

文章编号: 1001-4322(2008)04-0675-04

# 掺杂超晶格量子阱的沟道效应与沟道辐射\*

罗晓华<sup>1</sup>, 何 为<sup>1</sup>, 邵明珠<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 电气工程学院, 重庆 400044; 2. 东莞理工学院 电子工程系, 广东 东莞 523106)

**摘 要:** 分析了超晶格量子阱的沟道效应和沟道辐射, 利用正弦平方势描述了掺杂超晶格量子阱沟道粒子的运动行为, 并在经典力学框架内, 把粒子的运动方程化为摆方程。用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分解析地给出了系统的解和粒子运动周期, 导出了量子阱沟道辐射的辐射强度和辐射能量。结果表明, 对于能量为 100 MeV 左右的电子, 辐射能量可达 keV 量级(X 能区)。指出了用量子阱沟道辐射作为 X 激光或  $\gamma$  激光的可能性。

**关键词:** 量子阱沟道辐射; 正弦平方势; 超晶格; 摆方程

**中图分类号:** O471. 5; O571. 33

**文献标识码:** A

自从 20 世纪 70 年代中期美国斯坦福大学研制成功第一台自由电子激光器以来, 自由电子激光的应用越来越广泛。后来, 人们又把注意力集中在如何获得短波长、大功率的自由电子激光器上。但是, 要用传统的自由电子激光器把自由电子激光推向更短的波长将在技术上遇到严重挑战。比如, 摆动频率不能做得很高(或相邻磁极之间的距离不能太小), 而摆动场强度也不能做得很强, 即使采用超导技术也不过 10 T 左右; 再加上随着频率的增加, 谐振腔的概念也不复存在。试图利用自由电子激光器来获得 X-激光或  $\gamma$ -激光将面临一场观念更新和技术革命。如果将自由电子激光同带电粒子沟道辐射概念相结合, 可把辐射频率推进到 X 能区或  $\gamma$  能区。近年来, 人们正试图把沟道辐射改造为 X 激光或  $\gamma$  激光<sup>[1-4]</sup>, 但是沟道辐射的强度太低, 应用前景受到限制, 如何提高沟道接受度是提高辐射强度的有效途径之一。由于在束流品质一定的情况下, 沟道的接受度决定于沟道的大小和势阱的深度, 沟道的孔径越大, 势阱越深, 接受度越大。于是, 问题就转化为如何寻找大沟道材料。

本文提出一种新的沟道概念, 并找到了一种新的沟道——超晶格量子阱沟道, 这种沟道的特点是通道大(比如可达到几十 nm, 而常规的晶体沟道宽度不到 1 nm), 而且沟道宽度和势阱深度均可以人为控制。我们引入正弦平方势来模拟带电粒子与掺杂超晶格的相互作用<sup>[5]</sup>, 于是粒子在掺杂超晶格量子阱中的运动就转化为在正弦平方势场中的运动。在经典力学框架内, 把粒子的运动方程化为摆方程, 用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分解析地给出了系统的解和粒子运动周期。导出了超晶格量子阱沟道辐射能量、瞬时辐射强度、平均辐射强度。

## 1 超晶格量子阱沟道效应

超晶格通常分为组分超晶格和掺杂超晶格。所谓组分超晶格就是将两种晶格常数不同的材料交替生长而成的多层薄膜结构; 而掺杂超晶格则是指在同一材料(比如 GaAs)上交替掺入 n-型和 p-型杂质, 形成 n-i-p-i-n-i-p-i... 周期排列的 1 维阵列, 如图 1 和图 2 所示。从图 1 和图 2 可以看出, 对于电子来说, 组分超晶格和掺杂超晶格的差别仅在于势阱形状不同, 前者是方形势阱, 后者是正弦平方势阱<sup>[6]</sup>。对于组分超晶格, 它的势垒高度(或势阱的深度)决定于超晶格材料 GaAs 和  $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$  的能隙差, 而势阱的宽度则决定于夹层 GaAs 的厚度。于是, 只需调整夹层厚度就可以调整阱宽, 选择不同材料就可以调节阱深, 阱宽和阱深均可实现人为控制。

值得注意的是, 当电子沿着与生长方向( $x$  方向)垂直的方向( $z$  方向)运动时, 在生长方向上将受到周期分布的势阱和势垒作用, 而  $z$  方向的运动是自由的。当一束电子沿  $z$  方向入射时, 一部分电子将被量子阱俘获, 被俘获的电子在  $z$  方向上很容易渗透到超晶格内部, 这种效应称为超晶格的沟道效应; 在超晶格沟道中运动的带电粒子, 由于加速度不为零(见图 1、图 2 中的曲线轨道)将不断向外辐射电磁波, 这种辐射就是超晶格量子阱沟道辐射。

