

共振增强的量子效应初步研究*

闫二艳^{1,2}, 孟凡宝², 马弘舸²

(1. 中国工程物理研究院 研究生部, 北京 100088; 2. 中国工程物理研究院 应用电子学研究所, 四川 绵阳 621900)

摘要: 利用量子效应原理分析了波包在势阱中的传输, 通过分类讨论得出了出现共振透射现象的条件。将其与已有高功率微波孔缝耦合的数值模拟和实验结果相比较发现, 其共振条件和使用数值模拟和实验得到的共振条件基本一致, 即垂直入射电场分量的缝(或边)为入射半波长的整数倍时会出现共振增强现象。不仅验证了已有的高功率微波孔缝耦合数值模拟和实验结果, 而且有助于解释一些复杂电子系统高功率微波效应实验中出现的强耦合现象。

关键词: 量子效应; 共振透射; 共振效应; 增强效应; 缝隙耦合

中图分类号: O413 **文献标志码:** A

高功率微波效应是高功率微波源应用技术的主要研究内容之一, 它为微波源参数的设计提供依据。国外关于高功率微波效应研究已开展了多年, 近年来, 国内一些科研单位对高功率微波效应的研究也做了不少的工作, 具有一定的成效。高功率微波一般可以通过“前门”和“后门”耦合到电子学系统中去, 特别是通过耦合使能量集中到一些敏感的结点上, 使内部电路功能产生混乱, 严重时能够损坏敏感电子设备。电子系统中有些特殊的结点与孔缝的位置、电路板导线的形状和布置、元器件的布置以及元器件本身结构有密切关系, 不同情况结果将有很大变化。

研究人员对微波脉冲与孔缝、线缆、孔洞等耦合进行了时域有限差分方法(FDTD)研究^[1-6], 然而, 随着孔洞变成了窄缝, 通常使用 FDTD 方法, 要求空间网格划分小于缝隙的宽度, 大量的空间网格划分, 使得在时间和计算上花费巨大。特别地, 对于电子线路上出现的强耦合现象(类似共振增加), 一个较复杂的电子系统可能存在多个共振频率带。为了更好地理解和进一步研究共振增加现象, 本文采用一种与以往不同的方法——量子效应来分析强耦合现象。

考虑到电磁波的分量在空间传播时, 遇到类似势垒或势阱, 在垒壁或阱壁处会出现反射和透射, 满足一定条件时, 就会出现能量叠加即场增强现象。本文借助量子效应原理, 应用势阱和势垒的物理思想, 从理论上探讨电磁波在势阱里的量子共振透射规律, 从而帮助理解高功率微波效应中出现的强耦合现象。

1 模型与理论基础

质量为 m , 具有一定能量 E 的一束粒子, 沿 x 轴正方向射向方势阱, 如图 1(a)和图 1(b)所示; 其中, 势阱深度 $-V_0 < 0$, a 为势阱宽度。当能量 E 满足图 1(a)时, 在势阱外, 粒子不存在, 即经典禁区, 粒子只能在方势阱中运动和存在, 不能离开方势阱运动。但是如果将粒子看成是波函数, 这个粒子既可能在方势阱中运动和存在, 也可能在方势阱以外的区域运动和存在, 两者只是在概率上有所不同。也就是说, 无论方势阱内外的势能差值有多大, 粒子的波函数都是有可能逃离的。其中, 当能量 E 满足图 1(b)时的粒子在阱壁不仅做反射运动, 同时也有透射, 即势阱的量子透射, 而且一定条件下会产生阱内透射系数 $T=1$ 的共振透射现象^[7-8]。

波函数的变化遵从 Schrödinger 方程, 定态的 Schrödinger 方程为

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi = 0 \quad (1)$$

式中: V 为势能; $\hbar = h/2\pi$, h 为普朗克常数; Ψ 为波函数。

电磁波传播属于 Helmholtz 方程求解问题, 此时, 电场 E_1 的 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 E_1 + k^2 E_1 = 0 \quad (2)$$

这里, 为了区分电场分量和粒子能量, 将电场写为 E_1 , 观察方程(1)和方程(2), 其形式非常相似, 在半经典

* 收稿日期: 2008-09-23; 修订日期: 2009-03-26

基金项目: 国家高技术发展计划项目

作者简介: 闫二艳(1978—), 女, 博士研究生, 主要从事高功率微波效应机理研究; yaneryan_2002@163.com。

限制条件下,可以用电磁波的波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 代替电场 \mathbf{E}_1 或磁场 \mathbf{H} 。但是,波函数只是个数学工具,没有具体的物理意义,而电场和磁场是有实际物理意义的量。

