

新しい空力的上昇径路の誘導と最適化に関する考察*1

On the New Guidance Scheme and Optimization of an Aerodynamic Ascent Path

山本高行*2・稲葉 歩*2,*3・川口淳一郎*4

Takayuki YAMAMOTO, Ayumu INABA and Jun'ichiro KAWAGUCHI

Key Words : Spaceplane, Optimal Control, DCNLP, SQP, Guidance, Steering

Abstract : This paper newly presents what the optimal guidance strategy is for the vehicles, which fly along the so-called aerodynamic ascent path. As commonly utilized, the paper first shows the optimization results via the DCNLP method, while the paper secondly shows the other results via the SQP, direct optimization method. The latter is efficiently and easily carried out taking the advantage of the steering angle expressed in a certain orthogonal functions. The primary result of the paper is the analytical description of the steering law, that relates to the optimization discussion. It is clearly concluded that a conventional linear tangent law is applicable only to non-lift vehicles. The conclusion, at the same time, indicates that the optimal guidance should take trigonometric functions in addition to those in the conventional linear tangent law. The results presented in the paper further extend the optimization process to the guidance scheme with numerical demonstrations. Since the linearized translation motion fits better for the analytical model, the results of the paper successfully could show the practical validity of it. The examples include the cases with the vehicle parameters varied from nominal and the sensitivity to those is also examined.

1. はじめに

打ち上げロケットの誘導則は長年にわたり開発されてきており、現在ではBi-Linear Tangent 則や修正 sine 則によるものが一般的にさまざまなロケットに導入されている。これらの誘導則は主に真空中や空気抵抗下での単純化したダイナミクスのみを考慮したものである。次世代の宇宙輸送システムにおいては、大きな翼により発生する揚力や搭載エアブリージングエンジンによる推力を積極的に利用することが注目されている。これらの力は空気の動圧に強く依存し、またこれらの力を利用する飛行体の飛行経路に寄与する。このような空力軌道を飛行する飛行体では酸化剤として大気を利用することや揚力が利用できることからペイロード能力の向上が期待されている。

空力上昇軌道を飛行する機体を運用する場合には従来のロケット打ち上げで用いられていたような古典的な誘導則(Bi-Linear Tangent 則等)は不適切であると考えられる。理想的には飛行中時々刻々の状態量から最適化計算を行うことで終端境界条件を満たすように誘導することが望ましいが、空力軌道の最適化計算は収束計算を含むことから計算時間の制約が厳しく、リアルタイムの軌道制御には、より簡略化された処理が必要になる。

文献 1,2) では、空力上昇経路を飛行する飛行体の誘導方法として、最適上昇時のステアリング則が振動的に変動することに着目し、制御則に三角関数を用いた関数形を提案

した。これはロケットの場合における Bi-Linear Tangent 則などのように、空力上昇経路を飛行する飛行体の新しいステアリング則として高々数個の係数パラメータを決定するような簡単な誘導則であり、オンボードでの計算可能性を示した。

しかし文献 1,2) では誘導則を求めるための基準となる最適誘導則の導出に SCGRA(Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm) 法³⁾で求解したが、機体状態量に対する拘束条件を加えていないため、飛行経路初期段階において物理的に不可能なものとなっている^{4,5)}。また最適誘導則が局所停留に陥っている数値例が 2,3 ある。そこで本研究では DCNLP(Direct Collocation Non-Linear Programming) 法^{6,7)}を用いて最適制御則をより厳密な制約のもとで導き、より精度の高い結果に一新し、さらにその結果をもとに誘導則を求め、それを適用することで誘導則の実現可能性を探ることが目的である。

本論文では文献 1,2) から最適操舵に現れる周期の解析的議論を加え、数学的議論を拡充している。また機体特性の不確定性に対する誘導機能の拡張を行った。

記号の説明

u	: 水平方向速度	v	: 垂直方向速度
x	: 水平方向位置	y	: 垂直方向位置
T	: 推力	L	: 揚力
D	: 抗力	a	: 実効推力
N	: 実効揚力	α	: 迎角
γ	: 経路角	ϕ	: 姿勢角
t	: 時間	H	: ハミルトニアン
λ	: 随伴変数	Φ	: 遷移行列

*1 © 2003 日本航空宇宙学会

平成 15 年 6 月 6 日原稿受理

*2 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

*3 現 日本ユニシス株式会社

*4 宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究本部

m	: 重量	q	: 動圧
I_{sp}	: 比推力	g	: 重力加速度
M	: マッハ数	ρ	: 大気密度
S	: 面積	λ_h	: scale height
C_T	: 推力係数	C_L	: 揚力係数
C_D	: 抵抗係数	$C_{L\alpha}$: 揚力傾斜
C_{D0}	: ゼロ揚力抵抗	C_a	: 実効揚力係数

2. 最適制御問題

2.1 モデル ここでは飛行体を質点と考えた垂直2次元面内の直角座標系を考える。単位質量当りの運動方程式は、機体軸方向に働く実効推力 a 、その法線方向に働く実効揚力 N および姿勢角 ϕ を用いて次のように表される。

$$\dot{u} = a \cos \phi - N \sin \phi \quad (1)$$

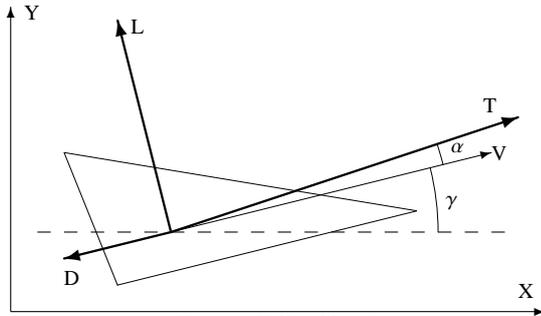
$$\dot{v} = a \sin \phi + N \cos \phi - g \quad (2)$$

$$\dot{x} = u \quad (3)$$

$$\dot{y} = v \quad (4)$$

$$\begin{cases} a = T + L \sin \alpha - D \cos \alpha \\ N = L \cos \alpha + D \sin \alpha \\ \phi = \alpha + \gamma \end{cases} \quad (5)$$

また機体に働く推力 T 、揚力 L 、抗力 D 、及び迎角 α 、径路角 γ は第1図のような関係にある。



第1図 機体に働く力

2.2 終端速度の最大化 自由終端時間 t_f に目標高度 ($y = h$) において水平飛行 ($v = 0$) をするような上昇飛行を考える。運動方程式において姿勢角 ϕ を制御量とし、終端水平方向速度 $u(t_f)$ を最大化するような最適制御問題を解く。この場合のハミルトニアンは次のように記述される。

$$H = \lambda_u (a \cos \phi - N \sin \phi) + \lambda_v (a \sin \phi + N \cos \phi - g) + \lambda_x u + \lambda_y v \quad (6)$$

ここで λ は随伴変数であり、 λ_j は状態量 j に対応する。迎角 α は姿勢角 ϕ の関数であるが、 L_α 、 D_α が小さい、すなわち迎角に対する依存性が低い場合には、式(6)より制御則の最適性条件は近似的に次のように得られる(以下、式(11)までの詳細は Appendix 参照)。

$$\tan \phi = \frac{\lambda_v - (N/a)\lambda_u}{\lambda_u + (N/a)\lambda_v} = \frac{\lambda_v - \chi \lambda_u}{\lambda_u + \chi \lambda_v} \quad (7)$$

右辺は、実効推力 a と実効揚力 N が動圧に比例し、さらに $N/a = \chi(\text{const})$ の近似を用いている。また簡単のため、以下の議論において重力一定の条件を仮定し、大気密度モデ