\* 收稿日期: 2007-10-12; 修订日期: 2008-03-03

作者简介: 罗晓华(1969—), 男, 重庆人, 博士研究生, 主要从事声子同物质相互作用研究; byshaomz@dgut.edu.cn。

联系作用: 邵明珠, 教授, 东莞理工学院城市学院 189 信箱, bgluoshy@dgut.edu.cn。

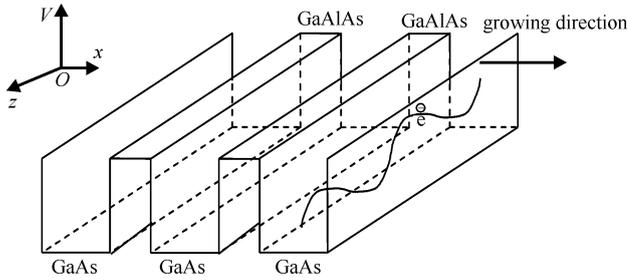


Fig. 1 Component superlattice quantum well

图 1 组分超晶格子阱

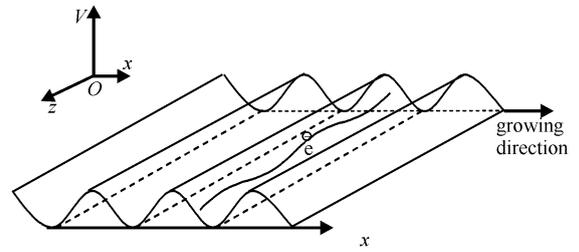


Fig. 2 Doping superlattice quantum well

图 2 掺杂超晶格子阱

## 2 正弦平方势和粒子运动方程

注意到沿晶体生长方向粒子运动受到势垒限制,而垂直于生长方向上粒子的运动是自由的,于是 3 维问题可化为 2 维问题。选择势阱中心为坐标原点,  $x$  轴沿晶体生长方向,  $z$  轴与生长方向垂直(沟道方向),如图 2 所示。当粒子沿着  $z$  方向入射时,可能被沟道俘获。被沟道俘获的粒子,沿  $z$  方向运动的同时,将在  $x$  方向不断振荡。粒子运动的经典力学方程可表示为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dx} V(x) = 0 \quad (1)$$

式中:  $m = m_0 \gamma$  是粒子质量;  $\gamma$  是相对论因子;  $V(x)$  是粒子与超晶格子阱相互作用势。对于掺杂超晶格,可引入正弦平方势

$$V(x) = V_0 \sin^2(\pi x/a) \quad (2)$$

来描述,其中  $V_0$  是势阱深度,  $a$  是势阱(沟道)宽度。令

$$\xi = 2\pi x/a, \quad \tau = (2\pi V_0/m a^2)^{1/2} t \quad (3)$$

将式(3)和式(2)代入方程(1),可得无量纲形式的摆方程

$$d^2 \xi/d\tau^2 + \sin \xi = 0 \quad (4)$$

在相平面上,方程(4)所描述的系统存在 3 种类型的轨道。

(1) 异宿轨道  $h=2$ 。把相平面分为两个区域,相应的解可表示为

$$\begin{cases} \xi = \pm 2 \arcsin(\operatorname{sh} \tau) \\ \zeta = \pm 2 \operatorname{sech} \tau \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\pm$  号分别表示上下平面的两条异宿轨道,粒子沿这条轨道的运动周期为无穷。

(2) 振荡型周期轨道  $0 < h < 2$ 。相应的解可表示为

$$\begin{cases} \xi = 2 \arcsin(\kappa \operatorname{sn} \tau) \\ \zeta = 2 \kappa \operatorname{cn} \tau \end{cases} \quad (6)$$

