

# 基于向量内积的机器人实时逆解算法<sup>\*</sup>

刘华山 朱世强 吴剑波 刘松国

(浙江大学流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

**【摘要】** 为提高6R机器人逆运动学求解算法的实时性,提出了一种基于向量内积变换的实时高效逆运动学求解算法。将复杂的矩阵方程转换为含有6个未知关节变量的10个纯代数逆运动学方程,并在方程的简化过程中引入符号运算预处理,避免了大量浮点运算带来累积误差。通过相关方程的优化线性组合,有效避免了5、6两关节变量求解时产生增根的情况,大幅提高了逆解算法的效率。试验结果表明,同等求解精度要求下该逆解算法相比于其他算法具有更强的实时性,得到精确的8组封闭解平均仅需0.014 ms,能满足机器人的在线控制要求。

**关键词:** 机器人 逆运动学 向量内积 算法

**中图分类号:** TP242.2 **文献标识码:** A

## Real-time Inverse Kinematics Algorithm Based on Vector Dot Product

Liu Huashan Zhu Shiqiang Wu Jianbo Liu Songguo

(State Key Lab of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

### Abstract

In order to improve the real-time performance of inverse kinematics for 6R robots, a real-time and efficient algorithm based on vector dot product was proposed. The complex matrix equations were transformed to 10 pure algebraic equations containing 6 unknown joint variables, and symbolic preprocessing was applied in simplifying equations without any error accumulations caused by floating-point calculations. The production of extraneous roots in the solving process of the 5th and 6th joint variables was avoided by optimizing the linear combinations of related equations, which greatly improved the efficiency of the algorithm. Experiments on a 6R robot show that, the proposed algorithm has a stronger real-time performance than those of others to get the same precision solutions, the average time for gaining 8 accurate closed-form solutions is only 0.014 ms, and it can be applied efficiently in the practical on-line robot control.

**Key words** Robot, Inverse kinematics, Vector dot product, Algorithm

### 引言

机器人逆运动学中,已知基于Pieper准则的6R机器人末端位姿和D-H参数逆向求解各个关节变量,可得到8组封闭解。机器人逆运动学求解算法的实时性直接影响运动轨迹控制效果,在强实时在线控制系统中尤为明显。逆运动学方程具有多种求解方法,如反变换法、几何法、Pieper法等<sup>[1~3]</sup>。其

中,反变换法因其求解过程直观而被广泛采纳,但其在求解中需多次重复计算不同齐次变换矩阵的逆,并进行 $4 \times 4$ 维矩阵相乘,使得求解过程复杂耗时。Tsai和Morgan率先提出了在逆运动学求解过程中引入向量运算以简化求解过程,但其需要引入新的矩阵而导致计算冗长复杂<sup>[4]</sup>。文献[5]在文献[4]的基础上提出了一种构造4个基本方程和4个辅助方程的逆解算法,但其在求解6R机器人的5、6两

关节变量时得到含有8个增根的16个解,且忽略了各关节角的实际相位区间调整,验证增根和对最终8组解的匹配严重影响了算法效率。本文在文献[4]的基础上,以基于Pieper准则的6R机器人为研究对象,重新构造包含6个未知关节变量的10个常系数方程,经过方程组优化组合,有效避免5、6两关节变量求解出现增根的情况,并在纯代数方程简化过程中,引入符号运算预处理,消除计算过程中的累积误差,提高计算效率和精度,并根据实际情况对各关节角的相位区间进行调整。

## 1 逆运动学方程

通过D-H方法建立6R机器人转动连杆坐标系,相邻两杆件的坐标变换矩阵为

$${}_{i-1}^{-1}T = \begin{bmatrix} c_i & -s_i\tau_i & s_i\sigma_i & a_i c_i \\ s_i & c_i\tau_i & -c_i\sigma_i & a_i s_i \\ 0 & \sigma_i & \tau_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{p}_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (1)$$

其中  $s_i = \sin\theta_i$   $c_i = \cos\theta_i$   $\sigma_i = \sin\alpha_i$   $\tau_i = \cos\alpha_i$   
 式中  $a_i$ ——连杆长度  $d_i$ ——两连杆距离  
 $\mathbf{R}_i$ —— $3 \times 3$  维旋转矩阵  
 $\mathbf{p}_i$ —— $3 \times 1$  维位置向量