ルとして指数関数モデルを適用する。この時、随伴変数 λ は遷移行列 $\Phi(t, t_0)$ を用いて次のように解くことができる。

$$\lambda_x = 0 \quad (8)$$

$$\lambda_y = C \exp\left(-\frac{y}{\lambda_h}\right) \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} = \Phi(t, t_0) \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_y \end{pmatrix} d\tau \quad (10)$$

$$\Phi(t, t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t)} \begin{pmatrix} \cos \left[\ln \left(\frac{N(t)}{N(t_0)} \right)^\chi \right] & -\sin \left[\ln \left(\frac{N(t)}{N(t_0)} \right)^\chi \right] \\ \sin \left[\ln \left(\frac{N(t)}{N(t_0)} \right)^\chi \right] & \cos \left[\ln \left(\frac{N(t)}{N(t_0)} \right)^\chi \right] \end{pmatrix} \quad (11)$$

文献1)及び本論文で強調する点は式(11)が解析的に得られていることにある。

得られた随伴変数を式(7)に代入することで最適制御則が求められるが、式中に a 、 N が含まれるため解析的に解くことができない。しかし式(11)に見られるように振動項が含まれており、実効揚力 N が時間変化する場合にその影響が現れることが分かる。これが本論文の指摘の一つである。

2.2.1 振動周期 実効揚力 N の時間変化は具体的に記述できないが、大気密度と速度の二乗に比例するので、大気密度モデルとして指数関数モデルを適用すると、式(12)のような揚力モデルを考えることができる。

$$\frac{N(t)}{N(t_0)} = \exp\left(-\frac{y}{\lambda_h}\right) \frac{V^2}{V_0^2} \quad (12)$$

ある時刻において $V = \bar{a}t$ 、高度 $y = V \sin \gamma \cdot t$ とすると、

$$\frac{N(t)}{N(t_0)} \propto t^2 \exp(-kt) \quad (13)$$

よって、以下のような近似式が仮定できる。

$$\frac{N(t)}{N(t_0)} = \exp(-k't(t-2t^*)) \quad (14)$$

この時、ある区間の調和振動数は

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{N(t)}{N(t_0)} \right)^\chi &= \chi(-k't(t-2t^*)) \\ &\triangleq -\frac{\omega}{2} t(t-2t^*) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{N(t)}{N(\tau)} \right)^\chi &= -\frac{\omega}{2} \{t(t-2t^*) - \tau(\tau-2t^*)\} \\ &\triangleq -\frac{\omega}{2} (t-\tau)\{(t+\tau)-2t^*\} \end{aligned} \quad (16)$$

より、 χ すなわち (N/a) に比例することが示される。すなわち軌道操作に積極的に揚力を利用するような飛行体ほど、より振動的な制御則が必要になるということが表されている。ここで、

$$\omega \approx \chi \frac{1}{\lambda_h} \frac{dy}{dt} \quad (17)$$

であり、 $N/a = \text{const}$ の時、

$$\omega \approx \frac{1}{\lambda_h} \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_f}{\lambda_h} \frac{1}{T} \quad (18)$$

となる。高度 30km の時、

$$\omega \approx 4 \frac{1}{T} \quad (19)$$

であたかも半周期関数の様相を示しうる。特に推力が揚力に卓越する場合、すなわち $N/a \rightarrow 0$ の極限では $\omega \rightarrow 0$ であり、これは Linear Tangent 則に対応する。

これが本論文で示す性質の一つである。

2.3 近似最適解 この節では3つの単純化したケースで制御則を解析的に解き、要求される最適制御則の特徴について近似的に考察する。

2.3.1 推力・揚力一定 最も単純なケースとして実効推力 a 及び実効揚力 N が一定の場合、式(11)において $N = N_0$ であり振動は消える。よって一般的に最適制御則は次のようになる。

$$\tan \phi = \frac{c_1 + c_2 t}{c_3 + c_4 t} \quad (20)$$

これはいわゆる Bi-Linear Tangent 則である。このケースにおいて制御則は振動的ではない。特に実効揚力が働かない場合、 $\chi = 0$ であり、最適制御則は次のような Linear Tangent 則と呼ばれるものになる。これはよく知られた事実に整合する。

$$\tan \phi = c_1 + c_2 t \quad (21)$$

2.3.2 動圧比例推力 エンジン性能が飛行環境に依存 ($a = \text{const}$) し、実効揚力が一定であるケースにおいては $N = N_0$ であり、振動は消えて、式(10)は次のように変形できる。

$$\lambda_u = \frac{a(t_0)}{a(t)} \lambda_u(t_0) \quad (22)$$

$$\lambda_v = \frac{a(t_0)}{a(t)} \lambda_v(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{a(\tau)}{a(t)} \lambda_y(\tau) d\tau \quad (23)$$

特に、機体が翼を持たない場合 ($N = 0$)、 $\chi = 0$ であり、ステアリング則は次のように単純化できる。

$$\tan \phi = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} = c_1 + c_2 \int_{t_0}^t a(\tau) \exp\left(-\frac{y}{\lambda_h}\right) d\tau \quad (24)$$

迎角が非常に小さい ($\alpha \ll 1$) 時、エアープリージングエンジンの実効推力はマッハ数と動圧の関数となる。一般的にエアープリージングエンジンには作動限界として最大動圧が存在する。機体が動圧一定経路を飛行する際、実効推力はマッハ数の関数となる。例として、ATR エンジンの実効推力係数をマッハ数に対してプロットしたものを第2図に示す^{2,8)}。ここで図中 CT^* のあとの数字はエンジン入口の動圧である。

第2図より、この場合、実効推力は典型的には次の式で与えることができる。

$$a(t) = C_T^*(M(t)) q^* S_{\text{engine}} \quad (25)$$

$$C_T^*(M(t)) = 2 - 2 \sin M(t) \quad (26)$$

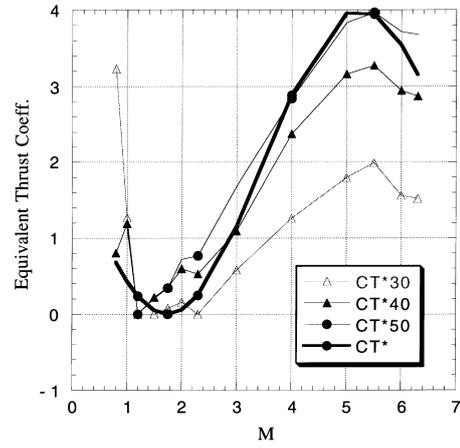
$$q^* : \text{一定の動圧} \quad (27)$$

よって、

$$a(t) = A(1 - \sin M(t)) \quad (28)$$

と書け、この時 $a(t)$ は高度に依存しないため、 $\lambda_y(t) = \text{const}$ である。

$$\int_{t_0}^t a(t) \lambda_y dt = A \lambda_y \left(t - \int_{t_0}^t \sin M(t) dt \right) \quad (29)$$



第2図 ATR エンジンの実効推力係数^{2,8)}

この時揚力を持たない場合、式(24)より最適制御則は次のようになる。

$$\tan \phi = c_1 + c_2 t + c_3 \int_{t_0}^t \sin M(t) dt \quad (30)$$

2.3.3 動圧比例揚力 実効揚力が動圧に依存し、実行推力が一定の場合、式(10)は振動的となる。この時、Appendix の式(A33)の係数行列 B は次式のようになる。

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -N' \\ N' & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$N(t) \gg N(t_0)$ とすると、式(10)は遷移行列 $\Phi_2(t, t_0)$ を用いて次のように変形できる。

$$\begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} = \Phi_2(t, t_0) \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix}_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_2(t, \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_y(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad (32)$$

$$\Phi_2(t, t_0) = \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{N(t) - N(t_0)}{a}\right] & -\sin\left[\frac{N(t) - N(t_0)}{a}\right] \\ \sin\left[\frac{N(t) - N(t_0)}{a}\right] & \cos\left[\frac{N(t) - N(t_0)}{a}\right] \end{pmatrix} \quad (33)$$