其中  $\operatorname{sn} \tau$  和  $\operatorname{cn} \tau$  是 Jacobian 椭圆函数,  $\kappa = h/2$  是椭圆函数的模。粒子沿这族轨道的运动周期

$$T = 4K(\kappa) \quad (7)$$

$K(\kappa)$  是第一类椭圆积分。当  $h$  单调增加时,周期  $T$  从  $2\pi$  增加到无穷。

(3) 回转型周期轨道  $h > 2$ 。相应的解可表示为

$$\xi = \pm 2 \arcsin[\operatorname{sn}(\tau/\kappa')] \quad (8)$$

$$\zeta = \pm \frac{2}{\kappa} \operatorname{dn}(\tau/\kappa') \quad (9)$$

式中  $\kappa' = (2/h)^{1/2}$ ,  $\operatorname{dn} \tau$  为 Jacobian 椭圆函数。粒子沿轨道表达式(8)和(9)的运动周期

$$T_r = 2\kappa' K(\kappa') \quad (10)$$

当  $h$  单调减少时,周期  $T_r$  由零增加到无穷。

图 3 给出了正弦平方势和系统的相平面特征。由该图可以看出,分界线( $h=2$ )把相平面分成两部分,在分界线的内部( $0 < h < 2$ ),相轨道是闭合的,描写的是沟道粒子绕中心平面的周期运动。在分界线的外部( $h > 2$ ),相轨道是开放的,开放型周期轨道描写的是准沟道粒子的运动行为。

### 3 辐射强度和辐射能量

#### 3.1 瞬时辐射强度

对于超相对论带电粒子,它的瞬时辐射强度可表示为<sup>[7]</sup>

$$I_{in}(t) = \frac{2(z_1 e)^4 \epsilon^2 \gamma^2}{3m^2 c^3} \quad (11)$$

式中: $c$  是光速; $\epsilon$  是等效的横向电场强度; $z_1 e \epsilon$  是作用在沟道粒子上的力,且可等效地表示为

$$z_1 e \epsilon = -\partial V(x)/\partial x \quad (12)$$

代入式(2)和式(3)得

$$z_1 e \epsilon = -\frac{\pi V_0}{a} \sin \xi \quad (13)$$

其中  $\xi$  由式(3)给出。

将式(13)代入式(11),可得

$$I_{in}(t) = I_0 \kappa^2 \text{sn}^2(\rho t) \quad (14)$$

式中

$$I_0 = 8(z_1 e)^2 A^2 \gamma^2 / 3m^2 c^3, \quad A = \pi V_0 / a, \quad \rho^2 = 2\pi V_0 / ma^2 \quad (15)$$

由式(14)可以看出,带电粒子的瞬时辐射强度与运动方程(4)的解式(6)直接有关,而且可用 Jacobian 椭圆函数严格表示出来。

#### 3.2 平均辐射强度

瞬时辐射强度描述了量子阱沟道辐射的瞬时特征,而实验上可观测量应当是平均辐射强度。平均辐射强度  $\langle I \rangle$  定义为瞬时辐射强度在一个周期内的平均值

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_{in}(t) dt \quad (16)$$

将式(14)代入式(16),并注意到  $T=4K$ ,完成积分后可得

$$\langle I \rangle = \frac{\kappa'^2 I_0}{3} \left[ \frac{(2\kappa^2 - 1)E(\kappa)}{\kappa'^2 K(\kappa)} - 1 \right] \quad (17)$$

其中

$$\kappa'^2 = 1 - \kappa^2 \quad (18)$$

是 Jacobian 椭圆函数的补模; $E$  是第二类椭圆积分。

#### 3.3 辐射频率

考虑到 Doppler 效应, $l$  次谐波的最大辐射频率  $\omega_{lm}$  可以表示为

$$\omega_{lm} = 2l\Omega_0 \gamma^{3/2} \quad (19)$$

其中  $\Omega_0 = 2\pi/T$  是惯性系中粒子横向振动频率。

### 4 结果和讨论

我们以 GaAs 作衬底的掺杂超晶格为例,计算电子在量子阱沟道中运动的辐射频率(能量)。选择阱宽  $a = 10 \text{ nm}$ , 阱深  $V_0 = 1.75 \text{ eV}$ ,由式(19)和式(7)可算出一次谐波最大辐射频率或辐射能量,结果如表 1 所示。从表 1 可以看出,当  $\gamma = 10^4$  时, $\hbar\omega_2$  已进入 X 能区,而  $\hbar\omega_1$  已进入  $\gamma$  能区. 如果将它们改造为相干光,可望得到新的 X 激光或  $\gamma$  激光。

