病态性研究[J].系统工程与电子技术，2006，28(4)：542-544.

[6] 吕林正，吴文江.灰色模型 GM(1,1)优化探讨[J].系统工程理论与实践，2001，21(5)：92-96.

[7] 李俊峰，戴文战.基于插值和 Newton-Cores 公式的 GM(1,1)模型的背景值构造新方法与应用[J].系统工程理论与实践，2004，24(10)：122-126.

[8] 曹定爱，张顺明.累积法引论[M].北京：科学出版社，1999：52-65.

(上接 61 页)

参考文献：

[1] Bucker H P.High-resolution cross-sensor beamforming for a uniform line array[J].Journal of Acoustical Society of America，1978，63(2)：420-424.

[2] Wilson J H.Applications of inverse beamforming theory[J].Journal of Acoustical Society of America，1995，98(6)：3250-3261.

[3] Nuttall A H，Wilson J H.Estimation of the acoustic field directionality by use of planar and volumetric arrays via the Fourier integral method[J].Journal of Acoustical Society of America，1991，90(4)：2004-2019.

[4] van Trees H L.Optimum array processing：part IV of detection，estimation，and modulation theory[M].[S.l.]：Joho Wiley & Sons Inc，2002：718-721.

[5] Kay S M.Modern spectral estimation：theory and application[M].[S.l.]：Prentice Hall，1988：106-118.

[6] Haug A J，Jacyna G M.Theory and analytical performance evaluation of generalized correlation beamformers[J].IEEE Journal of Oceanic Engineering，2000，25(3)：314-330.

[7] Carter G C.Results of an independent analysis of the inverse beamforming for use in the advanced processor build process[J].Letters to the Editor of Acoustical Society of America，2000，107(6)：3564-3567.

[8] Nuttall A H，Wilson J H.Adaptive beamforming at very low frequencies in spatially coherent，cluttered noise environments with low signal-to-noise ratio and finite-averaging times[J].Journal of Acoustical Society of America，2000，108(5)：2256-2265.