中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 2 期: 199～213
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

双分式 Brown 运动的自相交局部时和相遇局部时

江一鸣, 王永进

南开大学数学科学学院与 LPMC, 天津 300071
E-mail: ymjiangnk@nankai.edu.cn, yjwang@nankai.edu.cn

收稿日期: 2008-01-22; 接受日期: 2008-09-28
国家自然科学基金 (批准号: 10871103) 资助项目

摘要 考虑一个双分式 Brown 运动的局部时、自相交局部时和两个独立的双分式 Brown 运动的相遇局部时问题. 通过双分式 Brown 运动的强局部不确定性、L^2 收敛和混沌展开, 验证自相交局部时和相遇局部时的存在性和光滑性.

关键词 双分式 Brown 运动 自相交局部时 相遇局部时 强局部不确定性

MSC(2000) 主题分类 60G15, 60G18, 60J55

1 引言

近几年, 分式 Brown 运动作为典型的自相似过程, 在诸如电信、图像处理和金融等科研领域的广泛应用, 已经引起人们越来越多的关注. 在分式 Brown 运动的基础上, 人们又逐渐引进更一般的自相似 Gauss 过程和随机场来建立随机模型, 如 Bonami 与 Estrade[1], Cheridito[2] 以及 Benson 等 [3]. 这些应用又促使人们进一步探讨这类更一般的自相似 Gauss 过程和随机场的理论性质.

一方面, 很多作者已经研究了关于分式 Brown 运动的局部时问题. 例如, Rosen 在文献 [4] 中验证了平面分式 Brown 运动的局部时中心化问题; 而 Xiao 与 Zhang[5] 和 Ayache 等 [6] 都讨论了分式 Brown 单 (fractional Brownian sheet) 的局部时的存在性和一致连续性; 随着 Nualart 与 Vive[7] 首次将混沌分解用于局部时的研究, 这种方法很快就推广到研究自相交局部时和相遇局部时上: Imkeller 等 [8] 利用混沌分解讨论了 $\mathbb{R}^d$ 上 Brown 运动的双相交局部时及其修正问题; Hu 通过混沌分解给出了分式 Brown 运动自相交局部时的详细结论 (具体内容请参阅文献 [9, 10]); 而我们则在文献 [11] 中验证了分式 Brown 运动相遇局部时的存在性.

另一方面, Houdré与 Villa[12] 以及 Russo 与 Tudor[13] 将分式 Brown 运动发展到更一般的自相似 Gauss 过程 —— 双分式 Brown 运动; 随后, Tudor 与 Xiao[14] 又讨论了双分式 Brown 运动的 Malliavin 积分. 在这些文献中, 他们引出了双分式 Brown 运动的局部时. 这

就启发我们深入讨论这个局部时的性质; 更重要的是可以试图讨论与分式 Brown 运动类似的自相交局部时和相遇局部时问题.

本文主要考虑了一个双分式 Brown 运动的自相交局部时, 以及两个独立的双分式 Brown 运动的相遇局部时问题, 其定义见下一节. 我们在特定的参数条件下, 利用 L^2 收敛、混沌分解和双分式 Brown 运动的强局部不确定性, 证明了双分式 Brown 运动自相交局部时和相遇局部时的存在性和光滑性.

2 预备知识

本节将给出双分式 Brown 运动、自相交局部时、相遇局部时以及混沌分解的定义, 并且说明局部时光滑的充分性条件. 首先定义双分式 Brown 运动.

定义 2.1 若 $B^{H,K}=\{B_t^{H,K},t\geqslant 0\}$ 是一个中心 Gauss 过程, 并且初值为 0, 协方差为

$$R^{H,K}(t,s):=\mathrm{Cov}(B_t^{H,K},B_s^{H,K})=\frac{1}{2^K}((t^{2H}+s^{2H})^K-|t-s|^{2HK}), \tag{2.1}$$

其中 $H\in(0,1)$, $K\in(0,1]$, 则称 $B^{H,K}$ 是一个双分式 Brown 运动.

由定义容易得到下面的性质:

(1) 双分式 Brown 运动 $B^{H,K}=\{B_t^{H,K},t\geqslant 0\}$ 是 HK 自相似的;

(2) 双分式 Brown 运动 $B^{H,K}=\{B_t^{H,K},t\geqslant 0\}$ 是 Hölder 连续的, 并且阶数 $\delta<HK$;

(3) 若 $T>0$, 则对任意的 $s,t\in[0,T]$, 有

$$2^{-K}|t-s|^{2HK}\leqslant E(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})^2\leqslant 2^{1-K}|t-s|^{2HK}. \tag{2.2}$$

特别地, 如果 $K=1$, 则 $B_t^{H,1}$ 是一个参数为 $H\in(0,1)$ 的分式 Brown 运动.