2 波包在势阱中的传播情况分析

在系统或设备内部,由于元器件、电路板、内部子系统之间的位置关系、元器件本身结构以及孔缝的位置、大小、形状等,可以形成各种各样的势垒和势阱,电磁波遇见时,就会发生散射和透射。利用量子力学势阱透射来处理电磁波传播的有限深方势阱问题。在这里,将在 Hartman 研究粒子穿越势垒所需要时间的基础上^[9],详细分析电磁波在 1 维方势阱中的传播情况,可以通过图 1 两种情况来讨论。

如图 1 所示,具有一定能量 E 的电磁波,沿 x 轴正方向以恒定速度射向方势阱,则势阱势能表达式为

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -V_0, & 0 < x < a \\ 0, & x > a \end{cases} \quad (3)$$

即将作用区域分为 3 个区,依次为入射区、反射区,势阱区和传输(透射)区。空间辐射远场区按平面波处理。根据量子效应,得到

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x) \right] \Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad (4)$$

根据波函数的性质,在任一时刻 t 处, Ψ 和 $\partial\Psi/\partial x$ 都是连续的,其形式为

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} \varphi_1(x, t) + \chi_1(x, t), & x \leq 0 \\ \varphi_2(x, t) + \chi_2(x, t), & 0 < x < a \\ \varphi_3(x, t), & a \leq x \end{cases} \quad (5)$$

其中:对应图 1(a) ($0 \leq E \leq V_0$), 方程(5)对应的表达式分别为

$$\varphi_1(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^\epsilon f(k_1 - k_0) \exp \left\{ i \left[k_1(x + x_0) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (6a)$$

$$\chi_1(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^\epsilon f(k_1 - k_0) B_1(k_1) \exp \left\{ i \left[k_1(-x + x_0) + \beta_1(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (6b)$$

$$\varphi_2(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^\epsilon f(k_1 - k_0) A_2(k_1) \exp \left[k_2'x + ik_1x_0 + i\alpha_2(k_1) - \frac{iE(k_1)t}{\hbar} \right] dk_1 \quad (6c)$$

$$\chi_2(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^\epsilon f(k_1 - k_0) B_2(k_1) \exp \left[-k_2'x + ik_1x_0 + i\beta_2(k_1) - \frac{iE(k_1)t}{\hbar} \right] dk_1 \quad (6d)$$

$$\varphi_3(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^\epsilon f(k_1 - k_0) A_3(k_1) \exp \left\{ i \left[k_1(x + x_0) + \alpha_3(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (6e)$$

其中

$$\begin{aligned} A_3(k_1) &= 2k_1k_2'F(k_1) \\ B_1(k_1) &= (k_1^2 + k_2'^2) \sinh(ak_2')F(k_1) \\ F(k_1) &= [4k_1^2k_2'^2 \cosh^2(ak_2') + (k_1^2 - k_2'^2)^2 \sinh^2(ak_2')]^{-1/2} \\ \alpha_3(k_1) &= \arctan \{ [(k_1^2 - k_2'^2)/2k_1k_2'] \tanh(ak_2') \} - ak_1 \\ \beta_1(k_1) &= \arctan \{ [-2k_1k_2' / (k_1^2 - k_2'^2)] \coth(ak_2') \} \end{aligned} \quad (6f)$$

对应图 1(b) ($E \geq 0$), 方程(5)对应的表达式为

$$\varphi_1(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} f(k_1 - k_0) \exp \left\{ i \left[k_1(x + x_0) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (7a)$$

$$\chi_1(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} f(k_1 - k_0) D_1(k_1) \exp \left\{ i \left[k_1(-x + x_0) + \delta_1(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (7b)$$

$$\varphi_2(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} f(k_1 - k_0) C_2(k_1) \exp \left\{ i \left[k_2x + k_1x_0 + \gamma_2(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar} \right] \right\} dk_1 \quad (7c)$$

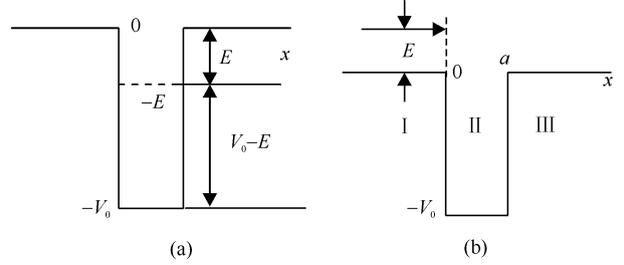


Fig. 1 Schematic diagram of electromagnetic wave transmitting one-dimensional potential well