一般的に揚力を時間の関数として表現することができないため、最適制御則を解析的に示すことは容易ではない。しかし遷移行列より最適制御則は確実に振動的なステアリング則を必要とする。

2.4 振動的な制御則 前節で議論したように、翼やエアープリージングエンジンを持つ機体は必然的に振動的な制御を必要とする。第一の理由は、大気密度が指数関数的に減少し、迎角もまた変化するため、動圧に比例する揚力が時間とともに変化するためである。二つ目の理由は、エアープリージングエンジンの性能自身が振動的な振る舞いを示すためである。

よって、翼とエアープリージングエンジンの両方を持つ機体の最適制御則はより複雑な制御を必要とする。

2.5 簡易モデルでの数値解 これまでの議論で最適な制御則は振動的になることを近似的に示すことができたが、随伴変数の支配方程式は時間変化する推力及び揚力を含むため、一般的なステアリング則を示すことは難しい。そこで振動的な制御則の挙動を示すため、数値計算を行うことで飛行体の最適軌道や制御則の挙動を確認する。数値計算アルゴリズムとしては拘束条件を扱うことが容易な直接法の一つである DCNLP 法を採用する。

推力 T , 揚力 L , 抗力 D は動圧と基準面積によって無次元化される。一般的に無次元化係数はマッハ数 M と迎角 α に依存するが、この簡易モデルではマッハ数に対する依存性を考慮しないこととする。また規定の消費燃料をもとに終端時間を決定するため、質量の微分方程式を加えて、次の運動方程式を用いる。

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= T \cos \phi - L \sin \gamma - D \cos \gamma \\ &= a \cos \phi - N \sin \phi \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= T \sin \phi + L \cos \gamma - D \sin \gamma - mg \\ &= a \sin \phi + N \cos \phi - mg \end{aligned} \quad (35)$$

$$\dot{x} = u \quad (36)$$

$$\dot{y} = v \quad (37)$$

$$\dot{m} = -\frac{T}{I_{sp}g} \quad (38)$$

数値解を得る際に用いる最も基本となる機体モデルを文献9)を参考に決定し、第1表に示す。但し、推力及び揚力あるいはこれらの係数は計算条件によって異なる。

第1表 機体モデル

初期機体重量	m_0	=	300	[ton]
燃料重量	m_{fuel}	=	21	[kg]
揚力傾斜	$C_{L\alpha}$	=	2	
ゼロ揚力抵抗	C_{D0}	=	0.02	
最大揚抗比	$(L/D)_{max}$	=	5	
主翼面積	S_{wing}	=	750	[m ²]
エンジン基準面積	S_{engine}	=	11.25	[m ²]
地表大気密度	ρ_0	=	1.225	[kg/m ³]
scale height	λ_h	=	23500	[ft]

数値計算における最適化問題としては、終端時刻での水平速度最大化である。初期条件は次のとおりである。

$$u = 170[\text{m/s}], \quad v = x = y = 0, \quad m = 300[\text{ton}] \quad (39)$$

一般に水平離陸を想定するため、初期水平速度 (Mach 0.5) を与えている。また終端条件は次のとおりである。

$$v = 0, \quad y = 30[\text{km}], \quad m = 279[\text{ton}] \quad (40)$$

さらに機体状態量が物理的に可能となるように、高度方向の状態量拘束 $y \geq 0$ を付加する。

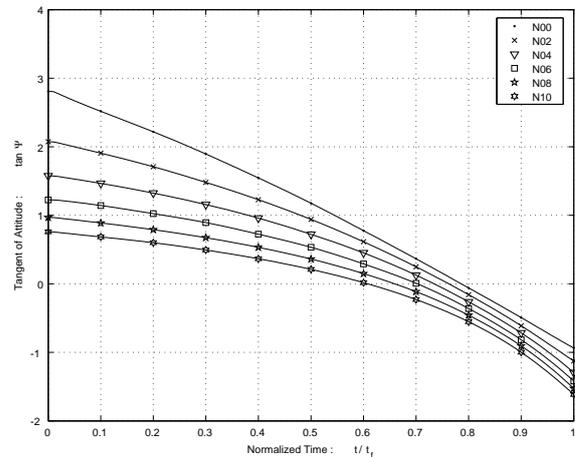
2.5.1 推力・揚力一定 最も簡単な実効推力 a と実効揚力 N が共に一定の場合であり、各計算ケースにおいて実効推力を $a = 2m_0g$ 一定、実効揚力をパラメタとする。ただしこの計算ケースでは、初期水平速度はゼロである。

推力一定のため、搭載燃料を定めると飛行時間は自動的に決まり各ケースで 105 秒となる。第2表は終端時間における最大水平速度を示す。第3図では時間 t を飛行時間 t_f で無次元化して示している。揚力ゼロ (N00) の飛行体の最適制御則が従来の Linear Tangent 則に一致し、揚力のある飛行体の場合は Bi-Linear Tangent 則に一致することが示されている。またこれより制御則は振動的でないことが分かる。実効揚力の増加に伴い最終速度が増加するのは揚力を利用できているためであり当然である。

2.5.2 動圧比例推力 推力 T が動圧に比例し、実効揚力が $N = 0.7m_0g$ で一定の場合を考察する。各計算ケースにおいて推力係数をパラメタとする。この例では搭載燃料重量を固定とするため、飛行時間は軌道によって異なる。ま

第2表 終端速度

実効揚力	終端速度 [m/s]	第3図凡例
$N = 0$	1419.7	N00
$N = 0.2m_0g$	1438.2	N02
$N = 0.4m_0g$	1491.9	N04
$N = 0.6m_0g$	1573.9	N06
$N = 0.8m_0g$	1684.8	N08
$N = 1.0m_0g$	1812.6	N10



第3図 推力一定な機体の最適制御

た動圧比例推力の場合、機体が水平面下に潜らないように高度方向の拘束を設けると解が得られないため、高度方向の拘束を設けていない。

第3表は最大終端水平速度及び飛行時間を示す。推力係数 C_T が小さいほど終端速度が大きくなっている。これは C_T が小さいほど飛行初期段階において水平面下に潜り込む度合いが大きく、その結果動圧の高い部分を比較的長時間飛行することで推力及び速度を得、終端速度が向上していることを示している。この結果は空気吸い込み式機関を用いる場合の特徴でもある。また第4図は動圧が時間変化するため、推力係数一定下で最適制御が振動的な振る舞いをすることを示す。これは2.4節の第一の理由による。

第3表 終端速度と飛行時間

推力係数	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	第4図凡例
$C_T = 2$	1897.1	166.9	CT2
$C_T = 3$	1858.0	160.0	CT3
$C_T = 4$	1826.3	153.4	CT4
$C_T = 5$	1799.2	148.1	CT5
$C_T = 6$	1774.1	139.7	CT6
$C_T = 7$	1752.4	140.7	CT7

