

低信噪比条件下的高分辨 DOA 估计算法

王 进, 赵拥军, 王志刚

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

摘要: 提出一种基于多级维纳滤波器(MSWF)的信号波达方向(DOA)估计算法。通过测试信号子空间的估计值与噪声子空间的正交性实现 DOA 粗估计, 通过测试 MSWF 分解的互相关函数实现信号 DOA 的精估计。仿真实验表明, 在低信噪比条件下, 该算法比已有的子空间类算法有更好的分辨率和误差性能。

关键词: 阵列信号处理; 波达方向; 多级维纳滤波; 正交测试

High Resolution DOA Estimation Algorithm with Low SNR

WANG Jin, ZHAO Yong-jun, WANG Zhi-gang

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002)

【Abstract】 A method of estimating Direction Of Arrival(DOA) based on Multistage Wiener Filtering(MSWF) is proposed. Rough estimation of DOA is provided by testing orthogonality between estimated signal subspace and noise subspace and gets more precise results through testing cross-correlation function of MSWF. Simulation shows that the proposed method offers improvements in estimation performance under low SNR condition compared with the previous algorithm.

【Key words】 array signal processing; Direction Of Arrival(DOA); Multistage Wiener Filtering(MSWF); test of orthogonality

1 概述

波达方向估计是阵列信号处理的重要内容, 被广泛应用于通信、雷达、声纳等领域。MUSIC 算法和 ESPRIT 算法是 2 类经典的子空间 DOA 估计算法, 由于其具有适中的计算量和较高的分辨率而得到了广泛应用, 但这种方法在低信噪比和小样本支撑条件下会有较大的估计误差, 并且在信号相关时性能会受到很大的影响。相比而言, 最大似然法类算法有最优的估计性能, 但需要进行多维的非线性优化, 不利于实际应用。文献[1]提出了一种采用辅助矢量滤波技术的 AV 算法, 表现出比子空间类算法更好的高分辨特性。但 AV 算法在搜索角度步长不同时会影响谱特性, 甚至影响信号 DOA 估计。这个缺点使 AV 算法只适合于信号分辨而无法进一步提高搜索精度来实现信号 DOA 的精确估计。针对这一问题, 由多级维纳滤波(MSWF)与辅助滤波的等价性^[2], 本文从 MSWF 分解的角度提出了一种新算法。算法在信号可能入射方向用 MSWF 估计信号子空间, 并在 MSWF 分解后互相关函数最小以及信号子空间估值与噪声子空间正交时判定估计有效, 进而构造空间谱来实现信号 DOA 估计。算法克服了 AV 算法的缺点, 在低信噪比条件下, 以增加少量计算量为代价获得了比 MUSIC 等子空间类算法更好的谱分辨率和估计精度。本文给出了信号 DOA 估计的数学模型和 MSWF 快速子空间分解的原理, 提出了基于 MSWF 的 DOA 估计算法原理, 并进一步给出了信号相关时的算法改进措施和计算复杂度分析, 最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

2 信号模型

假设有 P 个独立窄带信源 $s_p(t)$, $p=1,2,\dots,P$, 随机分布在阵列的远场, 分别以方向 θ_p , $p=1,2,\dots,P$, 入射到阵元数为 M 的均匀线阵, 则阵列接收到的 M 维观测数据矢量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_M)$ 可表示为

$$X(t) = \sum_{p=1}^P a(\theta_p) \times s_p(t) + n(t) \quad (1)$$

其中, $n(t)$ 为随机噪声。由于阵列为均匀线阵, 因此阵列导向矢量 $a(\theta)$ 为

$$a(\theta) = [1 \quad Z(\theta) \cdots Z(\theta)^{M-1}]^T \quad (2)$$

其中, $z(\theta) = e^{-j2\pi d \sin \theta / \lambda}$, d 为阵元间隔, λ 为波长。对观测数据在 $k = 0, 1, \dots, K-1$ 时刻采样, 则式(1)表示为

$$X(k) = \sum_{p=1}^P a(\theta_p) \times s_p(k) + n(k) \quad (3)$$

设噪声为均值为零的空时均白的复圆高斯随机过程, 则 $X(k)$ 也是空间白的复圆高斯随机过程, 波达方向估计问题为从观测数据矢量 $\{X(k), k=1,2,\dots,K-1\}$ 中估计信号入射方向参数 $\{\theta_p, p=1,2,\dots,P\}$ 。