图 1 1 维势阱示意图

$$\chi_2(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} f(k_1 - k_0) D_2(k_1) \exp\left\{i\left[-k_2 x + k_1 x_0 + \delta_2(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar}\right]\right\} dk_1 \quad (7d)$$

$$\varphi_3(x, t) = \frac{1}{\Delta k (2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} f(k_1 - k_0) C_3(k_1) \exp\left\{i\left[k_1(x + x_0) + \gamma_3(k_1) - \frac{E(k_1)t}{\hbar}\right]\right\} dk_1 \quad (7e)$$

其中

$$\begin{aligned} C_3(k_1) &= 2k_1 k_2 G(k_1) \\ D_1(k_1) &= (k_1^2 - k_2^2) \sin(ak_2) G(k_1) \\ G(k_1) &= [4k_1^2 k_2^2 \cos^2(ak_2) + (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2(ak_2)]^{-1/2} \\ \gamma_3(k_1) &= \arctan\{[(k_1^2 + k_2^2)/2k_1 k_2] \tan(ak_2)\} - ak_1 \\ \delta_1(k_1) &= \arctan\{[-2k_1 k_2 / (k_1^2 - k_2^2)] \cot(ak_2)\} \end{aligned} \quad (7f)$$

且

$$\begin{aligned} k_1 &= [2mE(k_1) / \hbar^2]^{1/2} \\ k_2 &= \{2m[E(k_1) + V_0] / \hbar^2\}^{1/2} = [k_1^2 + \epsilon^2]^{1/2} \\ k_2' &= \{2m[V_0 - E(k_1)] / \hbar^2\}^{1/2} = [\epsilon^2 - k_1^2]^{1/2} \\ \epsilon &= [2m_0 V_0 / \hbar^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

式中： $E(k_1)$ 是粒子的总能量； ϵ 为对应于本征值的势阱高度； A, B, C, D 表示模值； $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表示相位。为方便计算入射波的系数取为 1，高斯权函数为

$$f(k_1 - k_0) = \exp[-(k_1 - k_0)^2 / 2(\Delta k)^2] \quad (9)$$

式中： Δk 代表波包的能量值在能量平均值 E_0 周围的扩展特性， E_0 对应于 $k_0 = [2mE_0 / \hbar^2]^{1/2}$ 。

φ_1 为入射波包， χ_1 为反射波包， φ_3 为传输波包（透射波包），要通过公式(6)和(7)求出入射波包、反射波包和传输波包的解析解，是非常困难的，但是，可以通过分析传输波包的被积函数中的模值和相位的物理特性来分析其物理性质。

从公式(6)中可以看出，当 $E \leq V_0$ （对应于图 1(a)）时，传输波包 $\varphi_3(x, t)$ 被积函数中的模为 $f(k_1 - k_0)A_3(k_1)$ ，其中 $A_3(k_1)$ 为传输系数的平方根，根据公式(6)，得到 $A_3(k_1)$ 在不同势阱宽度 a 和波数 k_1 处的值以及 $k_0 = 0.6\epsilon, \Delta k = 0.1k_0$ 时 $f(k_1 - k_0)$ 的关系图，如图 2(a) 所示，此处参数 a 以 $1/\epsilon$ 为基本单位。

从图中可以看出，当势阱宽度非常小时 ($a\epsilon \ll 1$)， $A_3(k_1)$ 基本为常数，接近 1（除了在 $k_1 \ll \epsilon$ 处）。因此当 k_0/ϵ 不太接近零时，函数 $f(k_1 - k_0)A_3(k_1)$ 在靠近 k_0 处有最大值。随着势阱宽度的增加（除了在 k_0/ϵ 接近 1 处），波包的传输系数仍然很小。因此，在 $k_1 < \epsilon$ 区域内， $f(k_1 - k_0)A_3(k_1)$ 没有最大值（最小值）。

当能量关系满足图 1(b) 所示，传输波包被积函数中的模值是 $f(k_1 - k_0)C_3(k_1)$ ， $C_3(k_1)$ 是传输系数的平方根，从图 2(b) 可以看出传输系数具有震荡性，其中 $a = 15/\epsilon$ 。当 k_1/ϵ 逐渐增大时， $C_3(k_1) \approx 1$ ，在 $k_1/\epsilon \ll 1$ 时，传输系数很小，但是当满足一定的条件，传输系数也可以为 1。因此，通过公式(7f)，当 $ak_2 = n\pi, n = 1, 2, 3\Delta$ （即势阱宽度等于平面波分量的半波长的积分数目）时， $C_3(k_1) = 1$ 。此时 k_1 表示为

$$k_1 = [-\epsilon^2 + (n\pi/a)^2]^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3\Delta \quad (10)$$

