

拓扑分析在海洋特征提取中的应用

薛红娟, 顾耀林

(江南大学信息工程学院, 无锡 214122)

摘要: 针对庞大复杂的海洋数据流场, 利用三维标量场的拓扑分析方法, 对海洋目标水团进行提取, 达到特征可视化的目的。结合 Morse 理论对流形构造 Morse-Smale 复形, 实现区域内水团的自动划分, 并通过删除复形上的一系列临界点对对初始水团进行合并处理。实验结果验证了该方法的可行性和高效性。

关键词: 三维标量场; Morse 理论; Morse-Smale 复形; 特征可视化

Application of Topological Analysis in Ocean Feature Extraction

XUE Hong-juan, GU Yao-lin

(School of Information Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122)

【Abstract】 For large and complex flow data such as ocean flow field, it is nearly impossible to visualize the whole information it contains. This paper introduces a topological simplification of 3D scalar fields for extracting water mass, and realizes the feature-based visualization. Based on the morse theory, this method constructs Morse-Smale complex over the important subregions to depart the water mass automatically, and repeatedly removes a pair of critical points from the complex to realize the combination of the initial water mass. The experiment verifies the feasibility and efficiency of the method.

【Key words】 3D scalar field; Morse theory; Morse-Smale complex; feature-based visualization

1 概述

随着科学计算的数据越来越大, 显示大规模数据蕴涵的所有信息变得非常困难, 基于特征的可视化重要性显得尤为突出。20 世纪 90 年代初, 特征可视化作为一种新的可视化技术被提出, 并得到了迅速的发展。它通过对原始数据作子集选择、结构分析、特征提取, 显示典型特征、关键结构或用户感兴趣的区域, 从而减少了可视化映射的数据量。

海洋温、盐度场及海洋水团的分析一直是海洋学的一个重要研究领域, 目前所采用的水团分析方法普遍存在着分析结果不直观、具有明显的经验性和主观性等问题。本文将特征可视化技术引入海洋水团分析的领域, 结合 Morse 理论及多元数据的可视化技术, 对三维标量场进行拓扑分析与特征提取。利用 Morse 理论对流形 M 构造 Morse-Smale 复形, 将流形划分成由特定拓扑分界线隔开的互不相交区域^[1]。按照水团定义, 一种类型的水团是由特性参数值相近的水体元构成的连续水体, 分布在一个或多个连通水域^[2], 因此, 将某一海区标示水团的多元特性参数转换为能反映水体特性变化程度的单一参数后, 可以通过 Morse-Smale 分解实现区内的水团划分, 再通过 Morse-Smale 复形的简化对划分得到的初始水团进行合并处理。

2 相关 Morse 理论

拓扑学上的 n 维流形是指这样一个拓扑空间: 空间内任意 2 个分开的点有分开的邻域, 每个点有一个开邻域拓扑等价于 n 维欧几里德空间 E_n 的一个开集。设 M 是一个光滑的三维流形, $f: M \rightarrow R$ 是一个光滑函数, 计算 f 在 p 点处的梯度:

$$\nabla f(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \right]^T \quad (1)$$

如果式(1)中的 3 个分量均为 0, 那么 p 称为 f 的一个临

界点, 否则为正则点。根据 f 在其临界点 p 处的 Hessian 矩阵:

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(p) \end{bmatrix} \quad (2)$$

若矩阵 $H(p)$ 可逆, 则 p 为一个非退化临界点, 否则为退化临界点, 如果 f 的所有临界点都是非退化临界点且所有临界点上的函数值都不相等, 那么 f 称为 Morse 函数。

