

# 非线性系统的 LSSVM 联合逆控制器

穆朝絮, 梁瑞鑫, 李训铭

(河海大学电气工程学院, 南京 210098)

**摘要:** 为获得非线性系统的逆系统, 提出一种非线性系统的最小二乘支持向量机联合逆控制器, 介绍联合逆控制器和原非线性系统的整体架构, 实现对非线性系统的线性化解耦控制, 仿真结果表明, 使用最小二乘支持向量机的辨识联合逆控制器模型精度高, 具有较好的泛化能力, 且有一定实际应用价值。

**关键词:** 最小二乘支持向量机; 联合逆控制器; 辨识; 解耦

## Allied Inverse Controller for LSSVM in Nonlinear Systems

MU Chao-xu, LIANG Rui-xin, LI Xun-ming

(School of Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098)

**【Abstract】** In order to obtain inverse system of nonlinear systems, a novel method of allied inverse controller for Least Squares Support Vector Machine(LSSVM) in nonlinear systems is proposed. The whole structures of allied inverse controller and original system are introduced. The linear decoupling control is implemented. Simulation experimental results show that the identification of the allied inverse controller by using LSSVM provides satisfactory performance with excellent accuracy, the generalization is also very strong, and has the values of application.

**【Key words】** Least Squares Support Vector Machine(LSSVM); allied inverse controller; identification; decoupling

### 1 概述

逆系统方法在物理概念上清晰直观, 基于右逆系统的反馈线性化方法得到广泛应用。在非线性的数学模型已知的情况下, 对逆系统方法已经建立了较完备的设计理论, 如文献[1]提出多变量非线性逆系统的理论和控制方法, 但是右逆控制器的实现通常需要反馈某些状态变量, 因此, 系统状态信息的获取成为右逆控制器实现的关键, 然而在一些工程实际中, 由于测量设备在经济性和技术性上的限制, 使得某些状态变量难以直接测量, 而构建右逆控制器必须包含这些变量的反馈, 限制了逆系统方法的应用。文献[2-3]对非线性系统提出神经网络  $\alpha$  阶逆系统的实现方法, 并将其成功地应用到机器人控制、生物发酵和电力系统中。神经网络虽然有较好的非线性逼近能力, 但是存在着结构选择问题、局部极小问题等。

支持向量机(SVM)是种新型机器学习算法, 它在经验风险最小化的基础上采用结构风险最小化准则, 与传统的神经网络方法相比, 能很好地解决小样本、非线性、高维数、局部极小等实际问题, 而且推广能力有理论保障<sup>[4]</sup>。文献[5]在标准 SVM 的基础上, 提出 LSSVM 方法。LSSVM 求解的是线性方程组, 极大地减少了 SVM 由于求解二次规划问题带来的计算复杂性, 而且拟和精度更高, 训练时间更短。

本文对要反馈不直接可测状态变量的右逆控制器, 采用 LSSVM 联合逆控制器方法。由左逆软测量函数和右逆系统构建联合逆控制器, 由 LSSVM 离线训练拟和联合逆控制器模型。将辨识出的联合逆控制器模型与原非线性系统串联, 实现非线性系统的线性化解耦。

### 2 非线性系统的逆系统

逆系统分为左逆系统和右逆系统。左逆系统由系统当前的输出及各阶导数信息来判断系统当前的输入, 具有观测器

的作用。右逆系统则是将原系统的某些期望输出作为右逆系统的输入, 来产生需要加到原系统的输入端的控制信号。

#### 2.1 左逆系统软测量

考虑非线性系统  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $u \in R^q$  是直接可测的参变量,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为状态变量,  $f: R^{n+p} \rightarrow R^n$  是以  $(x, u)$  为变量的函数, 其中,  $l$  个不直接可测状态  $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_l)^T$ ,  $(n-l)$  个直接可测状态  $\bar{x} = (x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n)^T$ ,  $t$  个关于状态变量  $x$  的函数  $h_i = h_i(x), i = 1, 2, \dots, t$ , 函数对应的变量直接可测, 记为  $h = (h_1, h_2, \dots, h_t)^T$ 。令  $z = (z_1, z_2, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+n-l})^T$ ,  $z_i = \begin{cases} h_i & 1 \leq i \leq t \\ x_{i-t} & t+1 \leq i \leq t+n-l \end{cases}$ 。如下求左逆软测量函数, 获得不可测变量的估计:

(1) 求  $\frac{\partial z}{\partial \hat{x}^T} = \frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+n-l})^T}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_l)}$  和它的秩。若

$rank(\frac{\partial z}{\partial \hat{x}^T}) = l$ , 由反函数定理知, 可从  $z$  中选取  $l$  个无关向量, 记为  $g_1, g_2, \dots, g_l$ , 假设存在的不明确的非线性关系用函数  $\phi$  表示, 则左逆软测量函数表示为  $\hat{x} = \phi(g_1, g_2, \dots, g_l)$ , 算法结束; 若  $rank(\frac{\partial z}{\partial \hat{x}^T}) < l$ , 需要引入变量的导数信息来构建左逆软测量函数, 算法继续。

(2) 对  $z$  的第 1 个分量  $z_1$  求一阶导数, 设  $z_1 = z_1(x)$ ,  $\dot{z}_1 = \frac{\partial z_1(x)}{\partial \hat{x}^T} \dot{\hat{x}} = \dot{z}_1(x)$ , 由于  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $\dot{z}_1$  可能包含输入  $u$  及其导数, 因此逆系统的构建就不可避免引入输入的自反馈, 系统的估计误差将会严重放大。为避免左逆软测量函数中出现

**基金项目:** 教育部博士点专项基金资助项目(20070286001)

**作者简介:** 穆朝絮(1984-), 女, 硕士, 主研方向: 智能控制, 机器学习; 梁瑞鑫, 硕士; 李训铭, 教授

**收稿日期:** 2009-02-05 **E-mail:** cxmu@hhu.edu.cn

输入  $u$  及其导数, 对  $z_i$  求导如果出现  $u$ , 则将此次求导结果舍去, 继续下一步。不妨设  $z_i$  的一阶导数均未出现  $u$ , 以下类似处理。求  $\frac{\partial z_{(1)}}{\partial x^T}$ ,  $z_{(1)} = (z_1, \dot{z}_1, z_2, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+n-1})^T$ 。若  $\text{rank}(\frac{\partial z_{(1)}}{\partial x^T}) = l$ , 从  $z_{(1)}$  中选取  $l$  个无关向量, 记为  $g_1, g_2, \dots, g_l$ , 则  $\hat{x} = \phi(g_1, g_2, \dots, g_l)$ , 算法结束; 否则表明需要引入更多变量的导数信息来构建左逆软测量函数, 算法继续到下一步。

(3) 求  $z$  的第 2 个分量  $z_2$  的一阶导数, 求解方法同上。

由于在实际系统中高阶导数反馈难以实现, 因此算法到此结束。

## 2.2 右逆系统

SISO 的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = d(x, u) \end{cases}, (x_0, u_0) = (x(t_0), u(t_0)), t = t_0 \quad (1)$$

记  $y^{(k)}(x, u) = d_k(x, u)$  为  $y = d(x, u)$  对时间  $t$  的  $k$  阶导数, 如果存在非负整数  $\alpha$  在点  $(x_0, u_0)$  的某个邻域内所有  $x, u$  满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial d_r(x, u)}{\partial u} = 0 & r = 0, 1, \dots, \alpha - 1 \\ \frac{\partial d_r(x, u)}{\partial u} \neq 0 & r = \alpha \end{cases} \quad (2)$$

则 SISO 非线性系统在  $(x_0, u_0)$  的邻域内存在相对阶  $\alpha$ 。SISO 非线性系统在  $(x_0, u_0)$  的邻域内右可逆的充要条件是在此邻域内存在相对阶  $\alpha$  [2]。

对 SISO 非线性系统的求右逆系统: 对输出  $y$  求导, 直到在  $y$  的  $r$  阶导数中首次显含输入  $u$ , 记  $Y = y^{(r)}(x, u)$ , 满足  $\text{rank}(\frac{\partial Y}{\partial u}) \neq 0$ , 系统的相对阶  $\alpha = r$ , 系统是右可逆的, 反解出右逆系统的输出  $u$ , 则 SISO 系统右逆模型为  $u = \psi(x, y^{(r)})$ 。