3 MSWF 快速子空间分解原理

基于子空间分解的阵列高分辨率算法需要对阵列协方差矩阵作特征分解, 计算复杂度很大。Goldstein 等人提出的 MSWF 通过正交分解进行降维处理, 采用压缩信号子空间的方法来估计信号空间谱, 有效降低了计算量。然而, MSWF 只有在参考矢量满足一定条件下, 才能有效的估计信号子空间。由 MSWF 与 Krylov 子空间的关系, 可以推导出参考矢量所应满足的条件。

根据多级维纳滤波器理论^[3-4], 降维矩阵 $T = [h_1, h_2, \dots, \sum_{i=1}^{P-1} B_i h_p]$ 列矢量相互正交时, P 级 MSWF 等同于 Wiener-Hopf 方程:

$$R w_{WF} = r_{Xd} \quad (4)$$

作者简介: 王 进(1977—), 男, 博士研究生, 主研方向: 阵列信号处理, 雷达信号处理; 赵拥军, 教授; 王志刚, 教授、博士生导师
收稿日期: 2008-06-25 **E-mail:** jackwangjin@sina.com

在 P 维 Krylov 子空间 $K^{(P)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_{Xd})$ 的解。由匹配滤波器的正交性， $\mathbf{T} = \mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$ 构成了 $K^{(P)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_{Xd})$ 的一组正交基。

根据式(3)所示模型，信号的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_N = \mathbf{E}_S\mathbf{A}_S\mathbf{E}_S^H + \sigma^2\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H \quad (5)$$

其中， \mathbf{E}_S 为信号子空间，由协方差矩阵 \mathbf{R} 的 P 个最大特征值对应的特征矢量 $[e_1, e_2, \dots, e_p]$ 张成；矩阵 \mathbf{A}_S 是对角线元素为 P 个最大特征值的对角阵； σ^2 为噪声方差； \mathbf{E}_N 为噪声子空间。由式(5)有

$$\mathbf{R} - \sigma^2\mathbf{I}_M = \mathbf{E}_S\mathbf{A}_S\mathbf{E}_S^H + \sigma^2\mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H - \sigma^2\mathbf{I}_M = \mathbf{E}_S(\mathbf{A}_S - \sigma^2\mathbf{I}_S)\mathbf{E}_S^H = \mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S\mathbf{E}_S^H \quad (6)$$

根据 Krylov 子空间的性质有^[5-6]：

$$\mathbf{K}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{f}) = \mathbf{K}^{(M)}(\mathbf{R} - \sigma^2\mathbf{I}_M, \mathbf{f}) = \mathbf{K}^{(M)}(\mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S\mathbf{E}_S^H, \mathbf{f}) \quad (7)$$

从上式可以看出，当 \mathbf{f} 可以包含于信号子空间时，即：

$$\mathbf{f} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_p\mathbf{e}_p \quad (8)$$

其中， $\alpha_p, p=1, 2, \dots, P$ 不同时为 0，此时设 $\mathbf{K}^{(P)}(\mathbf{R}, \mathbf{f})$ 的一组正交基为 $\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$ ，则存在非奇异阵 $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{P \times P}$ 使得：

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{K}^{(P)}(\mathbf{R}, \mathbf{f})\mathbf{T} = \\ &= \mathbf{K}^{(P)}(\mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S\mathbf{E}_S^H, \mathbf{f})\mathbf{T} = \\ &= \left[(\mathbf{E}_S\mathbf{E}_S^H + \mathbf{E}_N\mathbf{E}_N^H)\mathbf{f}, \mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S\mathbf{E}_S^H\mathbf{f}, \dots, \mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S^{K-1}\mathbf{E}_S^H\mathbf{f} \right]\mathbf{T} = \\ &= \left[\mathbf{E}_S\mathbf{E}_S^H\mathbf{f}, \mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S\mathbf{E}_S^H\mathbf{f}, \dots, \mathbf{E}_S\bar{\mathbf{A}}_S^{K-1}\mathbf{E}_S^H\mathbf{f} \right]\mathbf{T} = \\ &= \mathbf{E}_S\mathbf{K}^{(P)}(\bar{\mathbf{A}}_S, \mathbf{E}_S^H\mathbf{f})\mathbf{T} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)推导过程中利用了信号子空间矢量和噪声子空间的正交特性。而 $\mathbf{K}^{(P)}(\bar{\mathbf{A}}_S, \mathbf{E}_S^H\mathbf{f})\mathbf{T}$ 为秩为 P 的列满秩矩阵，则 $\mathbf{K}^{(P)}(\mathbf{R}, \mathbf{f})$ 的正交基 \mathbf{H} 张成了信号子空间。 $\mathbf{K}^{(M)}(\mathbf{R}, \mathbf{f})$ 为 P 维子空间，即

$$\text{span}([f, \mathbf{R}f, \dots, \mathbf{R}^{M-1}f]) = \text{span}([f, \mathbf{R}f, \dots, \mathbf{R}^{P-1}f]) \quad (10)$$