由此可得到机器人逆运动学矩阵方程为

$${}^0T = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  ${}^0T$ ——6个关节变量函数,包含法向矢量  $\mathbf{n}$ , 方位矢量  $\mathbf{o}$ , 接近矢量  $\mathbf{a}$  和位置矢量  $\mathbf{p}$

## 2 向量内积

对于任意的  $n \times n$  维正交矩阵  $\mathbf{A}$ , 任意  $n$  维向量  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$  和常数  $\lambda$ , 有如下性质

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ (\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v}$$

不难证明旋转矩阵  $\mathbf{R}_i$ 、 $\mathbf{R}_i^{-1}$  和  $\mathbf{R}_i^T$  均为正交矩阵,且满足以上性质。

## 3 算法实现

### 3.1 方程重构

根据式(2)中的12个非线性方程,通过向量内积运算,得到含有6个关节位置变量的10个常系数

非线性向量方程

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 \quad (3)$$

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \quad (4)$$

$$a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \quad (5)$$

$$a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{R}\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \quad (6)$$

$$p_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \quad (7)$$

$$p_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \quad (8)$$

$$p_z = \mathbf{p} \cdot \mathbf{z} \quad (9)$$

$$n_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (10)$$

$$n_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (11)$$

$$n_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{R}\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{x} = [1, 0, 0]^T$   $\mathbf{y} = [0, 1, 0]^T$   $\mathbf{z} = [0, 0, 1]^T$   
 由式(1)和(2)可得

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_1 \{ \mathbf{R}_2 [ \mathbf{R}_3 ( \mathbf{R}_4 ( \mathbf{R}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_5 ) + \mathbf{p}_4 ) + \mathbf{p}_3 ] + \mathbf{p}_2 \} + \mathbf{p}_1 \quad (13)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{R}_6 \quad (14)$$

### 3.2 方程简化

以  $a_x$  和  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$  方程的化简过程为例,利用向量内积性质,可得

$$a_x = \mathbf{R}\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}) = \\ \mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}_6^{-1} \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{x}) = \\ \mathbf{z} \cdot (\mathbf{R}_6^T \mathbf{R}_5^T \mathbf{R}_4^T \mathbf{R}_3^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \mathbf{x}) \quad (15)$$

由式(13)得

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 ( \mathbf{p}_6 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{p}_5 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{p}_4 + \\ \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{p}_3 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{p}_2 + \\ \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{p}_1 )$$

令  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5$ , 则  $\mathbf{R}'$  亦为正交矩阵。

令

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_6 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{p}_5 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{p}_4 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{p}_3 + \\ \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_5^{-1} \mathbf{R}_4^{-1} \mathbf{R}_3^{-1} \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{p}_1$$

此时有

$$|\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = (\mathbf{R}'\mathbf{p}') \cdot (\mathbf{R}'\mathbf{p}') = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'$$

进一步化简得

$$|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_2|^2 - |\mathbf{p}_3|^2 - |\mathbf{p}_4|^2 - |\mathbf{p}_5|^2 - |\mathbf{p}_6|^2 = \\ 2[ \mathbf{p}_6 \cdot (\mathbf{R}_5^T \mathbf{p}_5) + (\mathbf{R}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{p}_5) \cdot (\mathbf{R}_4^T \mathbf{p}_4) + \\ (\mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{R}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{p}_4) \cdot (\mathbf{R}_3^T \mathbf{p}_3) + \\ (\mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{R}_3 \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_3) \cdot (\mathbf{R}_2^T \mathbf{p}_2) + \\ (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{R}_5 \mathbf{p}_6 + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_4 \mathbf{p}_5 + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \mathbf{p}_4 + \\ \mathbf{R}_2 \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{R}_1^T \mathbf{p}_1) ] \quad (16)$$

式(5)~(12)可参照上述方式利用向量内积性质进行化简。

### 3.3 关节变量求解

通过式(3)、(7)、(8)和式(9)可求得前3个关节角位置变量  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  的4组解;对应于这4组解中

