光电测距水平距离的计算

魏忠邦[1]，翟 翊[2]

（1. 兰州市勘察测绘研究院，甘肃 兰州 730030；2. 信息工程大学 测绘学院，河南 郑州 450052）

Calculation of Horizontal Distance in Electro-optical Range Measurement

WEI Zhong-bang, ZHAI Yi

摘要 ：讨论平面控制测量中水平距离的计算，推证倾斜距离化算成测线两端点平均高程面上水平距离的精确计算公式，并与传统的水平距离计算进行比较，导出将斜距直接化算到参考椭球面的计算公式，提出平面控制测量中倾斜距离化算的正确方法。

关键词 ：平面控制测量；水平距离；倾斜距离；参考椭球

一、引 言

光电测距仪器的广泛应用，极大地提高了距离测量的精度。因此，有必要对水平距离的计算公式重新审议。在传统的测量应用中，水平距离和高差是按照倾斜距离与垂直角构成的直角三角形来解算的，计算公式为

$$D = S\cos\alpha \tag{1}$$

式中，S 为光电测距仪在 A 点测得 A，B 两点之间的斜距；α 为测距时的垂直角；D 为水平距离。对于较低精度的测量可以利用这个公式计算，但对于较高精度的测量作业，这样不考虑地球曲率和大气折光的影响，就可能有损于距离测量的精度。因此，推导考虑地球曲率和大气折光的影响的精确计算公式，对于提高点的计算精度具有十分重要的意义。

在测量工作中，坐标计算是在高斯投影平面上进行的。因此，也就是说，把地面测得的距离化算到高斯投影平面上，先把地面测得的斜距化算成测线两端点平均高程面上的弧长，再化算成参考椭球面的边长，然后经投影改化，才能化算成高斯投影平面上的边长。

二、测线两端点平均高程面上的弧长

如图 1 所示（图中省去仪器高和觇标高），AE' 是过 A 点的水平面，B' 是过 B 点的铅垂线上与 A 同高的点，过 B 做 AB' 的垂线交 AB' 的延长线于 E，过 E 作 OA 的平行线交 B 点的铅垂线 BO 于 B''。由图 1可知，$\triangle B'B''E$ 为等腰三角形，$\triangle BB''E$ 也为等腰三角形，故有

$$B'B'' = B''E = B''B$$

由此可见，B'' 为 A，B 两点的平均高程点，过 B'' 作 AB' 的平行线交 OA 的延长线与 A'，显然 $A'B'' = AE = D$ 即为 A，B 两点的平均高程面上的水平距离。

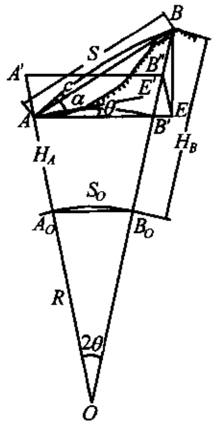

图 1

设地球为平均半径为 R 的圆球，A，B 两点所对的圆心角为 2θ，则 $\angle B'AE' = \theta$ 为地球曲率对垂直角的影响，设在 A 点照准 B 点观测时大气折光角为 c，地球曲率和大气折光对垂直角的影响为 $f = \theta - c$，则按垂直角计算的光电测距的测距边在测线两端点在平均高程面上的水平距离为

$$D = S\cos(\alpha_v + f) \tag{2}$$

可以证明，地球曲率对垂直角的影响角 $\theta = \frac{S}{2R}\rho''$，大气折光对垂直角的影响为 $c = \frac{S}{2R}k\rho''$，k 为大气折光系数，则

$$f = \theta - c = (1-k)\frac{S}{2R}\rho'' \tag{3}$$

收稿日期：2005-03-22
作者简介：魏忠邦（1954-），男，甘肃兰州人，高级工程师，主要从事工程测量及其管理的研究。

式中，k 为大气折光系数。以 $R=6\ 371$ km，$\rho''=206\ 265''$，$k=0.11$ 代入，$f=14.41\ S_{km}$（S_{km}表示 S 以 km 为单位），故

$$D=S\cos\left(\alpha_v+14.41S_{km}\right) \tag{4}$$

式(4)即为按垂直角计算的光电测距的测距边在测线两端点在平均高程面上的水平距离计算公式。

由图 1 可知

$$D=\sqrt{S^2-BE^2}$$

$$BE=h\cos\theta$$

式中，h 为 A，B 两点之间的高差，由于 θ 很小（$S=10$ km 时，θ 约为 $5'$），则可认为 $BE\approx h$，故按高差计算的光电测距的测距边在测线两端点在平均高程面上的水平距离为

$$D=\sqrt{S^2-h^2} \tag{5}$$

式(4)、式(5)即为按高差计算的测线两端点在平均高程面上的水平距离。

根据文献[2]，距离不超过 10 km 时，可以不必考虑地球曲率的影响，即水平距离与相应弧长的差可以忽略不计。因此，可以认为由式(4)、式(5)求得的 D 即为测线两端点在平均高程面上的弧长。