$ak_2 = n\pi, n = 1, 2, 3\Delta$ ，利用 $\lambda_2 = 2\pi/k_2$ ，式(10)也可以写为

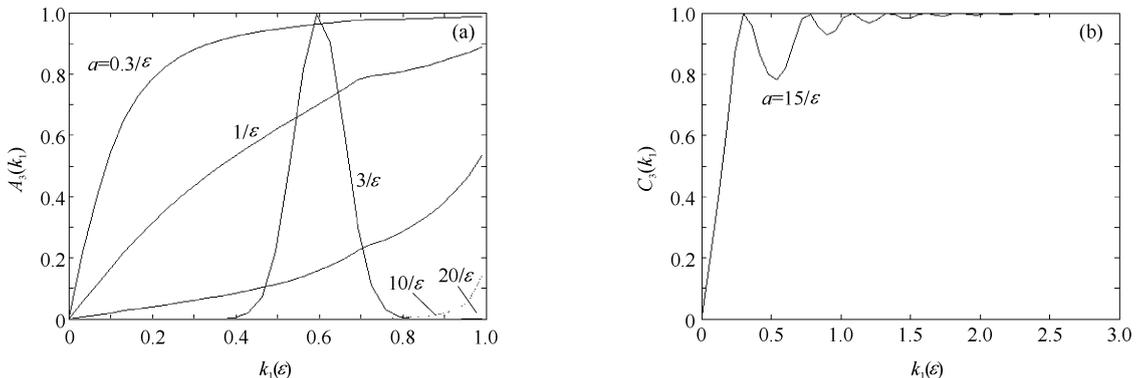


Fig. 2 Graphs of $A_3(k_1), f(k_1 - k_0), C_3(k_1)$ as functions of incident wavenumber $k_1(\epsilon)$

图 2 $A_3(k_1), f(k_1 - k_0), C_3(k_1)$ 随 $k_1(\epsilon)$ 的变化图

$$2a = n\lambda_2, \quad n = 1, 2, 3\Lambda \quad (11)$$

即,当每一个平面波分量射入势阱后,碰到阱壁时将发生反射和透射。如果在阱内的波长满足方程(11),经过多次反射然后透射出去的波相位相同,由于相干叠加而使透射波波幅大增,出现共振透射,使场能量增强。

3 结果对比

美国利弗莫尔实验室(LLNL)的 R. J. King 等人研究了孔缝耦合的共振效应,得出发生共振出现强耦合的条件为:入射波频率=光速/孔缝周长^[10]。但是后来研究人员通过对各种孔缝进行的数值模拟和实验研究发现^[1-6], R. J. King 等人给出的共振条件有一定的局限性^[4]:只适用于窄缝条件下,且入射电场平行于短边。综合不同形状孔发生共振的条件,归纳出了任意孔缝耦合发生共振的频率为^[3-6]

$$f_r = c/2l_{\max} \quad (12)$$

式中: l_{\max} 表示垂直于入射电场方向的孔缝最大线长度。

电磁波入射孔缝示意图见图 3,将公式(2),矢量、3 维的 Helmholtz 方程化为 1 维的、标量 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad (13)$$

其解为 $E_y(z) = E_{y+} \exp(-jkz) + E_{y-} \exp(jkz)$,在垂直于传播方向的平面,即横截面也就是孔缝面上,在垂直于 E_y 方向上形成 1 维方势阱,见图 1。所以,在满足方程(11)的条件下会出现共振透射。

根据公式(11)可以得到发生共振透射的频率为

$$f_r = nc/2a, \quad n = 1, 2, 3\Lambda \quad (14)$$

式中: a 为与入射电场分量垂直的缝(或边)长度,等价于公式(12)中的 l_{\max} 。

王建国^[3]等人对微波孔缝线性耦合函数研究中,开展了大量的数值模拟计算,得出了适用于各种孔缝耦合的普适共振条件公式(即式(12)),从实验结果中不难发现:不仅式(12)满足模拟结果,而且公式(14)中 n 取 2 也同样满足模拟结果。在已有的研究结果中,一般只验证了 $n=1$ 的情况,即式(12)。