的每一组,通过式(4)~(6)可求出  $\theta_4$  各 2 个解,此时封闭解的数量已达到 8 组。

需要特别说明的是,计算  $\theta_5$  时通过式(4)~(6)中的任意一个方程式均可实现,但是此时容易出现增根,且增根的数目多达 8 个<sup>[5]</sup>,要排除增根,并将符合条件的解与前面计算  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  和  $\theta_4$  时已经得到的 8 组解相匹配,将是一个非常复杂的任务,也极大地影响了算法的效率。本算法中,经过优化组合式(4)~(6) 3 个方程,可以完全避免出现增根的情况,并同理通过式(10)~(12)求得  $\theta_6$ 。

算法中反复利用向量内积性质,将所有的求逆矩阵变换为转置矩阵,优先选择与向量相关的乘法,方程的简化和求解过程简单高效。下面通过实例具体阐述本算法的求解过程。

## 4 实例求解

### 4.1 符号运算

为避免在求解各关节角的过程中产生积累误差,并提高方程式简化效率,实例求解中引入 MAPLE 软件对方程进行符号运算预处理<sup>[6]</sup>。在某些离线控制场合,还可在 MAPLE 环境中通过设置 digitis 参数得到几乎任意可调精度的计算结果。

以自主研发的钱江一号 6R 机器人为例,给定 D-H 参数如表 1 所示,其连杆坐标系如图 1 所示。

表 1 6R 机器人 D-H 参数

Tab.1 D-H parameters of the 6R robot

关节	$\theta_i$	$d_i/\text{mm}$	$a_i/\text{mm}$	$\alpha_i/(\circ)$
1	$\theta_1$	250	150	-90
2	$\theta_2$	0	550	0
3	$\theta_3$	0	160	-90
4	$\theta_4$	594	0	90
5	$\theta_5$	0	0	90
6	$\theta_6$	0	0	0

经过符号运算预处理,由式(15)得

$$a_x = (c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) s_5 + c_1 s_{23} c_5 \quad (17)$$

其中  $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$   $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$

式(5)~(12)参照上述化简得

$$a_y = (s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) s_5 + s_1 s_{23} c_5 \quad (18)$$

$$a_z = -s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5 \quad (19)$$

$$p_x = c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2 + a_1 - d_4 s_{23}) \quad (20)$$

$$p_y = s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2 + a_1 - d_4 s_{23}) \quad (21)$$

$$p_z = -d_4 c_{23} - a_3 s_{23} - a_2 s_2 + d_1 \quad (22)$$

$$n_x = (c_1 c_{23} c_4 c_5 + s_1 s_4 s_5 - c_1 s_{23} s_5) c_6 + (c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) s_6 \quad (23)$$

$$n_y = (s_1 c_{23} c_4 c_5 - c_1 s_4 c_5 - s_1 s_{23} s_5) c_6 + (s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) s_6 \quad (24)$$

$$n_z = -(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5) c_6 - s_{23} s_4 s_6 \quad (25)$$

由图 1 和表 1 均可知,确定机器人姿态的第 4、5、6 关节轴线交于一点,从而得到  $p_5$  和  $p_6$  均为零。通过式(16)可化简得

$$|p|^2 - a_1^2 - d_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2 = 2[a_2(a_3 c_3 - d_4 s_3) + a_1(-d_4 s_{23} + a_2 c_2 + a_3 c_{23}) - d_1(d_4 c_{23} + a_2 s_2 + a_3 s_{23})] \quad (26)$$