三、平均高程面上的弧长与传统水平距离的差

由式(1)、式(4)可知，由斜距计算平均高程面上的水平距离时传统计算公式的误差为

$$\Delta S=S\cos\alpha-S\cos\left(\alpha+14.41''S_{km}\right) \tag{6}$$

以不同的 α 和斜距 S 代入式(6)，求得 ΔS 如表 1 所示。

表 1　平均高程面上的弧长与传统水平距离的差 ΔS

mm

S/m \ α	1°	2°	3°	5°	10°
100	0.01	0.02	0.04	0.06	0.12
200	0.05	0.10	0.15	0.24	0.49
300	0.11	0.22	0.33	0.55	1.09
500	0.31	0.61	0.91	1.52	3.03
1 000	1.22	2.44	3.66	6.09	12.13
2 000	4.90	9.77	14.64	24.37	48.54

由表 1 可知，对于短边或者小垂直角，传统的水平距离计算与平均高程面上的水平距离相差不大，完全可以忽略不计。但对于长边或陡边(垂直角较大)，二者的差就不能忽略。例如，边长 500 m、垂直角 5°时(高差约 43 m)，ΔS 达 1.5 mm 之多，距离1 000 m 时，垂直角 3°时，ΔS 达 4 mm，这就完全不能忽略。

四、斜距化算到参考椭球面

在坐标计算中，可以直接利用光电测距仪测得的斜距计算参考椭球面上的距离，其计算公式推导如下。

如图 1 所示，在△OAB 中，根据余弦定理有

$$S^2=\left(R+H_A\right)^2+\left(R+H_B\right)^2-2\left(R+H_A\right)\cdot\left(R+H_B\right)\cos 2\theta$$

$$S^2=h_{AB}^2+4R^2\left(1+\frac{H_A}{R}\right)\left(1+\frac{H_B}{R}\right)\sin^2\theta \tag{7}$$

式中，$h_{AB}=H_B-H_A$，为 A，B 两点的高差。

如图 1，设 $S_0=A_0B_0$ 为 S 边对应的参考椭球面上的弧长，则有

$$S_0=A_0B_0=2R\sin\theta \tag{8}$$

式(8)代入式(7)得

$$S^2=h_{AB}^2+\left(1+\frac{H_A}{R}\right)\left(1+\frac{H_B}{R}\right)S_0^2$$

因为地面点的高程与地区曲率半径 R 相比很小，故令$\frac{H_A}{R}\approx\frac{H_B}{R}=\frac{H_m}{R}$，$H_m=\frac{1}{2}\left(H_A+H_B\right)$，整理得

$$S_0^2=\sqrt{\frac{S^2-h_{AB}^2}{\left(1+\frac{H_m}{R}\right)^2}}=\frac{R\sqrt{S^2-h_{AB}^2}}{R+H_m} \tag{9}$$

在计算中，若已知两点的高程，可按式(9)利用斜距计算参考椭球面上的弧长。

五、结束语

电磁波测距仪测得的倾斜距离化算到参考椭球面上，应当采用适当的计算方法，以提高距离测量精度。在低等级平面控制测量或者短边且高差较小时，按式(1)求得的 D 可视为测线两端点的平均高程面上的水平距离，对于高等级测量，或长边及垂直角较大的陡边，例如距离大于 500 m、垂直角大于 5°，倾斜距离就应当按照式(4)、式(5)化算成测线两端点在平均高程面上的水平距离，再将其化算到参考椭球面上，或者直接利用倾斜距离和两点的高程直接按式(9)将斜距化算到参考椭球面上。实验证明，两种方法具有同等的计算精度。

参考文献：

[1] BURKHOLDER E F. Calculating the Horizontal Distance and the Level Distance[J]. Journal of Surveying Engineering，1991，(3).

[2] 王　侬，过静珺. 现代普通测量学[M]. 北京 清华大学出版社，2001.

[3] 翟　翊，等. 三角高程测量计算公式讨论[J]. 测绘通报，2004，(3).