## 3 LSSVM 回归算法

设样本是  $p$  维向量, 对于给定  $N$  个数据对  $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ , 输入数据  $x_i \in R^p$ , 输出数据  $y_i \in R$ 。用非线性映射  $\phi$  把样本从原空间映射到特征空间, LSSVM 的模型为  $f(x) = w^T \phi(x) + b$ , 其中, 非线性映射  $\phi(\cdot)$  是将输入数据映射到高维特征空间的非线性函数关系, 利用结构风险最小化原则寻找  $w$ ;  $b$  是最小化目标函数  $J = \frac{1}{2} \|w\|^2 + CR_{emp}$ , 其中,  $w$  为权重系数;  $C$  为正则化参数;  $R_{emp}$  为损失函数。LSSVM 在目标函数中选取损失函数为误差的二次方  $e_i^2$ 。函数的最优估计表达式如下 [5]:

$$J = \min \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (3)$$

s.t.  $y_i = w^T \phi(x_i) + b + e_i; i = 1, 2, \dots, N$

上述优化问题的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} w^T w + C \sum_{i=1}^N e_i^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i [y_i - w^T \phi(x_i) - b - e_i] \quad (4)$$

其中,  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$  是拉格朗日乘子。对拉格朗日函数求偏导可得:

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(x_i); \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0; \alpha_i = Ce_i; \quad (5)$$

$$w^T \phi(x_i) + b + e_i - y_i = 0$$

定义满足 Mercer 条件的函数  $k(x_i, x) = \phi(x_i)^T \phi(x)$  为核函数。LSSVM 拟和的非线性模型表示为

$$y(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i k(x, x_i) + b \quad (6)$$

## 4 LSSVM 联合逆控制器方法

右逆系统的构造需要反馈原系统状态  $x$ , 而原系统有不

可直接测量状态  $\hat{x}$ 。非线性系统的不直接可测变量是直接可测变量及其低阶导数的函数, 采用左逆软测量函数的方法获得不可测状态的  $\hat{x}$  的函数估计。但这个函数关系的解析表达难以得到, 而且不直接可测变量的数据难以采集, 也不能直接进行非线性拟和。所以, 将左逆软测量函数  $\hat{x} = \phi(g_1, g_2, \dots, g_l)$  代入右逆系统  $u = \psi(x, y^{(r)})$ , 得到一个联合逆控制律  $\hat{u} = \bar{\psi}(\bar{x}, g_1, g_2, \dots, g_l, y^{(r)})$ , 符号  $\bar{\psi}$  表示由  $\phi$  和  $\psi$  复合的一种非线性关系。这既解决了左逆软测量函数中非线性关系难以描述的问题, 又解决了右逆系统构造中需要反馈未知参数的问题。联合逆控制器中的变量均直接可测, 可以采用 LSSVM 来拟和, 得到 LSSVM 联合逆控制器模型。该方法的步骤归纳如下:

(1) 确定联合逆控制器的输入输出变量, 获得原非线性系统相关状态变量和输入输出的数据。对数据进行求导、归一化等预处理。

(2) 确定训练数据集和测试数据集。选择 LSSVM 拟和的正则化参数  $C$ , 核及核参数。

(3) 利用所选的参数和训练集, 进行 LSSVM 回归训练, 建立 LSSVM 联合逆控制器模型。

(4) 用测试集对联合逆控制器模型进行泛化性测试。

若原非线性系统可逆, 联合逆控制器表示为:  $\hat{u} = \bar{\psi}(g_1, g_2, \dots, g_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n, y^{(r)})$ , 其中,  $y^{(r)}$  是对原系统的期望输出进行  $r$  次微分得到的, 作为联合控制器的输入, 可测变量  $g_1, g_2, \dots, g_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n$  直接从原系统测量得到。设训练数据共有  $N$  组, 用  $Y_i$  表示第  $i$  组联合逆控制器模型的输入, 则  $Y_i = (g_{1i}, g_{2i}, \dots, g_{li}, x_{(l+1)i}, x_{(l+2)i}, \dots, x_{ni}, y_i^{(r)})$ ,  $u_i$  表示第  $i$  组联合逆控制器的输出, LSSVM 离线训练的样本集为  $(Y_i, u_i)$ 。联合逆控制器模型为  $\hat{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i k(Y, Y_i) + b$ 。图 1 为 LSSVM 辨识联合逆控制器的原理图。