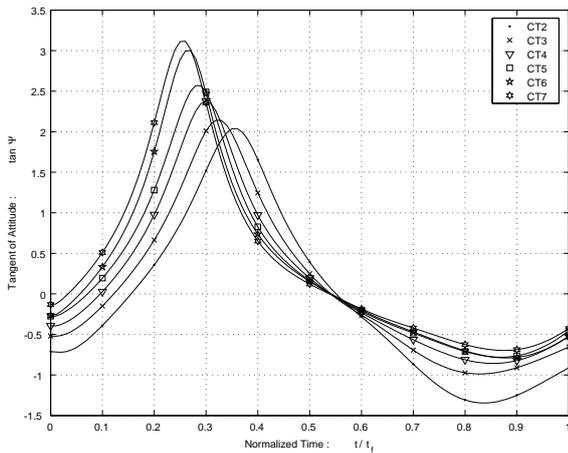
2.5.3 動圧比例揚力 揚力 L と抵抗 D が動圧に比例し、推力 T が一定の場合を考える。各計算ケースにおいて固定した推力をパラメタとする。また推力・揚力モデルを以下のように定めた。

$$C_T = \text{const} \quad (41)$$

$$C_L = C_{L\alpha}\alpha \quad (42)$$

$$C_D = C_{D0} + C_{L\alpha}\alpha^2 \quad (43)$$

第4表は終端水平速度と飛行時間を示す。第5図は推力が小さくなるほど、最適制御則の振動的な挙動が顕著になることを示しており、前章までの議論と整合している。推力一定のため推力が小さいほど飛行時間が長くなるため、

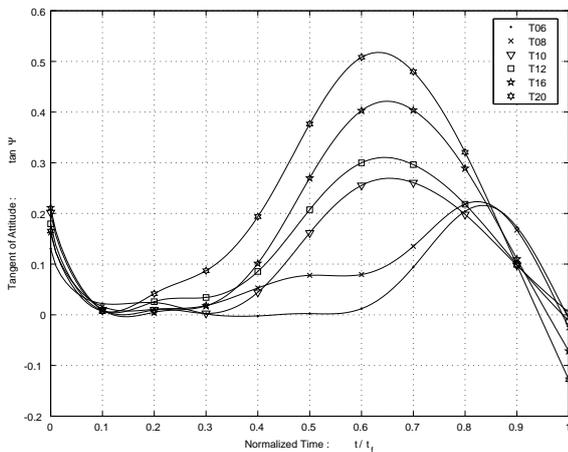


第4図 推力が動圧比例する機体の最適制御

まず水平飛行で速度を増し、その後上昇する軌道が得られた。その結果、推力が小さいほど終端速度が大きくなる結果が得られた。これも揚力を利用する機体での特徴の一つである。

第4表 終端速度と飛行時間

揚力	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	第5図凡例
$T = 0.6m_0g$	2104.9	350.0	T06
$T = 0.8m_0g$	2085.9	262.5	T08
$T = 1.0m_0g$	2079.0	210.0	T10
$T = 1.2m_0g$	2075.6	175.0	T12
$T = 1.6m_0g$	2068.2	131.3	T16
$T = 2.0m_0g$	2034.6	105.0	T20



第5図 揚力が動圧比例する機体の最適制御

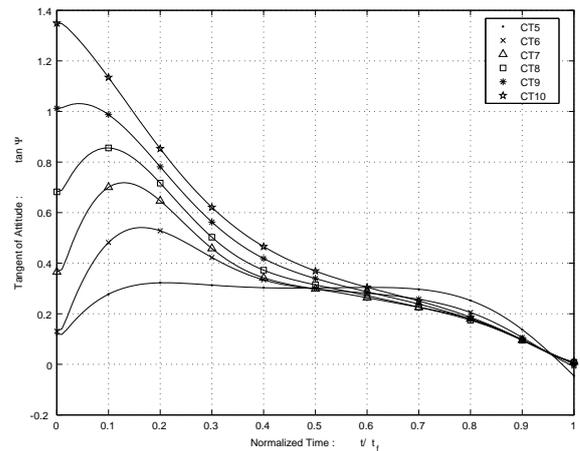
2.6 一般的な空力飛翔体の数値解 最後に推力 T 、揚力 L 及び抵抗 D が動圧に比例する場合を考える。各計算ケースにおいて固定した推力係数をパラメタとする。

第5表 終端速度と飛行時間

推力係数	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	第6図凡例
$C_T = 5$	2104.9	170.9	CT5
$C_T = 6$	2085.9	163.0	CT6
$C_T = 7$	2079.0	162.8	CT7
$C_T = 8$	2075.6	162.7	CT8
$C_T = 9$	2068.2	162.8	CT9
$C_T = 10$	2034.6	162.8	CT10

第5表は終端水平速度及び飛行時間を示す。飛行時間は C_T の値に関わらず、ほぼ一定の値となった。これは C_T が小さいほど飛行初期において低高度、すなわち動圧の高い部分を飛行することで推力を増し、増速してから、上昇す

るためである。また C_T が大きいほど終端速度は大きくなる。第6図から最適制御則が非常にきれいな振動的な振る舞いをする事が分かる。これは前章までの理論とよく整合している。



第6図 空力飛翔体の最適制御則

3. 誘導方策への応用

ロケットの最適制御則 (Linear Tangent 則) を示す式 (20) に含まれるパラメタ c_i は境界条件によって決まる。予定されていた最適軌道からそれてしまった場合には制御則を修正する必要があるが、ある時刻における状態量を初期値として、終端条件を満たすように定数 c_i を決定することでロケットの誘導が可能である。

しかし前節で最適化計算を行ったようないわゆる空力飛翔体では Linear Tangent 則による誘導が適していない。またリアルタイムで軌道の最適化計算を行うことは、計算負荷の面から一般的に難しい。

本研究では、何らかの理由により生じるノミナル軌道からのズレを補償する方法として、修正された軌道が終端条件を満たすという条件で行う誘導法を提案する。式 (11) と数値計算により最適制御則が振動的であることが示されたので、2.3 節の議論から次のような関数形を仮定することが適当である。

$$\tan \phi = c_0 + c_1 t + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t \quad (44)$$

この式 (44) が DCNLP により求められた最適制御則を示す第6図のグラフをよく近似できていれば、終端条件を満たすべくパラメタ c_i を決定することで、最適ではなくてもそれに近い軌道を飛行させることが可能になる。また式 (44) はシンプルな形状をしているため、最適化すべきパラメタを著しく減少し、機体搭載計算機でリアルタイムに計算できることが期待できる。なお決定すべきパラメタには周波数 ω 、終端時間 t_f も含まれなくてはならず、また ω には理論値が存在する。

3.1 提案した関数形式 (44) の正当性 式 (44) で定義された制御則に基づいて飛行した場合に、大きく評価関数が悪化させるようでは実用的に意味が無いため、式 (44) に含まれるパラメタについて最適化計算を行い、DCNLP の結果と比較する。ここではまず初期条件から前進積分する

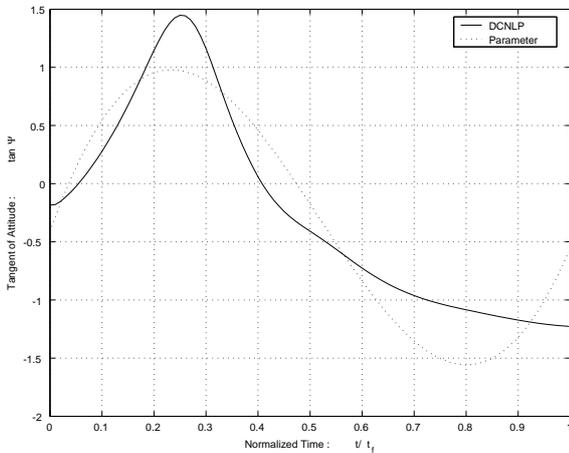
ことで終端値を算出し、それらを終端境界条件及び評価関数として評価する最適化問題を改めて構成する。この方法ならば、ただか数個のパラメタ決定問題となるため、全時間に渡って制御量を最適化する DCNLP に比べて計算時間の大幅な短縮が期待できる。数値計算アルゴリズムには SQP(Sequential Quadratic Programming) を用いた¹⁰⁾。

機体モデルとして第1表において、実効推力係数が $C_a = 7$ 及び実効揚力係数が $C_N = 0.1$ で一定、すなわち N/a は一定とする。以下に、DCNLP とパラメタ最適化による計算結果を比較する。

