

正六边形自聚焦透镜折射率分布研究*

张 韧, 周自刚**, 胡 聪

(西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621000)

摘 要:针对离子交换实验的定源扩散, 提出了一种求解正六边形自聚焦透镜折射率分布的理论模型. 并在此基础上采用分离变量法和坐标变换, 求得了正六边形自聚焦透镜折射率分布的解析解. 通过 Matlab 对该解析解进行了模拟比较, 定性、定量地证明了其正确性.

关键词:正六边形; 自聚焦透镜; 折射率分布; 分离变量法; 坐标变换

中图分类号: O435.1

文献标识码: A

文章编号: 1004-4213(2008)06-1346-5

0 引言

当前微小光学器件被广泛的用于通信和成像系统, 其中的自聚焦透镜可以按一定的排列方式组成阵列, 提高了光学元器件的成像效果^[1-3]. 当前用于组成阵列的自聚焦透镜的端面一般是圆形. 它们之间存在着空隙, 在六边形紧密排列方式下其占空比理论极限也只有 90.7%^[4]. 用这种阵列采集、传导光信号会存在不同程度的光泄漏, 使得传输的图像分辨率下降^[5-6].

为了提高光信号的采集和传导效率, 本文研究了可以被紧密排列的正六边形自聚焦透镜, 采用分离变量法和坐标变换求得了正六边形自聚焦透镜折射率分布的解析解. 然后用数学软件 (Matlab) 对其进行了模拟和比较, 定性、定量地验证了该解析解的正确性. 为制造和研究正六边形自聚焦透镜及其阵列提供了有利的理论依据.

1 扩散方程和求解模型

1.1 扩散方程

目前, 制作自聚焦透镜常用的是离子交换法^[6]. 将玻璃纤维浸入熔盐中, 在定边界浓度的情况下进行离子交换. 一方面, 由于折射率与离子浓度成线性关系, 即折射率分布随扩散过程变化; 另一方面正六边形自聚焦透镜的端面是一个二维平面, 所以折射率分布的函数表达为 $n = n(x, y, t)$. 要求解其折射率分布, 可以先求其浓度分布 $C = C(x, y, t)$. 针对离子交换实验中的定源扩散, 用二阶线性齐次扩散方程^[7], 在正六边形的边界条件 $C = C_1$ 和初始条件 $C = C_0$ 下求解得

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \\ C(B, t) = C_1 \quad (x, y \subseteq \{B \text{ 所围成的区域} \}) \\ C(x, y, 0) = C_0 \quad (t > 0) \end{cases} \quad (1)$$

式中 B 为六边形边界, $B = \{$ 正六边形顶点为 $(-a, \frac{\sqrt{3}a}{2}), (-\frac{a}{2}, 0), (\frac{a}{2}, 0), (a, \frac{\sqrt{3}a}{2}), (\frac{a}{2}, \sqrt{3}a), (-\frac{a}{2}, \sqrt{3}a)$ 的正六边形的边界 $\}$. D 为扩散系数^[8]. 在参考了以往的同类实验后^[9], 为方便计算, 取边长 $a = 1 \text{ mm}$, 正六边形在直角坐标系中的位置如图 1.

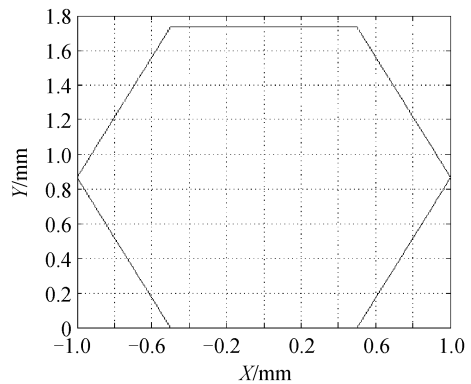


图 1 正六边形边界

Fig. 1 Boundary of the regular hexagon

由于方程(1)的边界条件是非齐次的, 这不利于方程的求解, 所以先将它齐次化^[7]. 令 $u(x, y, t) = C(x, y, t) - C_1$, 则方程(1)转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \\ u(B, t) = 0 \quad (x, y \subseteq \{B \text{ 所围成的区域} \}) \\ u(x, y, 0) = C_0 - C_1 \quad (t > 0) \end{cases} \quad (2)$$