### 5 结论

本文分析了超晶格量子阱的沟道效应和沟道辐射,并引入正弦平方势描述掺杂超晶格量子阱沟道粒子的

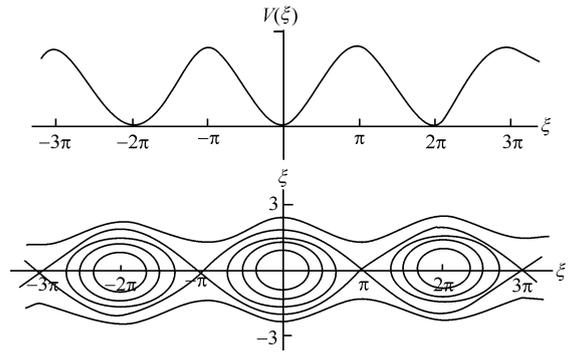


Fig. 3 Sine-squared potential (up) and phase planar properties of system (below, from inside to outside,  $h$  is 0.5, 1, 1.5, 2, 3, respectively)  
图 3 正弦平方势(上图)与系统的相平面特征(下图, 从内到外  $h=0.5, 1, 1.5, 2, 3$ )

表 1 超晶格量子阱沟道辐射能量

Table 1 Channeling radiation energy in superlattice quantum well

| $\gamma$        | $\hbar \omega_1 / \text{eV}$ | $\hbar \omega_2 / \text{eV}$ |
|-----------------|------------------------------|------------------------------|
| $10^2$          | $1.12 \times 10^2$           | $2.94 \times 10^1$           |
| $10^3$          | $1.12 \times 10^4$           | $9.30 \times 10^2$           |
| $10^4$          | $1.12 \times 10^6$           | $2.94 \times 10^3$           |
| $5 \times 10^3$ | $2.78 \times 10^8$           | $3.28 \times 10^5$           |

运动行为,在经典力学框架内,把粒子的运动方程化为摆方程。用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分解析地给出了系统的解和粒子运动周期,导出了掺杂超晶格量子阱沟道辐射的瞬时辐射强度、平均辐射强度和辐射能量。结果表明,对于能量为 100 MeV 量级的电子,辐射能量  $\hbar\omega_2$  已进入 X 能区,而  $\hbar\omega_1$  已进入  $\gamma$  能区,如果将它改造为相干光,可望获得 X 激光或  $\gamma$  激光。

### 参考文献:

- [1] Korol A, Solovyov A V, Greiner W. Coherent radiation of an ultrarelativistic charged particle channelled in a periodically bent crystal [J]. *J Phys G*, 1998, **24**: L45-L50.
- [2] Korol A, Solovyov A V, Greiner W. Photon emission by an ultrarelativistic particle channelling in a periodically bent crystal [J]. *Int J Mod Phys E*, 1999, **8**: 49-57.
- [3] Gevorging L A, Hovsepyan L A. Formation of radiation spectrum at the planar channeling of a positron bunch with allowance for the medium inhomogeneity [J]. *J of Contemporary Physics*, 2007, **42**(3): 87-91.
- [4] Carrigan R A Jr. Channeling at extremely high bunch charges and solid state plasma acceleration [C]//Advanced Radiation Sources and Applications [M]. NATO Science Series II, Springer Netherlands, 2006: 115-127.
- [5] 邵明珠, 罗诗裕. 正弦平方势与带电粒子沟道效应的能带结构 [J]. 物理学报, 2007, **56**(6): 3407-3410. (Shao M Z, Luo S Y. The sine-squared potential and the band construction for channelling effects. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(6): 3407-3410.
- [6] 徐叙璐, 苏勉曾. 发光学与发光材料 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 196-199. (Xu X R, Su M Z. Luminescence and luminous materials. Beijing: Science Press, 2004: 196-199)
- [7] Jackson J D. Classical electro-dynamics [M]. New York: John Wiley and Sons, 1976: 215-242.

## Channeling effect and radiation of charged particles in doping superlattice quantum well

LUO Xiao-hua<sup>1</sup>, HE Wei<sup>1</sup>, SHAO Ming-zhu<sup>2</sup>

(1. Electric Engineering College, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2. Department of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523106, China)

**Abstract:** The channeling effect and radiation of charged particles in the superlattice quantum well are predicted. The motion behaviors of a charged particle in the superlattice quantum well are described by using sine-squared potential. In the frame of the classical mechanics the motion equation of a particle is reduced to the pendulum equation by using the sine-squared potential. The solution of the equation and the period of the particle motion are expressed exactly by means of Jacobian elliptic function and elliptic integral. The radiation energy and radiation intensity of the charged particles are derived. The results show that the radiation energy entered the X-energy zone for a particle with an energy of 100 MeV. It is possible to take the radiation as an X-Laser or a  $\gamma$ -laser.

**Key words:** Channeling radiation of quantum well; Sine-squared potential; Superlattice; Pendulum equation