因此，适当选择参考信号，则可以通过 P 级 MSWF 分解估计信号子空间。

4 基于 MSWF 的 DOA 估计算法

4.1 算法基本原理

由上节的分析可知，MSWF 是一种快速子空间分解方法，一种直接推广到 DOA 估计的方法就是用 MSWF 分解替换子空间类方法的特征分解过程^[6-8]。然而，这些方法只能接近原有特征子空间算法的性能。本文采用另一种方法来运用 MSWF，首先通过建立与信号入射角度相关的参考信号，通过比较不同参考信号条件下信号子空间估计的有效性实现 DOA 粗估计，进一步利用 MSWF 冗余分解级的互相关函数值构造空间谱来实现精估计。

在信号可能入射方向 θ_i ，定义初始期望信号

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{a}(\theta_i)^H \mathbf{X} \quad (11)$$

则初始期望信号和初始观测数据的互相关函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Xd}^{(0)} &= \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{d}^{(0)H}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^H)\mathbf{a}(\theta_i) = \\ &= \mathbf{A}(\theta)R_S\mathbf{A}(\theta)^H\mathbf{a}(\theta_i) + \sigma^2\mathbf{a}(\theta_i) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{C} + \sigma^2\mathbf{a}(\theta_i) \end{aligned} \quad (12)$$

其中， $\mathbf{C} = R_S\mathbf{A}(\theta)^H\mathbf{a}(\theta_i)$ 为 $P \times 1$ 矢量。阵列流型 $\mathbf{A}(\theta)$ 张成的子空间为信号子空间，则由式(12)可知，当 $\theta_i = \theta_p, p=1, 2, \dots, P$ 时， \mathbf{r}_{Xd} 为信号子空间矢量，此时 P 级 MWSF 就可以完全估计信号子空间；当 $\theta_i \neq \theta_p, p=1, 2, \dots, P$ 时，信号子空间扩散到了 h_{p+1} ，大于 P 级的 MWSF 才能完全估计信号子空间。

因此，可以进一步推出当 $\theta_i = \theta_p, p=1, 2, \dots, P$ 时：

(1) P 级 MWSF 的观测数据和参考信号的互相关函数矢量

范数为 0。定义互相关函数为 h' ，则：

$$\|\mathbf{h}'\| = \|\mathbf{E}(\mathbf{X}^{(P)}\mathbf{d}^{(P)H})\| = 0 \quad (13)$$

(2) P 级 MWSF 估计的信号子空间与噪声子空间正交。

$\mathbf{H}^{(P)} = [h_1, h_2, \dots, h_p]$ 张成估计的信号子空间，则：

$$\|\mathbf{D}\| = \|(\mathbf{H}^{(P)})^H \times \mathbf{E}_N\| = 0 \quad (14)$$

则可以定义 2 个空间谱表达式：

$$P_1 = \frac{1}{\|\mathbf{h}'\|} \quad (15)$$

$$P_2 = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|} \quad (16)$$

对空间谱 P_1 和 P_2 中的任何一个进行谱峰搜索都可以实现信号 DOA 的估计。对 P_1 进行搜索，则其有着与 AV 算法类似的性能，不同的是 AV 算法有更好的伪峰抑制能力，而 P_1 搜索算法对相邻信号有更好的谱分辨能力和估计精度，且不受搜索步长影响；对 P_2 搜索，则算法是与 MUSIC 算法类似的噪声子空间算法，MUSIC 算法在高信噪比条件下有更尖锐的谱峰，而 P_2 搜索算法则在低信噪比条件下有更好的性能； P_1 搜索和 P_2 搜索两种算法相比， P_1 搜索有更高的精度但存在伪峰， P_2 搜索能有效抑制伪峰但性能略差。因此，用 P_2 实现 DOA 的粗略估计，用 P_1 实现 DOA 的精确估计可以获得更好的性能。

综上所述可以得到算法的实现步骤：

(1) 由式(11)和式(12)确定 MSWF 的初始参考信号和初始互相关函数；

(2) 用多级维纳滤波器做 P 级分解，估计信号子空间正交基，迭代公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0 &= \frac{\mathbf{r}_{Xd}^{(0)}}{\|\mathbf{r}_{Xd}^{(0)}\|_2} \quad (17) \\ \mathbf{h}_i &= \frac{(\mathbf{I} - \sum_{q=0}^{i-1} \mathbf{h}_q \mathbf{h}_q^H) \mathbf{R} \mathbf{h}_{i-1}}{\left\| (\mathbf{I} - \sum_{q=0}^{i-1} \mathbf{h}_q \mathbf{h}_q^H) \mathbf{R} \mathbf{h}_{i-1} \right\|_2} \quad i=1, 2, \dots, P \end{aligned} \quad (18)$$