1.2 求解模型

将方程(2)变量分离后得^[7]

$$\begin{cases} \frac{T'}{DT} - \frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = 0 \\ u(B, t) = 0 \\ X(x)Y(y)T(t) = C_0 - C_1 \end{cases} \quad (3)$$

* 西南科技大学引进人才基金(053102)资助

** Tel: 0816-6089663 Email: zhouzigang1973@163.com

收稿日期: 2007-03-16

从方程(3)可以看出,在边界条件中,只有上下这对边界可以被方便带入;而其余四个边界给带入求解带来了困难.经过分析发现,正六边形由三组平行线族围成的,如图2.所以针对离子交换法实验中的定源扩散提出一种求解模型:用三个方向上的一维扩散由叠加原理得到正六边形自聚焦透镜折射率分布的解析解.

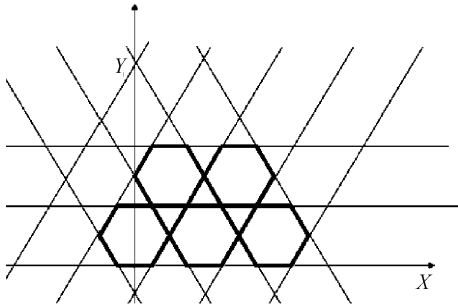


图2 正六边形的排列

Fig.2 The arrangement of regular hexagon

2 求解过程

正六边形在如图1的摆放情况下,先求沿Y方向的一维扩散问题.在变量分离后加上边界条件得

$$\begin{cases} Y'' + uY = 0 \\ Y(0) = 0, Y(\sqrt{3}a) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

解得

$$\begin{cases} Y = A \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \\ \mu = \frac{m^2\pi^2}{3a^2} \end{cases} \quad (5)$$

式中的系数A的表达式为

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}a} \int_0^{\sqrt{3}a} \sin\left(\frac{m\pi}{\sqrt{3}a}y\right) dy = \frac{-2(\cos(m\pi) - 1)}{m\pi} \quad (6)$$

对方程(5)进行坐标变换:将其绕坐标原点逆时针旋转 60° ;后沿X轴负方向平移 $\sqrt{3}a/4$ 得到左上和右下一对边界之间一维扩散解

$$\begin{cases} Y' = B \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi}{\sqrt{3}a}\left[x\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \\ \lambda = \frac{n^2\pi^2}{3a^2} \end{cases} \quad (7)$$

因为方程(6)的结果与 x, y 无关,所以得到系数B

$$B = \frac{-2(\cos(n\pi) - 1)}{n\pi} \quad (8)$$

再将方程(5)绕坐标原点顺时针旋转 60° ;后沿X轴负方向平移 $\sqrt{3}a/4$ 得到左下和右上一对边界之间一维扩散解

$$\begin{cases} Y'' = C \sum_{p=0}^{\infty} \sin\left\{\frac{p\pi}{\sqrt{3}a}\left[x\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \\ \nu = \frac{p^2\pi^2}{3a^2} \end{cases} \quad (9)$$

式中系数C为

$$C = \frac{-2(\cos(p\pi) - 1)}{p\pi} \quad (10)$$

以上A、B、C是分别随 m, n, p 变化的常系数, m, n, p 均为自然数.

再由方程(11)计算得到时域内的衰减因子,即

$$\frac{T'}{DT} + \lambda + \mu + \nu = 0 \quad (11)$$

$$T(t) = K \exp\left(-\frac{m^2 + n^2 + p^2}{3a^2} \pi^2 Dt\right) \quad (12)$$

式中,系数 $K = T(0) = C_0 - C_1$.