第6表と第7図に DCNLP とパラメタ最適化による計算結果の比較を示す。式(44)は $c_0 \sim c_3, \omega, t_f$ の6つのパラメタのみで構成されているが、最適化により計算された終端速度は DCNLP の結果に3%以下の精度で十分よく一致している。またパラメタ最適化により導かれるステアリング則は DCNLP の結果をカーブフィッティングしたようにぴったりと一致した履歴を示しており、その周期は約125秒であることが分かる。

第6表 数値計算による終端速度比較

計算方法	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]
DCNLP	2292.2	119.5
パラメタ最適化	2241.1	119.9



第7図 数値計算によるステアリング則比較

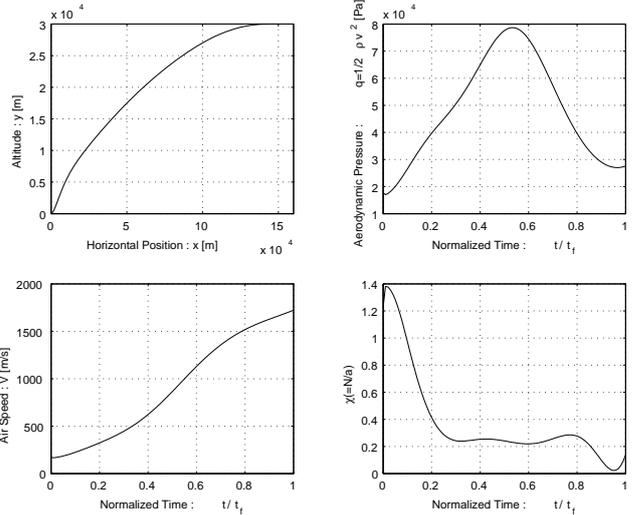
式(44)では、どの周波数成分が卓越して寄与しているか分からない。第7図の結果は飛行時間で1周期が最適と述べているわけではない。

3.2 パラメタ最適化 以下には前節で提案した係数最適化による制御性能を示す。この節では、2.6節で求めた一般的な空力飛行体の推力係数 $C_T = 7$ の時の最適制御則と、パラメタ最適化の結果とを比較する。本節で用いる基本となる一般的な空力飛行体の最適軌道について、面内の軌跡、動圧及び対気速度、 $\chi(N/a)$ の履歴を第8図に示す。

3.2.1 時間比例項無しの場合 まず式(44)において時間比例項がないステアリング則について検討する。

$$\tan \phi = C_0 + \sum_{k=1}^N \left[C_k \cos k\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) + S_k \sin k\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (45)$$

本節以降では飛行時間内で二分の一周期の関数で寄与を

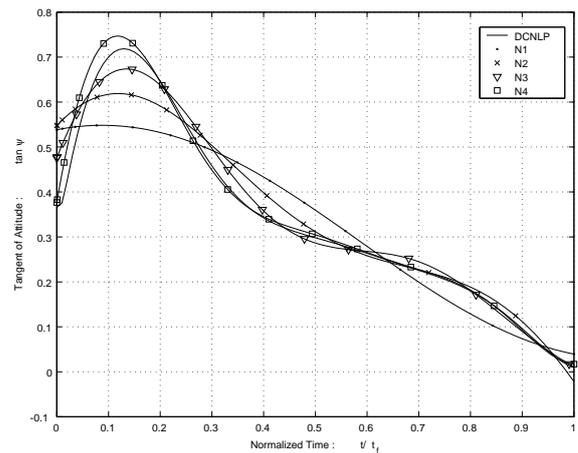


第8図 空力飛行体最適制御時の状態量履歴

評価する。この関数形は飛行時間区間の調和展開に相当している。第7表及び第9図には式(45)の次数 N による性能の違いを掲げた。次数 N が大きくなるほど、終端速度とステアリング則は DCNLP による最適解に近づくことが分かる。また $N = 1$ でも終端速度は $\pm 1\%$ 以内である。

第7表 時間比例項無しの終端速度と飛行時間

次数	パラメタ数	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	第9図凡例
$N=1$	4	1707.0	162.7	N1
$N=2$	6	1715.2	162.8	N2
$N=3$	8	1717.9	162.7	N3
$N=4$	10	1719.5	162.7	N4
DCNLP	-	1722.8	162.8	DCNLP



第9図 時間比例項無しステアリング則

3.2.2 時間比例項ありの場合 次に時間比例項のある場合のステアリング則について検討する。

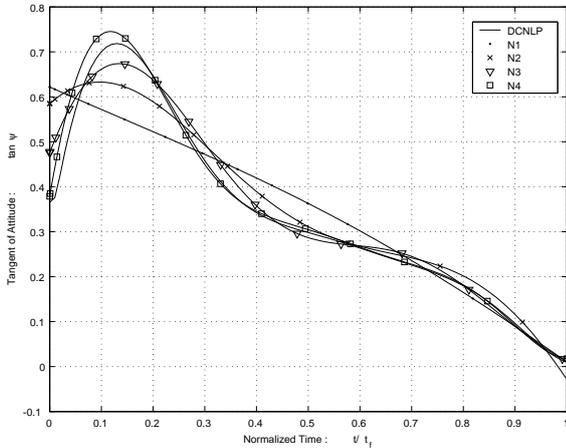
$$\tan \phi = C_0 + S_0 \left(\frac{t}{t_f} \right) + \sum_{k=1}^N \left[C_k \cos k\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) + S_k \sin k\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (46)$$

第8表及び第10図には式(46)の次数 N による性能の違いを掲げた。前節同様に、次数 N が大きくなるほど、終端速度とステアリング則は DCNLP の最適解に近づくことが

分かる。また時間比例項無しの場合と比較して、 N が小さい場合は、時間項による改善の寄与が見られる。

第8表 時間比例項ありの終端速度と飛行時間

次数	パラメタ数	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	第10図凡例
$N=1$	5	1710.0	160.9	N1
$N=2$	7	1714.7	162.6	N2
$N=3$	9	1718.0	162.7	N3
$N=4$	11	1719.5	162.7	N4
DCNLP	—	1722.8	162.8	DCNLP



第10図 時間比例項ありのステアリング則

3.2.3 周波数最適化 さらに周波数への依存性を考慮したステアリング則について検討した。

$$\tan \phi = C_0 + S_0 \left(\frac{t}{t_f} \right) + \sum_{k=1}^N \left[C_k \cos k\omega\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) + S_k \sin k\omega\pi \left(\frac{t}{t_f} \right) \right] \quad (47)$$

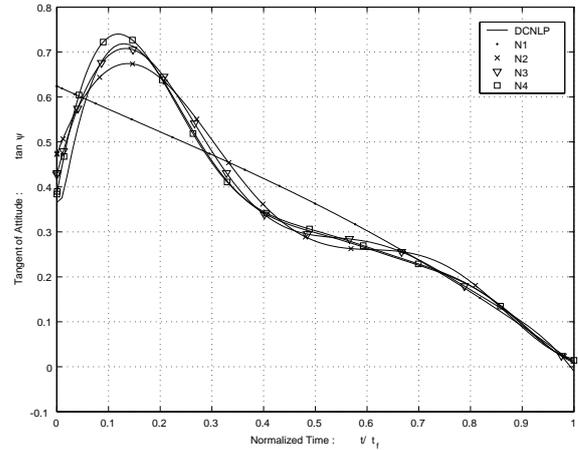
第9表及び第11図には式(47)の次数 N による違いを示す。またその時の無次元周波数 ω も掲げた。時間比例項ありのステアリング則と比較して、終端速度はあまり向上していない。これはステアリング則の周波数がすでに最適な周波数に近いと考えられる。基本周波数は飛行時間区間を構成する周波数の1/2に近い。