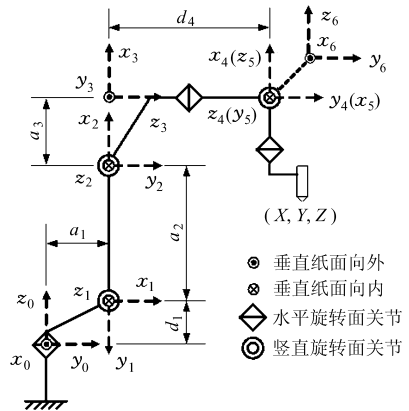


图 1 6R 机器人连杆坐标系

Fig.1 Link-pole coordinate system of 6R robot

### 4.2 求解反三角函数

在具体求解各关节角的过程中,涉及到反三角函数的求解。为得到分布于 4 个象限中的全部解,引入  $\arctan 2(y, x)$  函数<sup>[7]</sup>。相比于  $\arctan$  函数解的区间  $[-0.5\pi, 0.5\pi]$ ,  $\arctan 2(y, x)$  可将区间扩大至  $[-\pi, \pi]$ , 此时得到的反正切值需根据点  $(x, y)$  所在的象限来确定。

对于一元方程  $a \sin \theta + b \cos \theta = c$  (其中  $a, b, c$  均为常数), 当  $a^2 + b^2 > c^2$  时,  $\theta$  总有 2 个解 (仅当  $a^2 + b^2 = c^2$  时有唯一解)

$$\theta = \arctan 2(d, \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}) - \arctan 2(b, a)$$

这会加大求解各关节角时出现增根的可能性。但是发现,如果  $\sin \theta = m, \cos \theta = n$  (其中  $m, n$  均为常数), 关节变量  $\theta$  的解则变为唯一

$$\theta = \arctan 2(n, m) \quad (27)$$

基于此特点,在求解  $\theta_5$  和  $\theta_6$  时,通过优化与待求关节变量相关的非线性方程式的线性组合,可得到式(27)所述形式,即

$$\sin \theta_5 = f_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \quad (28)$$

$$\cos \theta_5 = g_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \quad (29)$$

$$\sin \theta_6 = f_6(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) \quad (30)$$

$$\cos \theta_6 = g_6(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) \quad (31)$$

此时,  $f_5, g_5, f_6, g_6$  均为已求解关节变量  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  的常值函数。然后再分别利用式(27)求

解,即可避免产生增根。

在求解时还应注意由于机械结构限位或操作空间限制等原因引起的关节角相位限制。针对该情况可先将关节角求解区间范围适当放宽至能够涵盖 4 个象限,然后再在求得的 8 组逆解中进行区间筛选。

### 4.3 求解步骤

由式(20)、(21)求得  $\theta_1$  的 2 个解;联立式(20)、(21)和式(26)求得  $\theta_3$  的 4 个解;此时,再通过式(20)和式(22)可解得与  $\theta_3$  相对应的  $\theta_2$  的 4 个解。

在联立式(17)~(19)求取  $\theta_4$  时,应注意判断机器人是否处于奇异形位(即  $s_5=0$  的情况)。因为此时 6R 机器人的第 4 和第 6 关节轴重合, $\theta_4$  的值可以任意选取。当机器人处于非奇异状态(即  $s_5 \neq 0$ )时,可得到  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  的 8 组逆解组合,然后再分别联合式(17)~(19)和式(23)~(25)求解  $\theta_5$  和  $\theta_6$ 。

### 4.4 优化方程组线性组合

以  $\theta_5$  为例,说明如何通过优化线性组合得到式(28)和式(29)所示方程形式。

$$\begin{aligned} \text{令} \quad A &= c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & B &= c_1 s_{23} \\ C &= s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & D &= s_1 s_{23} \\ E &= -s_{23} c_4 & F &= c_{23} \end{aligned}$$

式中  $A, C$ ——已求变量  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  的常值函数  
 $B, D$ ——已求变量  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  的常值函数  
 $E$ ——已求变量  $\theta_2, \theta_3$  和  $\theta_4$  的常值函数  
 $F$ ——已求变量  $\theta_2$  和  $\theta_3$  的常值函数

线性组合式(17)~(19)可得

$$s_5 = Aa_x + Ca_y + Ea_z = f_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

$$c_5 = Ba_x + Da_y + Fa_z = g_5(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$$