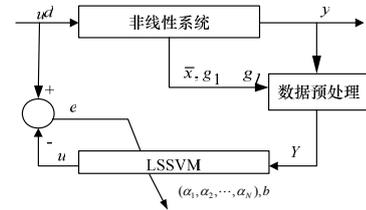


图 1 LSSVM 联合逆控制器模型

## 5 仿真实验

非线性系统微分方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 314.16 \\ \dot{x}_2 = 216 - 0.63x_2 - 35.86x_3 \sin x_1 + 11.23 \sin(2x_1) \\ \dot{x}_3 = 0.1u - 0.27x_3 + 0.17 \cos x_1 \\ y = \sqrt{0.51 \sin^2 x_1 + (0.76x_3 + 0.24 \cos x_1)^2} \end{cases} \quad (7)$$

其中, 状态变量  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , 状态变量  $x_2$  可测,  $(x_1, x_3)$  不可测,  $u$  为系统输入,  $y$  为系统输出。

首先构造此非线性系统的右逆系统, 对输出  $y$  求一阶导数  $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_3} \dot{x}_3 = \dot{y}(x_1, x_2, x_3, u)$ , 由于  $\partial \dot{y} / \partial u \neq 0$ , 系统的相对阶  $\alpha = 1$ 。原非线性系统存在右逆系统, 表示为  $u = \psi(x_1, x_2, x_3, \dot{y})$ ,  $\dot{y}$  作为右逆系统的输入。右逆系统的构造需要反馈变量  $(x_1, x_3)$ , 而变量  $(x_1, x_3)$  不可测, 需要通过左逆软测量获得不可测变量的非线性关系。

根据左逆软测量算法，定义  $z = (z_1, z_2)^T = (x_2, y)^T$  计算：

$$\frac{\partial z}{\partial \hat{x}^T} = \frac{\partial (x_2, y)^T}{\partial (x_1, x_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{得:}$$

$\text{rank}\left(\frac{\partial (x_2, y)^T}{\partial (x_1, x_3)}\right) = 1 < l$ ，需要引入  $\dot{x}_2$  来构造模型，同样定义

$z_{(1)} = (x_2, \dot{x}_2, y)^T$ ，计算：

$$\frac{\partial z_{(1)}}{\partial \hat{x}^T} = \frac{\partial (x_2, \dot{x}_2, y)^T}{\partial (x_1, x_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{pmatrix} \text{得:}$$

$\text{rank}\left(\frac{\partial (x_2, \dot{x}_2, y)^T}{\partial (x_1, x_3)}\right) = 2$ ，其秩和不可测量变量的数目相等。

将左逆软测量函数模型代入右逆系统模型  $u = \psi(x_1, x_2, x_3, \dot{y})$  中得到一个联合逆系统控制律  $\hat{u} = \bar{\psi}(x_2, \dot{x}_2, y, \dot{y})$ 。符号  $\bar{\psi}$  表示由  $\phi$  和  $\psi$  复合的一种非线性关系。由于联合逆控制器中的变量都是可以直接测量的，通过 LSSVM 获得联合逆控制器模型。图 2 为含有 LSSVM 联合逆控制器复合系统闭环控制结构。

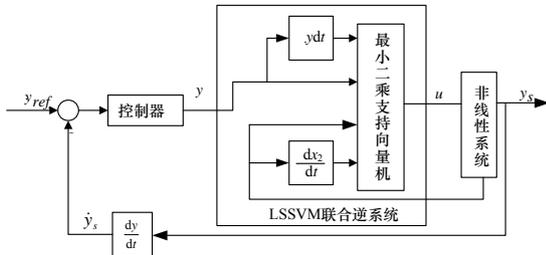


图 2 含有联合逆控制器的复合系统闭环控制结构

采用变幅值方波信号为原系统的激励信号，采样时间是  $10^3$  s，采样周期为 0.1 s，得到  $10^4$  组  $(x_2, y, u)$  数据，对数据集进行预处理，得到样本集  $(x_2, \dot{x}_2, y, \dot{y}, u)$ 。这  $10^4$  组数据前 5000 组作为训练样本，后 5000 组作为测试样本。对训练样本以间隔 5 取出 1000 组数据用于 LSSVM 训练，正则化参数  $C = 100$ ，核函数选 RBF 核函数，核参数  $\sigma^2 = 3$ ，训练得到 LSSVM 联合逆控制器模型，训练时间为 19.85 s。图 3 是联合逆控制器模型辨识曲线。