然后由叠加原理得到正六边形自聚焦透镜中扩散离子浓度分布的解析解

$$\begin{aligned} C = C_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R \sin\left(\frac{m\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \sin\left\{\frac{n\pi}{\sqrt{3}a} \cdot \left[x\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \sin\left\{\frac{p\pi}{\sqrt{3}a} \cdot \left[x\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \cdot e^{-\left(\frac{m^2+n^2+p^2}{3a^2}\right)\pi^2 Dt} \end{aligned} \quad (13)$$

式中系数R为

$$R = (C_0 - C_1) \times \frac{-2(\cos(m\pi) - 1)}{m\pi} \times \frac{-2(\cos(n\pi) - 1)}{n\pi} \times \frac{-2(\cos(p\pi) - 1)}{p\pi} \quad (14)$$

最后,由折射率与离子浓度的线性关系,得到正六边形自聚焦透镜折射率分布的解析解,即

$$\begin{aligned} n = n_1 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R' \sin\left(\frac{m\pi}{\sqrt{3}a}y\right) \sin\left\{\frac{n\pi}{\sqrt{3}a} \cdot \left[x\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \sin\left\{\frac{p\pi}{\sqrt{3}a} \cdot \left[x\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + y\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}a/4\right]\right\} \cdot e^{-\left(\frac{m^2+n^2+p^2}{3a^2}\right)\pi^2 Dt} \end{aligned} \quad (15)$$

式中系数 R' 为

$$R' = (n_0 - n_1) \times \frac{-2(\cos(m\pi) - 1)}{m\pi} \times \frac{-2(\cos(n\pi) - 1)}{n\pi} \times \frac{-2(\cos(p\pi) - 1)}{p\pi} \quad (16)$$

3 结果计算模拟及验证

用数学软件 Matlab 模拟方程(15),所得结果如图3.

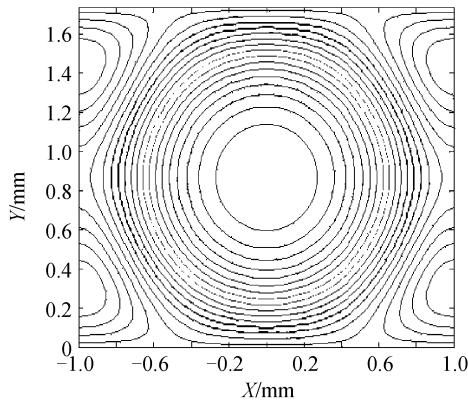


图3 对解析解的2-D模拟
Fig. 3 2-D simulation of the analytic solution

从图3中发现矩形计算区域的四个角上有不规则的图案,于是将计算范围扩大到原来的4倍,计算得到图4.可以看出,是求解模型中正六边形的排列方式导致了不规则图案的产生.说明所得到的结果与理论求解模型的结构是吻合的.

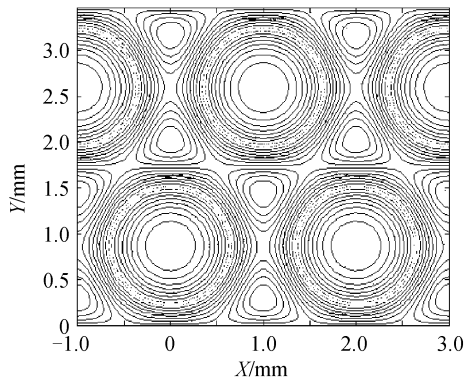


图4 计算区域扩大4倍后的2-D模拟
Fig. 4 2-D simulation of the analytic solution in a wider area

从扩散机理看,正六边形的六条边既是正六边形的几何边界,又是扩散源的理论边界.若它对正六边形内部来说是负源,那对其外部来说就是正源.当扩散达到平衡时,其内外离子浓度相等,且等于边界条件给出的离子浓度.这从性质上解释了3-D模拟图像,如图5.

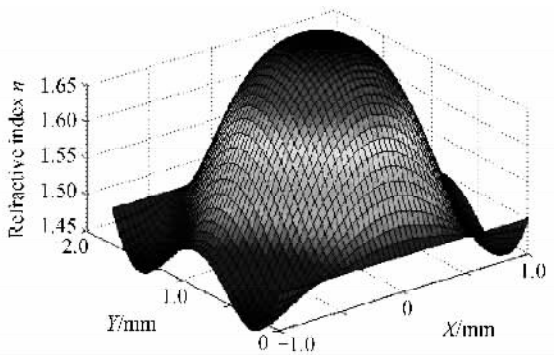


图5 解析解的3-D模拟
Fig. 5 3-D simulation of the analytic solution

以上定性证明了该解析解的正确性.然后,在数值上先将其与现已成熟的有限差分法结果进行比

较^[10-11].在正六边形区域内,统一取初始条件 $n_0 = 1.75$,边界条件 $n_1 = 1.5$.经过计算模拟得图6.