此时,利用式(27)便可求得  $\theta_5$  唯一解,有效避免了产生 8 个增根的情况。

同理,通过线性组合式(23)~(25)可求得关节

变量的唯一解。至此,就得到了钱江一号 6R 机器人的全部 8 组封闭解。增根的避免使得算法在进行程序实现时减少了根的验证和匹配环节,为算法的强实时性奠定了基础。

## 5 试验和仿真

### 5.1 算法的实时性

给定机器人末端位姿矩阵

$${}^0T = \begin{bmatrix} 0.140 0 & 0.305 3 & 0.941 9 & 309.866 4 \\ 0.488 6 & 0.806 1 & -0.333 9 & 54.637 8 \\ -0.861 2 & 0.506 9 & -0.036 4 & -442.494 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过本文算法得到各关节角的工作区间和求解区别限定如表 2 所示,8 组运动学逆解如表 3 所示。各组运动学逆解对应的机器人姿态仿真如图 2 所示。经代入机器人正运动学方程计算验证,各组解均正确无误。其中 3、4 组解位于机器人实际工作区间内,在选取最佳逆解时应从这 2 组逆解中结合相关寻优条件(如行程最短原则等)加以筛选。

表 2 各关节角变量区间

关节变量	求解区间/(°)	工作区间/(°)
$\theta_1$	$[-90, 270)$	$(-80, 260)$
$\theta_2$	$(-270, 90]$	$(-170, 80)$
$\theta_3$	$(-270, 90]$	$(-260, 80)$
$\theta_4$	$(-180, 180]$	$(-180, 180)$
$\theta_5$	$(-180, 180]$	$(-140, 140)$
$\theta_6$	$(-180, 180]$	$(-180, 180)$

以钱江一号 6R 机器人为控制对象,在 XOY 平面工况下,对如图 3 所示的半径为 150 mm 的圆实施运动轨迹控制。

先将圆弧在笛卡尔空间中分为 600 组离散的

表 3 8 组逆运动学解

Tab.3 8 solutions of inverse kinematics

序号	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
1	10.000 011 44	-226.748 473 39	-179.849 201 66	40.767 655 57	131.055 680 82	2.137 169 39
2	10.000 011 44	-226.748 473 39	-179.849 201 66	-139.232 344 43	-131.055 680 82	-177.862 830 61
3	10.000 011 44	20.000 019 96	30.000 014 19	40.000 001 18	49.999 965 06	60.000 018 82
4	10.000 011 44	10.000 019 96	30.000 014 19	-139.999 998 82	-49.999 965 06	-119.999 981 18
5	190.000 011 44	-188.620 016 45	-163.696 093 32	-150.117 960 04	98.760 470 22	26.657 719 03
6	190.000 011 44	-188.620 016 45	-163.696 093 32	29.882 039 96	-98.760 470 22	-153.342 280 96
7	190.000 011 44	76.341 267 21	13.846 905 86	-85.446 785 86	150.398 636 01	-63.573 915 30
8	190.000 011 44	76.341 267 21	13.846 905 86	94.553 214 14	-150.398 636 01	116.426 115 30

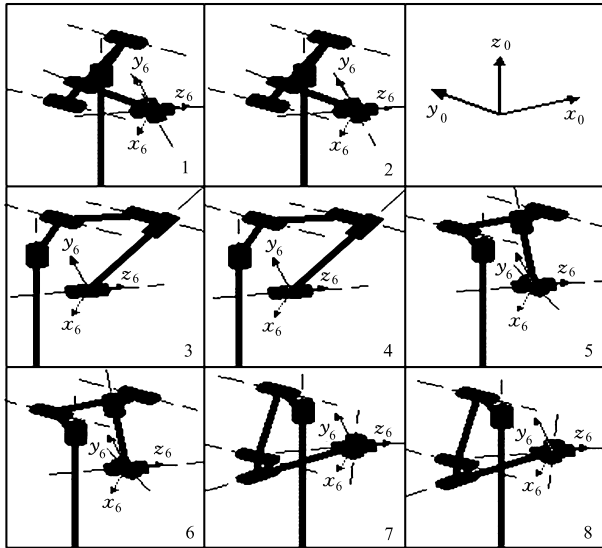


图2 机器人8组解姿态

Fig.2 Robot attitude of 8 solutions

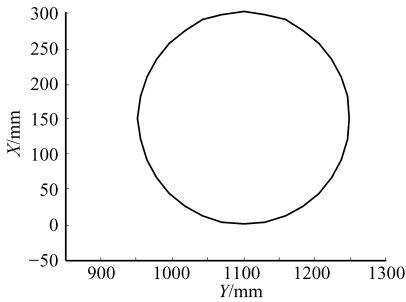


图3 XOY平面内半径为150 mm的圆

Fig.3 150 mm-radius arc in XOY plane

点,各点的坐标为

$$\begin{cases} X_n = 150 + 150\sin(-\pi/2 + n\Delta\theta) \\ Y_n = 1100 + 150\cos(-\pi/2 + n\Delta\theta) \\ Z_n = 410 \end{cases}$$