4 结 论

利用量子效应原理分析了电磁波在势阱中的传输,通过分类讨论波函数的传输波包,得出了出现共振透射现象的条件。同时通过与前人高功率微波效应研究模拟和实验结果的对比表明,本文阐述的研究方法是合理有效的,为高功率微波效应机理研究提供了一条新的研究思路。考虑到电子系统的复杂性,并非简单孔缝耦合能够表达,而直接采用数值模拟具有很大的局限性(微细结构的建模和计算成本等问题),此时量子效应分析方法可以结合电磁场与电磁波或其它学科(混沌)可以得到进一步发展。

参考文献:

- [1] 俞汉清,王建国,陈雨生,等. 微波脉冲窄缝耦合的数值模拟方法[J]. 电子学报, 1996, **24**(3): 120-123. (Yu Hanqing, Wang Jianguo, Chen Yusheng, et al. Numerical simulation method of microwave pulse couplings into narrow slots. *Acta Electronica Sinica*, 1996, **24**(3): 120-123)
- [2] 周金山,刘国治,王建国. 矩形孔缝耦合特性实验研究[J]. 强激光与粒子束, 2003, **15**(12): 1228-1232. (Zhou Jinshan, Liu Guozhi, Wang Jianguo. Experimental studies on coupling characteristics of rectangular slot. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, **15**(12): 1228-1232)
- [3] 王建国,刘国治,周金山. 微波孔缝线性耦合函数研究[J]. 强激光与粒子束, 2003, **15**(11): 1093-1099. (Wang Jianguo, Liu Guozhi, Zhou Jinshan. Investigations on function for linear coupling of microwaves into slots. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, **15**(11): 1093-1099)
- [4] Wang Jianguo, Yu Hanqing, Liu Guozhi, et al. Numerical studies on resonant and enhancement effects for coupling of microwave pulses into narrow slot[J]. *Journal of Electronics*, 1998, **15**(2): 174-181.
- [5] 王建国,刘国治,周金山,等. 微波脉冲孔缝线性耦合的数值与实验研究[J]. 微波学报, 1995, **11**(4): 244-251. (Wang Jianguo, Liu Guozhi, Zhou Jinshan, et al. Numerical and experimental investigation on linear couplings of microwave pulses with slots. *Journal of Microwaves*,

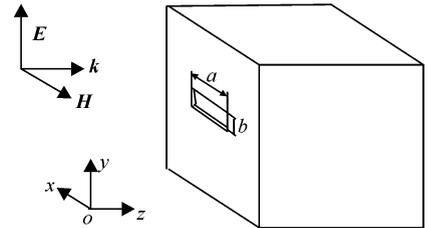


Fig. 3 Schematic diagram of the slot and incident microwave

图 3 微波入射与孔缝耦合的几何示意图

1995, **11**(4):244-251)

- [6] 郝新红, 白钰鹏, 何娟. 高功率微波孔缝耦合特性的数值模拟及防护加固技术[J]. 探测与控制学报, 2006, **28**(4):34-38. (Hao Xinhong, Bai Yupeng, He Juan. Numerical studies on the coupling characteristics of HPM pulse into cavity with slot and protective measures against HPM. *Journal of Detection and Control*, 2006, **28**(4):34-38)
- [7] 曾谨言, 钱伯初. 量子力学专题分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990. (Zeng Jinyan, Qian Bochu. Monographic study of quantum mechanics. Beijing: Higher Education Press, 1990)
- [8] 曾谨言, 钱伯初. 量子力学[M]. 3版. 北京: 科学出版社, 2004. (Zeng Jinyan, Qian Bochu. Quantum mechanics. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004)
- [9] Hartman T E. Tunneling of a wave packet[J]. *J Appl Phys*, 1962, **33**(12): 3427-3433.
- [10] King R J, Breakall J K, Hudon J K, et al. Phenomenology of microwave coupling[R]. UCID-20215, 1984.

Preliminary study of quantum effect about resonant enhancement

Yan Eryan^{1,2}, Meng Fanbao², Ma Hongge²

(1. Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China;

2. Institute of Applied Electronics, CAEP, P. O. Box 919-1017, Mianyang 621900, China)

Abstract: The transmission of wave packets in a potential well was analyzed by the quantum effect theory. The occurrence condition of resonant transmission was obtained by classified discussion. The comparison of it with results of the numerical simulation and coupling experiment shows a general agreement. That is, the resonant enhancement will take place if the slot side length is an integral multiple of the microwave half-wavelength, when the direction of the incident electric field is perpendicular to the long side of the slot. In the meantime, it would help to illuminate strong couplings in high power microwave effect experiments on complicated electronic systems.

Key words: quantum effect; resonant transmission; resonant effect; enhancement effect; narrow slot coupling