第9表 周波数最適化の終端速度と飛行時間

次数	パラメタ数	終端速度 [m/s]	飛行時間 [s]	周波数	第11図凡例
$N=1$	6	1710.3	160.8	0.843	N1
$N=2$	8	1717.7	162.2	1.316	N2
$N=3$	10	1718.7	162.0	1.176	N3
$N=4$	12	1719.5	162.7	0.981	N4
DCNLP	—	1722.8	162.8	—	DCNLP

3.3 誘導問題への応用1 前節において、パラメタ最適化による単純化した制御則で最適制御則に近い結果が得られることが示された。以下にはパラメタ最適化による制御則を実際に飛行している機体における誘導則として応用することを議論する。

飛行中には様々な理由から軌道誤差を生ずるため、終端条件を満たすように制御則を修正する必要がある。機体搭



第11図 周波数最適化のステアリング則

載のコンピュータでこの誘導を行うためには、計算負荷が少なくあるべきである。一般的に、パラメタ最適化の計算時間はDCNLPよりもより短く、パラメタ最適化がより機上での誘導計算に適している。

そこである時刻における状態量を初期値として、終端条件を満たすような制御則を式(47)の形で決定し軌道を時々刻々再計算する誘導法を考える。再計算の時刻から終端時刻までの飛行時間をTime-To-Goと呼ぶ。

予定されていた最適軌道(nominal)を第9表における次数 $N=4$ の場合とし、飛行開始における経路角 $\gamma(t_0)$ に誤差を与え前進積分することで誤差軌道(error)を作成する。

この例題では誤差軌道上でTime-To-Goに指定された時刻 t_i (Time-To-Goがそれぞれ30, 60, 90%の地点)に達した時点で、その時の状態量を基に式(47)の次数 $N=1$ 相当のパラメタを決定することにする。最適解の終端速度 $u(t_f)$ を終端拘束条件として加え、逆に質量を拘束条件からはずすことで燃料マージンを持たせ、燃料最小化問題を解く(guidance)ものとした。ここまでの結果から、最低次の基本解は全飛行時間内で半周期の関数であることが分かる。

第10表に必要なとされる燃料マージンとノミナル燃料量に対する割合を示す。初期経路角誤差の絶対値が大きいほど、より多くの燃料マージンが必要である。しかしノミナル燃料量に対する割合は高々2%程度であり、式(47)で表される制御則が正確に機体を誘導し、DCNLPに比べて計算負荷を減少できることがわかる。Time-To-Goが大きいほど、確保されるべき燃料マージンは小さい。

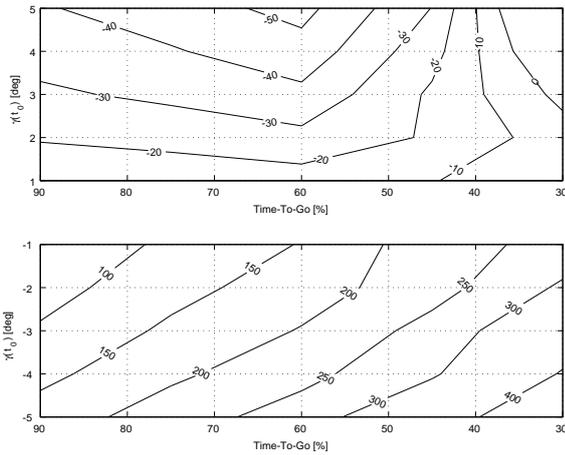
また第13図及び第14図に初期経路角誤差 $\gamma(t_0) = \pm 5[\text{deg}]$ の時の、誘導則をそれぞれTime-To-Go=30, 45, 60, 75, 90%の地点で再計算した場合の求められた操舵角の結果を示す。軌道再計算後、最適軌道とは異なった制御を行っている様子が見られる。

3.4 誘導問題への応用2 次に推力係数 C_T に誤差がある場合を検討する。推力係数に $\pm 1\%$ の誤差があると仮定し、これにより生ずるノミナル軌道からの誤差をもとに、ある時点において誘導則再計算を行う。この際、再計算時に推力係数の誤差を推定しないものとする。

第11表に一度の再計算によって必要とされる燃料マ

第10表 必要燃料マージン

初期経路角 誤差	Time-To-Go				
	30%	45%	60%	75%	90%
$\gamma(t_0)$ [deg]	[kg] [%]	[kg] [%]	[kg] [%]	[kg] [%]	[kg] [%]
+5	28.3 (0.13)	-29.7 (-0.14)	-53.2 (-0.25)	-45.5 (-0.22)	-39.0 (-0.19)
+4	14.4 (0.07)	-23.6 (-0.11)	-46.2 (-0.22)	-39.1 (-0.19)	-33.5 (-0.16)
+3	2.8 (0.01)	-18.4 (-0.09)	-37.5 (-0.18)	-32.0 (-0.15)	-28.5 (-0.14)
+2	-4.6 (-0.02)	-18.8 (-0.09)	-27.2 (-0.13)	-24.2 (-0.12)	-21.0 (-0.10)
+1	-0.4 (-0.00)	-10.6 (-0.05)	-15.5 (-0.07)	-11.9 (-0.06)	-11.7 (-0.06)
-1	266.2 (1.27)	228.4 (1.09)	152.5 (0.73)	110.6 (0.53)	56.9 (0.27)
-2	308.0 (1.47)	229.8 (1.09)	176.1 (0.84)	133.2 (0.63)	79.6 (0.38)
-3	355.6 (1.69)	268.1 (1.28)	203.1 (0.97)	159.4 (0.76)	106.0 (0.50)
-4	405.4 (1.93)	292.3 (1.39)	235.0 (1.12)	189.7 (0.90)	136.5 (0.65)
-5	472.1 (2.25)	358.9 (1.71)	273.0 (1.30)	226.2 (1.08)	171.4 (0.82)

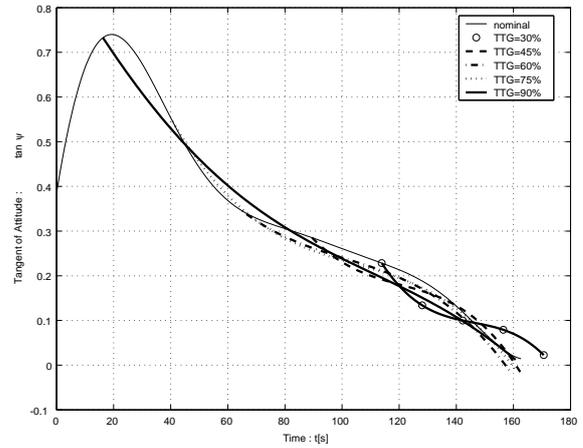


第12図 必要燃料マージン分布

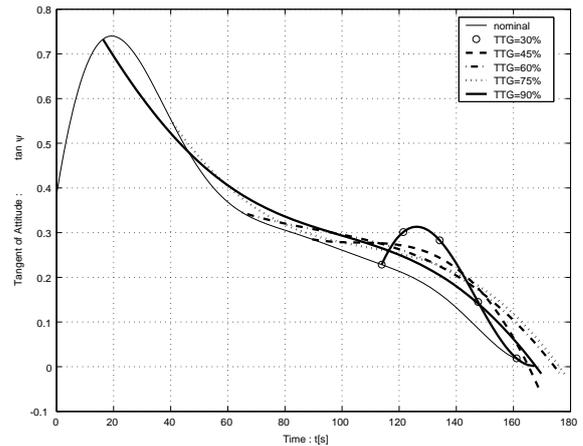
ジン及び終端における状態量誤差を示す。推力係数誤差がプラスの場合、Time-To-Go が大きいほど必要燃料マージンが多く、マイナスの場合少なくなり、前節で示した推力係数に誤差がない場合に、状態量誤差を修正する場合と異なる傾向を示す。これは燃料消費が推力係数に比例するため、再計算を早期に行うほど誘導に用いる推力係数の誤差分の影響が長時間に及ぶためである。また Time-To-Go が大きいほど終端状態量の誤差が大きくなり、一度の誘導則再計算だけでは終端条件を満足できていないことが分かる。