(3) 计算 \mathbf{D} ，并由式(16)求空间谱 P_2 ，搜索谱峰得到 DOA 的粗略估计；

(4) 计算 h' ，由式(15)求空间谱 P_1 ，利用 DOA 粗略估计确定搜索区域，搜索谱峰得到信号的 DOA 精估计 $\{\hat{\theta}_p, p=1, 2, \dots, P\}$ 。

4.2 信号相关时的算法改进

当信号相关时，阵列协方差矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{R}) < P$ ，即部分信号子空间扩散到了噪声子空间，此时 P 级估计得到的信号子空间与噪声子空间无法完全正交。此时，与相关信号的音乐算法类似，可以采用双向空间平滑技术。定义数据选择矩阵

$$\mathbf{Z}_q = [0_{m \times (q-1)} \mid \mathbf{I}_{m \times m} \mid 0_{m \times (M-m-q+1)}] \quad (19)$$

$$\mathbf{Q}_q = [0_{m \times (q-1)} \mid \mathbf{J}_{m \times m} \mid 0_{m \times (M-m-q+1)}] \quad (20)$$

其中， $\mathbf{J}_{m \times m}$ 为反对角线为 1 的置换矩阵。令：

$$\mathbf{X}_k^f = \mathbf{Z}_k \mathbf{X} \quad (21)$$

$$\mathbf{X}_k^b = \mathbf{Q}_k \mathbf{X}^* \quad (22)$$

由式(12)构造双向平滑后的互相关函数：

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_{Xd}^{(0)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{Xd}^f + \mathbf{r}_{Xd}^b) = \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{q=1}^{M-m+1} \{ \mathbf{E}[\mathbf{X}_q^f \mathbf{X}_q^{fH} \mathbf{a}(\theta_i)^H] + \mathbf{E}[\mathbf{X}_q^b \mathbf{X}_q^{bH} \mathbf{a}(\theta_i)^H] \} \end{aligned} \quad (23)$$

其中， m 为子阵阵元数。用 $\bar{\mathbf{r}}_{Xd}^{(0)}$ 替换式(12)中的初始互相关函

数 $r_{Xd}^{(0)}$ 求解空间谱, 则可以得到基于双向空间平滑的改进算法。事实上, 式(12)中的 $r_{Xd}^{(0)}$ 可用另一种方式表示:

$$r_{Xd}^{(0)} = E(Xd^{(0)H}) = E(XX^H)a(\theta_i) = Ra(\theta_i) \quad (24)$$

式(24)表明, 已经成功应用于 MUSIC 等子空间类算法的各类去相关技术可以很容易推广到本算法, 只需去相关后的协方差矩阵替换 R 就可获得相应的去相关性。

4.3 复杂度的计算

用 MSWF 估计 1 次 $H^{(P)}$ 和 h' 的运算量为 $O(M^2(P+1))$, 如果采用均匀角度搜索的方式, 设角度间隔为 δ_θ , 观测区域为 Θ , 则算法的运算量约为 $O((\Theta/\delta_\theta)M^2(P+1)+M^2P)$; 对 MUSIC 和 ESPRIT 算法, 1 次完整的特征分解的计算量约为 $O(M^3)$ 。从计算复杂度看, 本文算法更适用于在阵元数 M 较大或是信号相距很近时。

可以看出, 本文算法的复杂度受角度间隔 δ_θ 和观测区域 Θ 影响很大。对于均匀间隔的角度搜索方式, 在观测区域不变的条件下, δ_θ 越小, 估计精度越高, 计算量越大; δ_θ 增大, 计算量变小, 但估计精度变差。一种能以较小计算量获得较高估计精度的搜索实现方法是:

(1)用较大的 δ_θ 构造空间谱, 搜索谱峰得到 DOA 的粗略估计 $\theta^{(0)} = \{\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)}\}$;

(2)定义新的观测区域 $\Theta^{(q)}$ 为

$$\Theta^{(q)} = [\theta_1^{(q)} - \delta^{(q)}, \theta_1^{(q)} + \delta^{(q)}] \cup \dots \cup [\theta_p^{(q)} - \delta^{(q)}, \theta_p^{(q)} + \delta^{(q)}];$$

(3)缩小角度搜索间隔, 定义新的搜索间隔 $\delta_\theta^{(q)} = \delta_\theta^{(q-1)} / \lambda$, 再搜索谱峰得到更为精细的估计;