(n = 0, 1, 2, ..., 599)

式中  $\Delta\theta = \pi/300$

以该 600 组数据对应的机器人末端位姿矩阵为逆解计算样本。采用本文提出的算法,在配置为 Pentium Dual 1.6 GHz CPU、2 GB DDR 内存、Windows XP 操作系统的 PC 平台上,设定求解精度为小数点后第 8 位,通过 VC 编译执行 1 000 次,然后取平均值,得到一次逆解计算的时间仅为 0.014 ms,而采用传统的反变换法和文献[5]中提到的算法各需要 0.071 ms 和 0.058 ms。

### 5.2 算法的有效性

对本算法逆运动学求解结果以“负载最大关节

行程最短”原则进行逆解寻优,由机器人主控制器对得到的各关节离散点进行轨迹规划,设定工作时间为 1.6 s,得到各关节变量轨迹如图 4 所示。运动控制器接收到主控制器命令后对各关节轨迹进行跟踪控制。得到实际轨迹控制效果如图 5 所示。试验结果证明本算法完全能够满足 6R 机器人实时在线控制的需求。

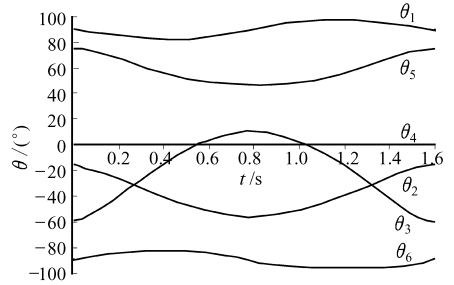


图4 机器人各关节角位移曲线

Fig.4 Displacement curve of each robot joint angular

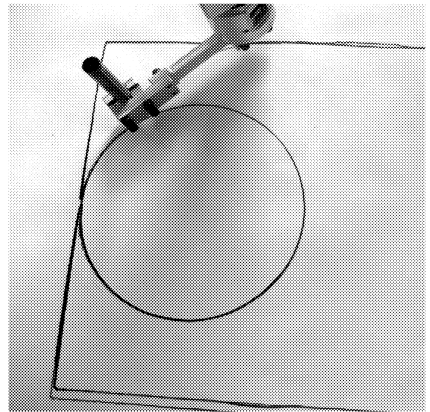


图5 实际轨迹控制效果图

Fig.5 Figure of actual trajectory

## 6 结束语

利用向量内积性质,对基于 Pieper 准则的 6R 机器人逆运动学矩阵方程进行重构,将方程的矩阵乘法求解转化成纯代数的反三角函数求解。通过优化相关方程线性组合,合理避开了 5、6 关节求解产生增根的情况,节省了算法的程序执行时间。在方程式的简化中,利用 MAPLE 软件进行符号运算预处理,避免了误差累积,保证了求解精度。试验证明,在同等求解精度下,本文提出的算法相比于其它算法在实时性方面有了较大提高,一次逆解运算平均仅需 0.014 ms,完全能够满足机器人的强实时在线控制。

### 参 考 文 献

1 Naylor A, Shao L, Volz R, et al. PROGRESS-A graphical robot programming system[C]// Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Washington D. C. : IEEE, 1987;1 282~1 291.