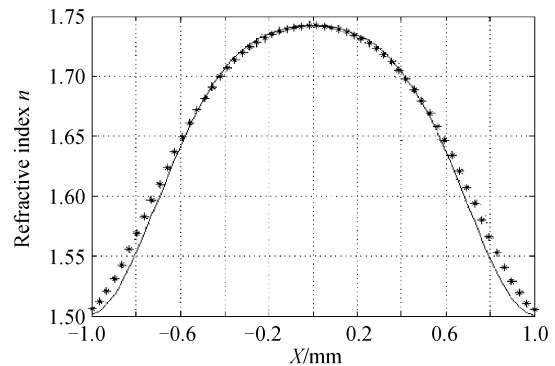


图6 解析解与数值解的比较
Fig. 6 Comparison between analytic solution and numerical solution

比较区域是从左顶点 $(-1, \sqrt{3}/4)$ 到右顶点 $(1, \sqrt{3}/4)$ 直线上的折射率.图6中的平滑曲线是解析解的结果,“*”点是数值解的值.两者的值都在1.5至1.75之间,等间距抽取10个数据样本比较,得表1.

表1 解析解与数值解的比较

数据样本	解析解	数值解	差值
1	1.540 5	1.555 7	-0.015 2
2	1.630 3	1.636 7	-0.006 4
3	1.701 4	1.699 6	0.001 8
4	1.734 2	1.732 3	0.001 9
5	1.742 6	1.742 1	0.000 5
6	1.736 0	1.734 6	0.001 4
7	1.706 8	1.705 4	0.001 4
8	1.640 0	1.646 5	-0.006 5
9	1.549 4	1.566 3	-0.016 9
10	1.500 2	1.505 2	-0.005

可见,解析解与数值解的计算结果吻合的非常好.定量地证明了该解析解的正确性.

另外,从文献[9]中的实验和公式中得到了圆形自聚焦透镜内从中心到边沿的折射率分布,并且将它与相同尺寸的正六边形自聚焦透镜中相同区域的折射率分布进行比较,得到了图7.图中的平滑曲线表示正六边形自聚焦透镜中折射率分布;“*”表示

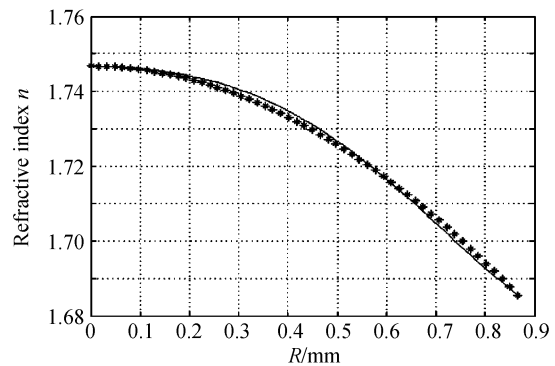


图7 圆形自聚焦透镜和正六边形自聚焦透镜折射率分布的比较
Fig. 7 Comparison of refractive index distribution in the circle GRIN & hexagon GRIN

圆形自聚焦透镜中的折射率分布. 可见在相同条件下, 计算得到的正六边形自聚焦透镜的折射率分布满足自聚焦透镜折射率分布的基本规律; 但由于边界条件的不同, 折射率分布各有特点.

4 结论

采用变量分离法和坐标变换, 得到了正六边形自聚焦透镜中折射率分布的解析解. 再用数学软件 Matlab, 在图形和数值两方面分别对其进行了模拟, 并与数值差分法的结果和圆形自聚焦透镜的折射率进行了比较. 定性、定量地验证了该解析解的正确性.