Morse 定理指出^[3], 一个 Morse 临界点 p 的类型可以由它的 Hessian 矩阵 $H(p)$ 负特征值的个数(即 p 的指数)确定。特征值指数为 0, 则该临界点是函数 f 的一个局部极小点, 若特征值指数为 1, 则该临界点是函数 f 的 1-鞍点, 若特征值指数为 2, 则该临界点是函数 f 的 2-鞍点, 若特征值指数为 3, 则该临界点是函数 f 的一个局部极大点。Morse 理论进一步指出: 对于 $h \in R$, $f^{-1}(h)$ 连通分支的亏格只在 f 的临界点处发生改变, 因此, 临界点反映了 f 的等值面的拓扑, 刻画了它的局部微分特征。图 1 给出了正则点和各临界点的示意图。

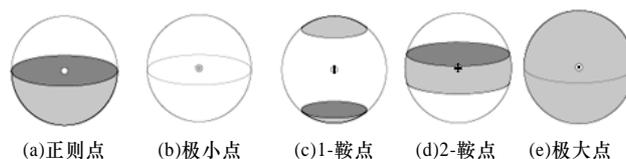


图 1 正则点及各类型临界点

作者简介: 薛红娟(1983-), 女, 硕士研究生, 主研方向: 计算机图形学, 可视化技术; 顾耀林, 教授

收稿日期: 2008-07-12 **E-mail:** xuehongjuan1123@1261.com

3 基于 Morse-Smale 分解的海洋水团特征提取算法

本文采用 1998 年夏季在台湾海峡调查所得的 CTD 温盐观测数据进行实验, 从中抽取 n 个水体元, 每个水体元 A_i 的属性由 x, y, z 3 个方向的参数和 m 个观测值描述:

$$A_i = (x_i, y_i, z_i; f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{im}) = (P_i; f_i) \quad (3)$$

其中, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ 为采样点的几何坐标; $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{im})$ 为 m 个特征值, 由于本文只考虑海洋的温度和盐度, 因此式(1)可变为

$$A_i = (P_i; f_i) = (x_i, y_i, z_i; t_i, s_i) \quad (4)$$

式(2)中定义了海洋中温度数据集 $T = \{A_1^t, A_2^t, \dots, A_n^t\}$ 和盐度数据集 $S = \{A_1^s, A_2^s, \dots, A_n^s\}$, 其中, $A_i^t = (P_i; t_i)$, $A_i^s = (P_i; s_i)$ ($1 \leq i \leq n$) 为抽样数据中温度场和盐度场的离散采样^[4]。

3.1 水团特征函数的构造

Morse 理论是将一个光滑实函数的临界点与流形的拓扑性质关联起来, 根据特征数据集计算出临界点, 利用 Morse 理论中的 Morse-Smale 分解, 流形就可被划分成由特定拓扑分界线隔开的互不相交区域。首先对采样空间进行数据建模, 将盐度采样数据集 S 和温度数据集 T 插值成规整网格数据, 接下来, 通过多维转换函数将温度数据集和盐度数据集转换成单一参数构造特征函数, 具体方法如下:

设 f 是定义在采样数据场上的多维实函数: $f(p) = f(x, y, z) = (f_t(x, y, z), f_s(x, y, z))$, 描述了一个二元温盐数据场。在场内任一点 p , 这些属性的局部变化率 Df 可通过如下雅可比矩阵表示:

$$Df = \frac{\partial(f_t, f_s)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x} & \frac{\partial f_t}{\partial y} & \frac{\partial f_t}{\partial z} \\ \frac{\partial f_s}{\partial x} & \frac{\partial f_s}{\partial y} & \frac{\partial f_s}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

现令 $G = (Df)^T Df$, 得到一个 3×3 矩阵 g_s , 描述了 p 点物理属性对其位置坐标的总体变化率, 取 G 的 L_2 范数 $V = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij}^2 \right)^{1/2}$, 得到单值函数 $V(x, y, z)$ 。 V 即为反映海洋温盐属性变化率分布的水团特征函数, 它将数据场上各点的温盐属性值转换成了属性对位置坐标的变化率。

3.2 水团的初始划分

由于上文所得水团特征函数是标量场, 相对矢量场, 它只有大小, 没有方向, 因此在将向量场拓扑分析算法应用到 V 上时, 应首先将标量场向量化。本文利用中心差分算法计算 V 的梯度场 $V' = \nabla V(x, y, z)$, 接下来在 V' 上进行拓扑分析。