(4)重复(2)直至 DOA 估计精度满足要求。

采用上述搜索策略可以有效降低算法计算复杂度。

5 仿真实验

考虑阵元数为 20 的均匀线阵, 独立信号由 $\theta_1 = 1^\circ$ 和 $\theta_2 = -1^\circ$ 入射, 采样快拍数为 256, 信噪比为 -5 dB, 图 1~图 4 为不同算法的信号空间谱对比。本文算法的角度搜索步长为 0.01° 。MUSIC 算法只有一个谱峰, 无法分辨出 2 个信号。AV 算法分辨性能与搜索步长有关, 当步长为 1° 时能成功分辨出 2 个信号; 当步长变为 0.1° 时, 信号分辨性能变差且出现伪峰; 当步长变为 0.01° 时, 无法分辨出 2 个信号。而本文算法中的空间谱 P_1 有很好的分辨性能, 但却存在很多伪峰; 而空间谱 P_2 也有良好的分辨性能, 但精度较空间谱 P_1 略差。

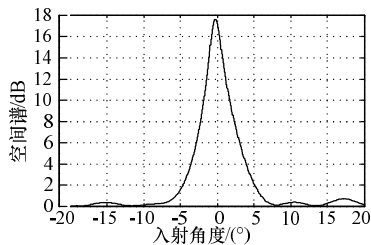


图 1 MUSIC 算法

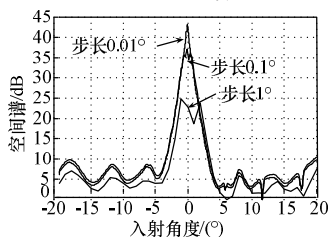


图 2 AV 算法

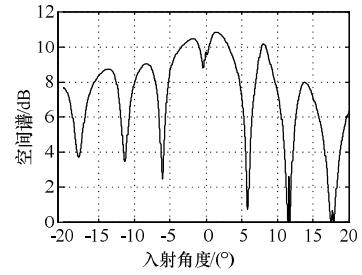


图 3 本文算法的空间谱 P_1

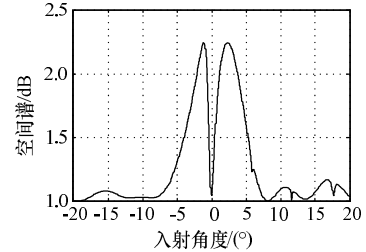


图 4 本文算法的空间谱 P_2

仿真条件不变, 进行 200 次独立实验, 测试不同算法在不同信噪比条件下的性能。其中, 定义入射信号 DOA 估计值同时满足 $|\hat{\theta}_1 - \theta_1| < |\theta_1 - \theta_2|/2$, $|\hat{\theta}_2 - \theta_2| < |\theta_1 - \theta_2|/2$ 时, 算法能成功分辨信号, 则图 5~图 8 给出了信号不相关时不同算法的性能比较。在信噪比较高时, 几种算法的性能几乎没有差别, 但在低信噪比条件下, 本文算法有着更好的性能。

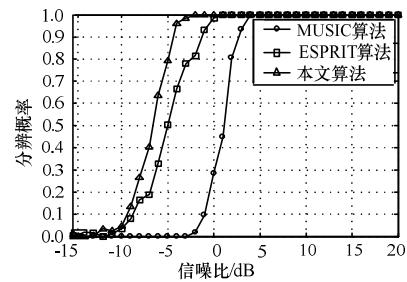


图 5 分辨概率对比

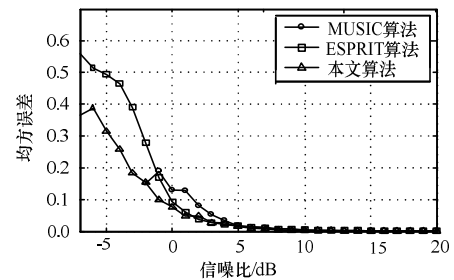


图 6 均方误差对比

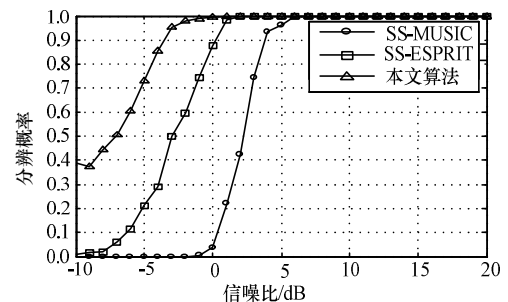


图 7 分辨概率对比

(下转第 102 页)