第11表 推力係数誤差がある場合の誘導結果

推力係数 誤差 [%]	TTG	終端状態量		
		必要燃料 マージン [kg](%)	高度 誤差 [m](%)	水平速度 誤差 [m/s](%)
+1	30	35.3(0.17)	16.7(0.06)	5.3(0.31)
	45	119.0(0.57)	85.7(0.29)	12.4(0.72)
	60	235.5(1.12)	250.6(0.84)	22.3(1.30)
	75	334.0(1.59)	469.0(1.56)	29.5(1.71)
	90	303.5(1.45)	713.8(2.38)	25.8(1.50)
-1	30	-48.9(-0.23)	-28.0(-0.09)	-6.8(-0.40)
	45	-127.3(-0.61)	-109.8(-0.37)	-14.4(-0.83)
	60	-258.2(-1.23)	-279.6(-0.93)	-24.0(-1.40)
	75	-353.6(-1.68)	-526.1(-1.75)	-32.8(-1.91)
	90	-378.8(-1.80)	-865.9(-2.89)	-34.9(-2.03)



第13図 初期経路角誤差 $\gamma(t_0)=5deg$ の制御則



第14図 初期経路角誤差 $\gamma(t_0)=-5deg$ の制御則

4. 結論と今後の課題

従来の Linear tangent 則に三角関数を追加した式 (44) の関数形を新しい誘導方策として提案し、有限静的なパラメータ決定問題を解くことで最適制御則の性能とほぼ同等の性能を示す結果を得た。式 (44) は Time-To-Go を入れて6つのパラメータのみで表すことができ、計算負荷を減少させることができる。

このための準備として、主翼とエアブリージングエンジンを持つ機体の場合、空力上昇経路を飛行する機体の最適制御則は振動的な振る舞いを見せることを解析的に示した。

また拡張された式 (47) の制御則を用いた誘導実現性の妥当性を数値シミュレーションにより示し、実用的にも少ない燃料マージンで誘導が可能であるという結果を得た。

一方では初期経路角誤差が負の場合、飛行終盤で軌道の再計算を行うと、数%のオーダーではあるがかなり大きい燃料マージンが必要になるという結果も出ている。これは初期経路角誤差が負の場合、到達高度が低くなるため、再計算が遅いほど獲得すべき高度と速度が大きくなるためである。

初期経路角誤差が正の場合、飛行前半で軌道再計算を行うと、燃料マージンが負になる。これは初期経路角誤差が正の場合、到達高度が高くなるため、そのエネルギーを速度増分に利用することができるためである。これは最適操舵が初期経路に関して最適化されていないので、当然出現

する感度であり、本論分の意義を下げるものではない。

今回行った手法では軌道再計算でまったく新しい軌道 ($N=1$) を生成してしまうために、再計算後は最初に予定してあった最適軌道 ($N=4$) が生かされず、劣化させてしまうことになる。この解決方法としては、最適化すべき誘導パラメータ数をわずかに増加させればよいと考えられる。

また機体性能に誤差がある場合、軌道再計算を行っても再び軌道誤差を生じるため、飛行経路から機体性能を推定し、軌道再計算時に機体性能誤差を反映させる必要がある。これにより早期に軌道再計算を行うことで必要燃料マージンを少なくし、終端条件を満足する誘導を行うことができるようになる。

今後はより実用的な拘束条件のもとで最適制御問題を解き、擾乱や機体性能の推定誤差を考慮したよりロバストな誘導則を検討する必要がある。

参考文献

- 1) Kawaguchi, J. and Inaba, A.: A New Guidance Scheme for Vehicles Flying along the Aerodynamic Path, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, AIAA paper 2002-4903, August 2002.
- 2) 稲葉 歩: 空力上昇経路を飛行する飛翔体の誘導方法に関する一考察, 東京大学修士論文, 2002.
- 3) Wu, A.K. and Miele, A.: Sequential Conjugate Gradient-Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, J. Optim. Theory Appl., **50** (1980), pp.69-88
- 4) 加藤寛一郎: 工学的最適制御入門, 東京大学出版会, 東京, 1988.
- 5) 加藤寛一郎: スペースプレーン, 東京大学出版会, 東京, 1989.
- 6) Hargraves, C. R. and Paris, S. W.: Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation, J. Guid. Control, **10**, (1987), pp.338-342
- 7) 川邊博康: 滑空気のダイナミック・ソアリングによる最適飛行経路, 第 35 回飛行機シンポジウム, 1997.
- 8) 宇宙科学研究所将来型宇宙輸送システムワーキンググループ ATREX エンジンを用いた 2 段式スペースプレーンサブワーキンググループ: ATREX エンジンを用いた 2 段式スペースプレーンの開発研究提案書, 1998/6
- 9) 小林弘明: 二段式スペースプレーンのシステム統合設計に関する研究, 東京大学博士論文, 2001.
- 10) Optimization Toolbox (For Use with MATLAB) User's Guide, http://www.mathworks.com/access/helpdesk/jhelp/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf

Appendix

式 (6) のハミルトニアンを最適軌道に沿って時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\mathbf{x}, \phi, \lambda, t) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T + \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \end{aligned} \quad (A1)$$

第 2 項と第 4 項は相殺し、第 3 項は制御量の最適性条件よりゼロである。式 (6) よりハミルトニアンは陽に t を含まないので第 1 項もゼロである。よって、

$$\dot{H} = 0 \quad (A2)$$

より、最適軌道に沿ってハミルトニアン H は一定となる。未知量 t_f に対する条件において、終端状態量評価関数は $u(t_f)$ であり終端状態量拘束条件は燃料重量 $m_{\text{fuel}} = 0$ より

陽に t を含まないので、

$$H(t_f) = 0 \quad (A3)$$

よって式 (A2) より、

$$H(t) = 0 \quad (A4)$$

また制御量の最適性条件は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \phi} &= 0 \\ &= \cos \phi (-\lambda_u N + \lambda_v a + \lambda_u a_\phi + \lambda_v N_\phi) \\ &\quad - \sin \phi (\lambda_u a + \lambda_v N + \lambda_u N_\phi - \lambda_v a_\phi) \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{\lambda_v - \left(\frac{N - a_\phi}{a + N_\phi} \right) \lambda_u}{\lambda_u + \left(\frac{N - a_\phi}{a + N_\phi} \right) \lambda_v} \quad (A6)$$

ここで a_ϕ , N_ϕ は、

$$\begin{aligned} a_\phi &= L \cos \alpha + D \sin \alpha + L_\alpha \sin \alpha - D_\alpha \cos \alpha \\ &\approx N + L \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} N_\phi &= -L \sin \alpha + D \cos \alpha + L_\alpha \cos \alpha + D_\alpha \sin \alpha \\ &\approx T - a + L_\alpha \end{aligned} \quad (A8)$$

より、

$$\tan \phi \approx \frac{\lambda_v - \left(\frac{L}{T + L_\alpha} \right) \lambda_u}{\lambda_u + \left(\frac{L}{T + L_\alpha} \right) \lambda_v} \quad (A9)$$