本文采用文献[5]提出的 Morse-Smale 分解方法, 对于给定立体网格上的分段线性函数, 首先在所有网格单元的重心位置插入一虚拟临界点, 并且使该临界点的指数等于网格单元的维数, 这样所有输入数据点成为局部极小点。接下来通过添加新的弧来连接网格重心和每个面的中心, 这样插入的虚拟临界点和新添加的弧将每个网格单元细分成弧、四边形和临界点, 见图2。其中, 以2-鞍点为共同源点的弧簇构成上升流形, 以1-鞍点为共同终点的弧簇构成下降流形, 见图3。极小点从相应的数据点继承了函数值, 虚拟节点也被赋予函数值, 使得所有新添加弧的持久性为0, 这样在初始化操作中就删除了虚拟节点和弧, 得到能够表达输入数据特征的复形。与文献[6]提出的复杂运算法则相比, 以这种交互式方法构造人工 Morse-Smale 复形, 不仅算法简单, 而且自动解决了退化临界点的问题。输入数据中出现的多鞍点被分解成 Morse-

Smale 复形中的1-鞍点和2-鞍点, 这样每条边中心的1-鞍点正好由2条下降弧将它和边两端的极小点相连。类似地, 每个2-鞍点正好被2条上升弧连接到局部极大点。

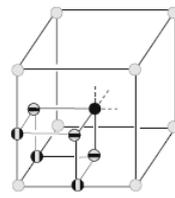


图2 Morse-Smale 分解

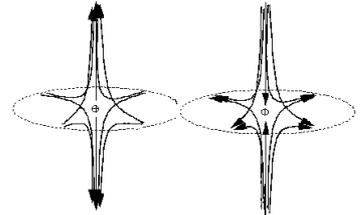


图3 上升流形和下降流形

3.3 水团合并算法

由于 Morse 临界点中的极小点只是函数的局部极小点, 并非局部区域上的最小点, 因此需要对划分得到的初始水团进行合并处理, 使得每个子复形仅包含一个水团, 其本质即 Morse-Smale 复形的简化^[7]。本文对 Morse-Smale 复形的简化是按照一定规则删除一系列临界点来平滑掉函数的一些次要拓扑特征, 得到一个较为平滑的 Morse 新函数, 使初始 Morse 函数的临界点数减至最少。

按照 Morse-Smale 复形简化理论, 只有位于同一条流线上、指数相差为1的相邻 Morse 临界点为简化而进行的配对才是合理的。这样在三维流形的情况下, 临界点对只能由1-鞍点与同段流线上相邻的极小点和2-鞍点, 或2-鞍点与同段流线上相邻的极大点配成。临界点对的删除应按照它们的重要性次序由低到高进行, 其中, 度量一个临界点对对重要性的测度是它的“持久性(persistence)”, 定义为该对临界点对应的2个函数临界值之间的距离。本文将临界点对分成2种类型: 鞍-极值点对和鞍-鞍点对。

3.3.1 鞍-极值临界点对的删除

鞍-极值临界点对包括2-鞍-极大点对和1-鞍-极小点对, 由于这2类点对可通过函数取反相互转化, 因此本文仅以2-鞍-极大点对的删除为例进行讨论。具体算法如下:

(1) 建立配对临界点对。对每个2-鞍点, 根据梯度场的流线, 记下流线抵达的极大点, 一个2-鞍-极大点对的删除操作仅在2-鞍点和2个函数值不相等的极大点连在一起时才有效。

(2) 计算各配对极大点的重要性指数, 并按重要性指数递增的顺序排列, 即形成一个配对极大点序列, 同一个极大点若与 n 个2-鞍点配对, 则会在序列中出现 n 次。

(3) 对得到的配对极大点序列, 从重要性指数数值最低的极大点开始, 按照如下步骤进行处理:

设当前点为极大点 p , p 的共享鞍点为 S , S 由一上升弧连接到另一极大点 q , 并且 q 根据水团分类表、水团类型等同于 p , 则

1) 在当前的划分中删除 p 和 S 以及与 p 和 S 连接的积分线, 将以 p 和 q 为中心的2个水团合并为以 q 为中心的一个水团。

2) 所有以 p 为终点的积分线都流向 q 。

3) 若当前的配对极大点序列中包含多个 p 项, 则表示 p 有多个共享鞍点。那么将 q 替代 p 与除 S 以外的 p 所关联的所有其他共享鞍点配对, 重新计算 q 对这些鞍点的重要性指数。这样每个重要性指数将产生一个新 q 项。

4) 从配对极大点序列中删除全部 p 项, 然后按步骤3)计算的 q 的重要性指数大小将每个新 q 项插入到配对极大点序

列中的适当位置；否则，转向下一个极大点。

在鞍-极值点对的删除中可以发现，相邻的单元被合并，构成了新的复形。图4给出了删除一对鞍-极大点前后 Morse-Smale 复形的变化情况。

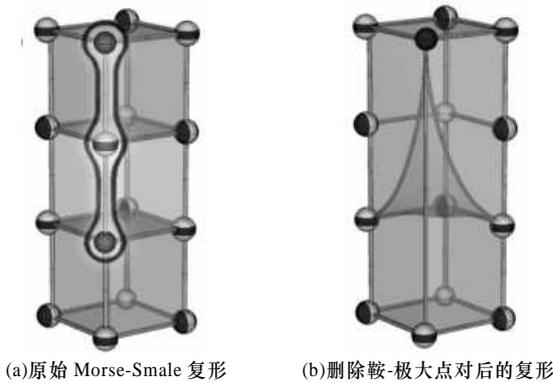


图4 删除鞍-极大点对前后 Morse-Smale 复形变化

3.3.2 鞍-鞍临界点对的删除

鞍-鞍临界点对的删除是针对 1-鞍~2-鞍点对而言的，所以，该操作并不适用于低维情况。开始时，一个 1-鞍点由下降弧连接到 2 个极小点，2-鞍点由上升弧连接到 2 个极大点，删除鞍-鞍点对后，为了确保起初由这些鞍点连接的 2 对极点不变，必须引进新的单元填充到两极点之间。为了更好地了解该删除操作，最简单的方法就是考虑起始于 2-鞍点的下降盘和起始于 1-鞍点的上升盘操作前后发生的变化，下面以下降盘删除前后的变化为例予以说明。

该部分删除操作不同于鞍-极点对删除中 3 个临界点的合并，下降盘的边界处包含交互的 1-鞍点和极小点，中间一条弧将起始 2-鞍点和 1-鞍点相连，重要性指数低的 1-鞍点将在删除时优先被配成对，删除过程中鞍-鞍点对和 2 条下降弧被删除，其中一个盘也随之消失，与其相邻的盘向前延伸并共享它们的边界。类似地，当一个上升盘被移除时，它的边界也被相邻上升盘共享。

由于重新连通下降盘时在上升和下降盘之间创建了新的交点，因此 Morse-Smale 复形在删除鞍-鞍点对后得到一个新的单元，尽管这样会使 Morse-Smale 复形在结构上变得更复杂，但是通过临界点对的删除起到了平滑 Morse 函数的作用，而且新添加的单元被引进鞍-极值点对周围的环内后，可以在以后的鞍-极值点对删除中被合并。从以上分析可以看出，通过该方法最终可得到一个更为光滑的 Morse 函数以及更小的 Morse-Smale 复形。

最后将合并得到的水团类型标出，并记下所在区域。

3.3.3 水团边界与核心区的确定

水团的边界即具有内同性与外异性的这部分水体外包络面。一般情况下，水团边界的温盐变化率比内部大，所以，可以根据温盐变化率和水团特征函数 $V(x,y,z)$ 值调整水团边界。以水团特征函数 $V(x,y,z)$ ，沿水团边界各积分步选择其领域内的若干点计算函数值，以每个领域内 V 值最大的点之间的连线作为水团的最终边界。