参考文献

- [1] ZHU Shao-li, XU Qiu-shuang, LIU De-sen, *et al.* The analysis of GRIN in optical fiber collimator[J]. *Journal of Southwest China Normal University*, 2004, **29**(3): 379-382.
朱少丽, 徐秋霜, 刘德森. 自聚焦透镜在光纤准直器中的应用分析[J]. 西南师范大学学报, 2004, **29**(3): 379-382.
- [2] TIAN Wei-jian, YAO Sheng-li, CHEN Rong-li. Multi-channel imaging system for detecting moving object[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2002, **31**(1): 47-49.
田维坚, 姚胜利, 陈荣利, 等. 用于运动目标探测的多通道成像系统[J]. 光子学报, 2002, **31**(1): 47-49.
- [3] AN Yu-ying, LIU Ji-fang, LI Qing-hui. Optical electronics technique [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004.
安毓英, 刘继芳, 李庆辉. 光电子技术基础[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [4] LI Yu-lin, HUO Jun-min, HE Zheng-quan. The development and application of GRIN lens[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2000, **29**(Z1): 302-306.
李育林, 霍军民, 贺正权. 梯度折射率透镜的开发及应用[J]. 光子学报, 2000, **29**(Z1): 302-306.
- [5] HAN Yan-ling, LIU De-sen, LI Jing-yan, *et al.* Research on manufacture of square gradient-index lens[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(9): 1301-1304.
韩艳玲, 刘德森, 李景艳, 等. 方形自聚焦透镜的研制[J]. 光子学报, 2006, **35**(9): 1301-1304.
- [6] LIU De-sen. Gradient-index material theory & technical practice[M]. Chongqing: Southwest Teacher University Press, 1991.
刘德森. 变折射率介质理论及其技术实践[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 2005.
- [7] LIANG Kun-miao. Mathematics physics method[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
梁昆淼. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [8] ZHOU Zi-gang, LIU De-sen, LIU Xiao-dong. Improvement of the edge index distribution for Tl glass selfoc lens[J]. *Acta Photonica Sinica*, 1999, **28**(10): 943-944.
周自刚, 刘德森, 刘晓东. 铊玻璃自聚焦透镜边缘折射率分布的改进[J]. 光子学报, 1999, **28**(10): 943-944.
- [9] LANG Xian-li, LIU De-sen, LÜ Tao, *et al.* Improvement of index distributions for GRIN lens by two-step ion-exchanging method[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(8): 1141-1144.
郎贤礼, 刘得森, 吕涛, 等. 二次离子交换法改进自聚焦透镜折射率分布[J]. 光子学报, 2005, **34**(8): 1141-1144.
- [10] HE Hong-yu, BAO Zong-ti, LU Xiao. Electric potential finite difference method of tow-dimension static fields of a regular hexagon [J]. *Journal of Southwest China Normal University*, 2004, **29**(5): 831-835.
何红雨, 保宗悌, 陆晓. 正六边形二维场域电位的有限差分算法[J]. 西南师范大学学报, 2004, **29**(5): 831-835.
- [11] HUANG Zuo-ying, QUE Pei-wen. Electromagnetic field numerical based on MATLAB[J]. *Computer Engineering and Applying*, 2004(36): 196-202.
黄作英, 阙沛文. 基于 MATLAB 的电磁场数值分析[J]. 计算机工程与应用, 2004(36): 196-202.

Analytic Solution of Refractive-index Distribution in Regular Hexagon Selfoc Lens

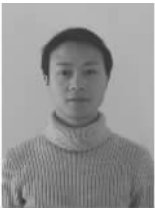
ZHANG Ren, ZHOU Zi-gang, HU Cong

(School of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621000, China)

Received date: 2007-03-16

Abstract: To address the constant source diffusion, a solving model is introduced to solve the diffusion equation with a regularly hexagonal boundary. Then the analytic solution of refractive index distribution is obtained by separating variables and transforming coordinate. Having been simulated by Mat lab program, and compared with the numeric solution from the finite difference method. The coherence of this analytic solution is proved qualitatively and quantitatively.

Key words: Regular hexagon; Selfoc lens; Refractive-index distribution; Variable separation; Coordinate transform



ZHANG Ren was born in 1983. At present, he is working towards his B. S. degree at Department of Optical Information Science and Technique, Southwest University of Science and Technology. His research interests focus on the square GRIN lenses and array.