実効推力 a , 実効揚力 N は共に迎角の関数であるが、ここでは迎角に対する依存性が低いとし、姿勢角 ϕ に対する依存性を無視すると式 (7) が得られる。

随伴変数の微分方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\dot{\lambda}_x = 0 \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_y &= -\lambda_u \left(\frac{\partial a}{\partial y} \cos \phi - \frac{\partial N}{\partial y} \sin \phi \right) \\ &\quad - \lambda_v \left(\frac{\partial a}{\partial y} \sin \phi + \frac{\partial N}{\partial y} \cos \phi \right) \end{aligned} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\lambda_x - \lambda_u \frac{\partial}{\partial u} (a \cos \phi - N \sin \phi) \\ &\quad - \lambda_v \frac{\partial}{\partial u} (a \sin \phi + N \cos \phi) \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_v &= -\lambda_y - \lambda_u \frac{\partial}{\partial v} (a \cos \phi - N \sin \phi) \\ &\quad - \lambda_v \frac{\partial}{\partial v} (a \sin \phi + N \cos \phi) \end{aligned} \quad (A13)$$

随伴変数の終端境界条件より x に関する終端拘束条件は定義されないため、 $\lambda_x(t_f) = 0$ であるから式 (8) を得る。また実効推力及び実効揚力は式 (5) に見られるように推力や揚力と同様に動圧に比例することが分かる。大気密度の分布に λ_h を scaling height とする次のような指数関数モデルを仮定する。

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{y}{\lambda_h}\right) \quad (A14)$$

$$\therefore \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{a}{\lambda_h} \quad (A15)$$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{N}{\lambda_h} \quad (A16)$$

これより式 (A11) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_y &= \frac{1}{\lambda_h} \{ \lambda_u (a \cos \phi - N \sin \phi) + \lambda_v (a \sin \phi + N \cos \phi) \} \\ &= \frac{1}{\lambda_h} \{ H - (\lambda_x u + \lambda_y v - \lambda_v g) \} \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

式 (A4), 式 (8) 及び近似的に重力の効果を無視すれば次のような方程式が得られる。

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{v}{\lambda_h} \lambda_y \quad (\text{A18})$$

この式より, 式 (9) が得られる。

次に式 (8) を式 (A12) に代入して,

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\lambda_u (a_u \cos \phi - N_u \sin \phi - a \phi_u \sin \phi - N \phi_u \cos \phi) \\ &\quad - \lambda_v (a_u \sin \phi + N_u \cos \phi + a \phi_u \cos \phi - N \phi_u \sin \phi) \\ &= -\cos \phi (\lambda_u a_u + \lambda_v N_u) + \sin \phi (\lambda_u N_u - \lambda_v a_u) \\ &\quad + \phi_u [-\cos \phi (-\lambda_u N + \lambda_v a) + \sin \phi (\lambda_u a + \lambda_v N)] \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

近似式 (7) より [...] 内はゼロ, また $N/a = \chi = \text{const}$ と仮定すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{N}{a} \right) = \frac{\dot{N}a - N\dot{a}}{a^2} = 0 \quad (\text{A20})$$

$$\therefore \frac{\dot{N}}{\dot{a}} = \frac{N}{a} \left(= \frac{N_u}{a_u} \right) \quad (\text{A21})$$

よって近似式 (7) より

$$\lambda_u N_u - \lambda_v a_u = -\tan \phi (\lambda_u a_u + \lambda_v N_u) \quad (\text{A22})$$

が得られる。これを式 (A19) に代入すると,

$$\dot{\lambda}_u = \left(-\frac{1}{\cos \phi} \right) (\lambda_u a_u + \lambda_v N_u) \quad (\text{A23})$$

ここで $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ とすると, 迎角微小近似を用いて,

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial}{\partial V} = \frac{u}{V} \frac{\partial}{\partial V} = \cos \gamma \approx \cos \phi \frac{\partial}{\partial V} \quad (\text{A24})$$

また運動方程式 (1)~(4) より,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{x} \left(a \frac{\dot{x}}{V} - N \frac{\dot{y}}{V} \right) + \dot{y} \left(a \frac{\dot{y}}{V} + N \frac{\dot{x}}{V} \right) - \dot{y}g \quad (\text{A25})$$

$$V\dot{V} = Va - \dot{y}g \quad (\text{A26})$$

$$\therefore \dot{V} = a - g \sin \phi \approx a \quad (\text{A27})$$

これより微分記号を次のように定義する。

$$\frac{\partial}{\partial V} = \left(\frac{dV}{dt} \right)^{-1} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\dot{V}} \frac{d}{dt} \approx \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \quad (\text{A28})$$

$$a' \equiv \frac{\partial a}{\partial V} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{d}{dt} (\ln a) \quad (\text{A29})$$

$$N' \equiv \frac{\partial N}{\partial V} = \frac{N \dot{N}}{a \dot{N}} = \frac{N}{a} \frac{d}{dt} (\ln N) \quad (\text{A30})$$

よって式 (A23) は次のように変形できる。

$$\dot{\lambda}_u \approx -a' \lambda_u - N' \lambda_v \quad (\text{A31})$$

同様の手順により, 式 (A13) から次式を求めることができる。

$$\dot{\lambda}_v \approx -\lambda_y - a' \lambda_v + N' \lambda_u \quad (\text{A32})$$

式 (A31),(A32) をまとめると次のようになる。

$$\dot{\lambda} = B\lambda + b \quad (\text{A33})$$

$$\begin{cases} \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} -a' & -N' \\ N' & -a' \end{pmatrix} \\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_y \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{A34})$$

ここで $N/a = \chi = \text{const}$ を仮定しているため, 係数行列 B が書き換えられて次のような微分方程式になる。

$$\dot{\lambda} = \frac{dA}{dt} \lambda + b \quad (\text{A35})$$

$$A = \begin{pmatrix} -\ln a & -\chi \ln N \\ \chi \ln N & -\ln a \end{pmatrix} \quad (\text{A36})$$

推力や揚力, 抗力は動圧で無次元化されるため, $N/a = \text{const}$ とは無次元化係数 C_a, C_N の比が一定であることを意味する。共に迎角の関数であるため実際にはこの仮定は成り立たないが, ここでは迎角に対する依存性が低いとしている。式 (A35), 式 (A36) の関係は本論文で初めて示されるものである。

微分方程式 (A35) の解を求めると,

$$\lambda(t) = e^{(A(t)-A(t_0))} \lambda(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(A(t)-A(\tau))} b d\tau \quad (\text{A37})$$

となり, 遷移行列 $\Phi(t, t_0)$ を次式のようにおくと, 式 (10) を得ることができる。

$$\Phi(t, t_0) = e^{(A(t)-A(t_0))} \quad (\text{A38})$$

ここで,

$$A(t) - A(t_0) = \begin{pmatrix} -\ln \frac{a(t)}{a(t_0)} & -\chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} \\ \chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} & -\ln \frac{a(t)}{a(t_0)} \end{pmatrix} \quad (\text{A39})$$

より, 行列 $A(t) - A(t_0)$ の個有値は,

$$s = -\ln \frac{a(t)}{a(t_0)} \pm i\chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} \quad (\text{A40})$$

となる。行列 A は 2×2 の行列なので, α_0, α_1 を未知数とし, 各個有値に対して次式を満たす α_0, α_1 を求める。

$$e^s = \alpha_0 + \alpha_1 s \quad (\text{A41})$$

式 (A40) を代入して解くと,

$$\alpha_0 = \frac{a(t_0)}{a(t)} \cdot \left(\cos \chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} + \frac{\ln \frac{a(t)}{a(t_0)}}{\chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)}} \sin \chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} \right) \quad (\text{A42})$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{a(t_0)}{a(t)}}{\chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)}} \sin \chi \ln \frac{N(t)}{N(t_0)} \quad (\text{A43})$$

よって,

$$e^{(A(t)-A(t_0))} = \alpha_0 + \alpha_1 A \quad (\text{A44})$$

より式 (11) を得る。