水团核心区为代表该水团特征的部分水体，应为温盐变化率较小的区域。若最终划分的水团是未经合并的，则可以认为该水团内部区域就是它的核心区，若最终划分的水团由多个小水团合并而成，则选择合并过程中水团中心处 V 值相对较小的部分水团所在区域作为合并后水团的核心区。

4 实验结果分析

根据以上的分析，本文在个人计算机上(方正 P4 2.93 GHz 处理器、256 MB 内存、64 MB 显卡)通过 C++、OPENGL 程序实现了表征温盐水团的自动划分与合并。表 1 给出了 1998 年夏季台湾海峡观测海区分出的 10 个水团，沿岸冲淡水团(F)、近岸混合水团(M)、南海表层水团(S)、南海次表层水团(U)、南海次-中层混合水团(UI)、南海中层水团(I)、南海深层水团(D)、南海底盆水团(B)、黑潮表层水团(KS)和黑潮次表层水团(KU)。

表 1 夏季各水团的分类

水团	温度范围/(°C)	盐度范围/(‰)	水团	温度范围/(°C)	盐度范围/(‰)
F	27.37~32.02	<31.70	I	5.48~11.08	34.39~34.49
M	27.04~30.83	32.14~33.31	D	2.35~5.46	34.45~34.60
S	22.25~31.88	33.22~34.63	B	2.35~2.39	34.60~34.60
U	15.65~22.22	34.44~34.73	KS	25.44~29.69	34.48~34.79
UI	11.00~15.57	34.44~34.66	KU	15.86~24.85	34.70~34.92

图6所示为北纬 $4^{\circ} \sim 24^{\circ}$ 、东经 $108^{\circ} \sim 120^{\circ}$ 、500 m 深度内的温盐水团三维分布图。通过本文的算法进行初始水团划分和合并后，得到的水团分布如图7所示。合并前共有鞍点 1 100 个、水团 850 个，完成合并后的鞍点数为 320 个，最终被划分成 150 个水团，从而证实了本文拓扑简化算法的可行性。

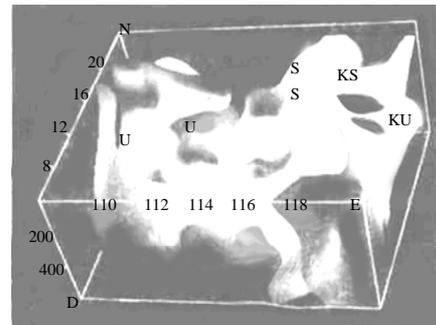


图6 温盐水团三维分布图

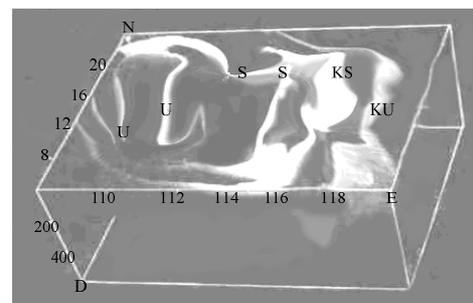


图7 合并后温盐水团分布图

5 结束语

近年来，对三维标量场的拓扑分析一直是研究焦点，本文将三维拓扑学理论应用到海洋水团研究中，通过对 1998 年夏季台湾海峡调查所得的 CTD 温盐观测数据进行实验，验证了方法的准确性。

本文算法的核心是在构造水团特征函数的基础上简化三维标量场的拓扑，不同于网格简化方法，本文结合 Morse 理论，对函数构造 Morse-Smale 复形并且通过反复删除持久性低的临界点对来逐渐简化函数拓扑结构。为了提高可视化对象的特点和质量，研究高效的可视化数据建模方法将是下一步的研究重点。

(下转第 281 页)