## 参 考 文 献

- 1 何存兴. 液压元件[M]. 北京:机械工业出版社, 1985.
- 2 [日]市川常雄. 液压技术基本理论[M]. 北京:煤炭工业出版社, 1976.
- 3 臧克江,刘宇辉,董广强,等. AutoCAD 2000 环境下的外啮合齿轮泵容腔容积计算[J]. 佳木斯大学学报:自然科学版, 2001,19(4),355~357.  
Zang Kejiang, Liu Yuhui, Dong Guangqiang, et al. Calculation of the volume of gear on gear pump based on AutoCAD 2000 [J]. Journal of Jiamusi University :Natural Science Edition ,2001, 19(4):355~357. (in Chinese)
- 4 李玉龙. 基于特征的齿轮泵困油及卸荷面积计算[J]. 农业机械学报,2006,37(11):106~109.  
Li Yulong. Calculation of closed area and unloaded area through solid feature for outer engagement gear pump [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(11):106~109. (in Chinese)
- 5 李玉龙,刘 ■,鲍仲辅. 基于渐开线齿轮展成法的参数化精确建模[J]. 现代制造工程,2006(9):70~72.  
Li Yulong, Liu Kun, Bao Zhongfu. Accurate parameterized modeling of spur involutes cylindrical gear machined by generating method[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2006(9): 70~72. (in Chinese)
- 6 李玉龙,刘 ■. 外齿轮式高压油泵全齿面润滑的理论分析[J]. 农业机械学报,2008,39(12):178~192.  
Li Yulong, Liu Kun. Theoretical analysis of lubricating state on all tooth profile of external spur-gear high pressure oil pump [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008,39(12):178~192. (in Chinese)

## (上接第 202 页)

- 4 AGMA. ANSI/AGMA 2009 - B01 Bevel gear classification, tolerances, and measuring method[S]. USA:AGMA,2001.
- 5 Litvin F L. Gear geometry and applied theory[M]. England:Cambridge University Press,2004.
- 6 李敬财,王太勇,范胜波,等. 基于数字化制造的螺旋锥齿轮齿面误差修正[J]. 农业机械学报, 2008,39(5):174~177,185.  
Li Jingcai, Wang Taiyong, Fan Shengbo, et al. Error corrections of spiral bevel gear tooth surface based on digitized manufacturing[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39 (5): 174 ~ 177, 185. (in Chinese)
- 7 魏冰阳,任东锋,方宗德,等. 传统机床与 Free-Form 型机床运动的等效转换[J]. 机械科学与技术,2004,23(4):425~428.  
Wei Bingyang, Ren Dongfeng, Fang Zongde, et al. Study on kinematic equivalent transformation from traditional tools to Free-Form ones[J]. Mechanical Science and Technology,2004,23(4):425~428. (in Chinese)
- 8 石照耀,谢华锬,费业泰. 复杂曲面测量模式与关键技术[J]. 工具技术,2000,34(11):31~34.  
Shi Zhaoyao, Xie Huakun, Fei Yetai. Modes and key technologies of complex surface measurements[J]. Tool Engineering, 2000,34(11):31~34. (in Chinese)

## (上接第 216 页)

- 2 Nemeč B, Lenarcic J. A robot simulation system based on kinematic analyses[J]. Robotica, 1985,3(22):79~84.
- 3 Duellen G, Bernhardt R, Schreck G. Use of CAD-data for the off-line programming of industrial robots[J]. Robotics,1987, 3(1):389~397.
- 4 Tsai L W, Morgan A P. Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1985,107(2):189~200.
- 5 程永伦,朱世强,刘松国. 基于旋转子矩阵正交的6R机器人运动学逆解研究[J]. 机器人, 2008,30(2):457~461.  
Cheng Yonglun, Zhu Shiqiang, Liu Songguo. Inverse kinematics of 6R robots based on the orthogonal character of rotation sub-matrix[J]. Robot, 2008,30(2):457~461. (in Chinese)
- 6 刘松国,朱世强,王宣银,等. 一般6R机器人的高精度逆运动学优化算法[J]. 农业机械学报,2007,38(11):118~122.  
Liu Songguo, Zhu Shiqiang, Wang Xuanyin, et al. Optimized inverse kinematics algorithm with high accuracy for general 6R robots[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007,38(11):118~122. (in Chinese)
- 7 熊有伦,丁汉,刘恩沧. 机器人学[M]. 北京:机械工业出版社, 1993.