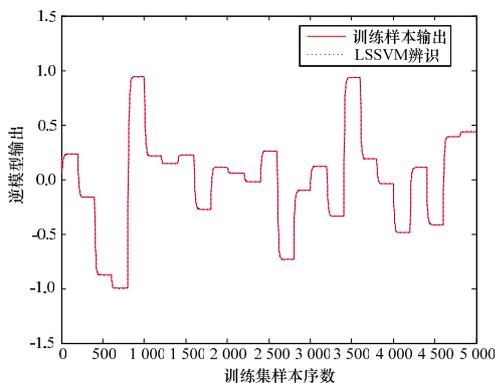


图 3 LSSVM 联合逆控制器模型辨识曲线

用测试集对模型进行测试，模型测试曲线如图 4 所示。从图 4 可以看到，LSSVM 联合逆控制器模型测试结果和实际值符合的较好，误差都很小。表 1 给出了训练和测试的绝对平均误差(MAE)和均方根误差(RMSE)。误差指标的计算公式如下：

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |y_j - \hat{y}_j|; RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2} \quad (8)$$

说明用 LSSVM 来辨识非线性联合逆控制器模型，辨识能力强度高，泛化性能也较好。

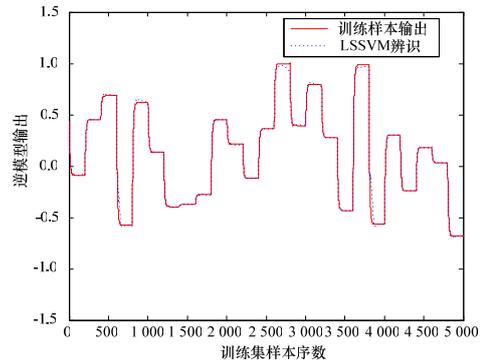


图 4 LSSVM 联合逆控制器模型测试曲线

表 1 联合逆控制器模型辨识和测试结果

	绝对平均误差	均方根误差	训练时间/s
训练	$1.455 \times 10^{-3}$	$8.043 \times 10^{-3}$	19.85
测试	$8.592 \times 10^{-3}$	$3.966 \times 10^{-4}$	-

将辨识出的 LSSVM 联合逆控制器串连到原非线性系统模型之前，构成伪线性复合系统。伪线性复合系统是 1 阶积分系统。对此复合系统施加阶跃输入信号，为便于比较，复合系统的期望输出是标准的一阶积分系统在输入信号下的输出响应。

图 5 为复合系统仿真，复合系统是一个开环系统，它基本实现了输入输出的线性化，但有小幅振荡。对此复合系统进行 PID 闭环控制，可以得到较好的线性化效果，图 6 为复合系统闭环控制仿真。

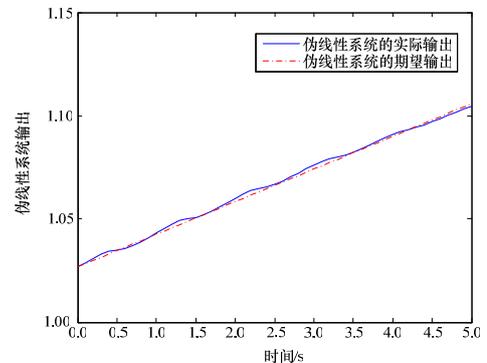


图 5 复合系统开环仿真

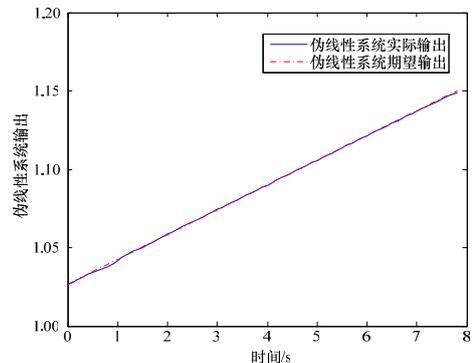


图 6 复合系统 PID 闭环控制仿真

(下转第 186 页)