设 $\delta(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Dirac delta 函数, 即 $\int_{\mathbb{R}}\delta(x)f(x)dx=f(0)$. 并且

$$\delta(\cdot)=L^2(\Omega)-\lim_{\epsilon\to 0}p_\epsilon(\cdot), \tag{2.3}$$

其中 $p_\epsilon(\cdot)$ 表示正态分布 $N(0,\epsilon)$ 的密度函数, 细节可以参考文献 [13].

接下来定义自相交局部时.

定义 2.2 如果 $B^{H,K}=\{B_t^{H,K},t\geqslant 0\}$ 是一个双分式 Brown 运动, 并且

$$S(T,H,K)=\int_0^T\int_0^t\delta(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})dsdt, \tag{2.4}$$

则称 $S(T,H,K)$ 为 $B^{H,K}$ 在 $[0,T]$ 上的自相交局部时.

设 $B^{H_i,K_i}=\{B_t^{H_i,K_i},t\geqslant 0\}$ $(i\in\{1,2\})$ 是相同概率空间 $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$ 上两个独立的双分式 Brown 运动. 下面定义所谓的相遇局部时:

定义 2.3 若

$$I(H_1,H_2,K_1,K_2,T)=\int_0^T\delta(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})dt, \tag{2.5}$$

则称 $I(H_1,H_2,K_1,K_2,T)$ 为 B^{H_1,K_1} 和 B^{H_1,K_2} 的相遇局部时.

为简单起见, 本文用 $I(H,K,T)$ 来表示 $I(H_1,H_2,K_1,K_2,T)$.

为了后文的研究, 我们要引进混沌分解, 事实上是 $L^2(\Omega,P)$ 空间的正交分解. 详细介绍可以参阅文献 [15,16]. 设 $X:=\{X_t,t\in[0,T]\}$ 是一个定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 Gauss 过程, 如果用 $p_n(x)$ 表示关于 x 的 n 次多项式, 则称 $p_n(X_t)$ 是关于 X 在 $t\in[0,T]$ 上的 n 多项式函数. 设 P_n 是 $L^2(\Omega,P)$ 范数下 $\{p_m(X_t):0\leqslant m\leqslant n,t\in[0,T]\}$ 的完备空间, 显然

P_n 是 $L^2(\Omega,P)$ 的子空间. 若用 $\mathcal{C}_n$ 表示 P_{n-1} 在 P_n 中的正交补, 则 $L^2(\Omega,P)$ 可以写成 $\mathcal{C}_n$ 的直和, 即

$$L^2(\Omega,P)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_n. \tag{2.6}$$

至此我们可以给出混沌分解的定义:

定义 2.4 若 $F\in L^2(\Omega,P)$, 则对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$ 有 $F_n\in\mathcal{C}_n$ (见 (2.6) 式), 使得

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n, \tag{2.7}$$

称 (2.7) 式分解为 F 的混沌分解, F_n 为 F 的 n 次混沌系数.

定义 2.5 设

$$\mathbf{U}=\left\{F\in L^2(\Omega,P):F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\ 且\ \sum_{n=0}^{\infty}nE(|F_n|^2)<+\infty\right\},$$

称 $\mathbf{U}$ 是 Meyer-Watanabe 检验函数空间 (参见文献 [17]).

一般地, 如果 $F\in\mathbf{U}$, 则称 F 是光滑的.

设 F_n 为 F 的 n 次混沌系数, 由定义 2.4,

$$E(|F|^2)=\sum_{n=0}^{\infty}E(|F_n|^2). \tag{2.8}$$

对每个 $F\in L^2(\Omega,P)$, 定义一个新的算子 $\Gamma(u)$, $u\in[0,1]$:

$$\Gamma(u)F:=\sum_{n=0}^{\infty}u^nF_n. \tag{2.9}$$

若记 $\Theta(u):=\Gamma(\sqrt{u})F$, 则 $\Theta(1)=F$. 如果 $F\in L^2(\Omega,P)$, 则 $\|F\|^2:=E(|F|^2)$. 定义 $\Phi_\Theta(u):=\frac{d}{du}(\|\Theta(u)\|^2)$, 则有

$$\Phi_\Theta(u)=\sum_{n=0}^{\infty}nu^{n-1}E(|F_n|^2).$$

注意: $\|\Theta(u)\|^2=E(|\Theta(u)|^2)=\sum_{n=0}^{\infty}E(u^n|F_n|^2)$, 从而得出下列命题:

命题 2.1 如果 $F\in L^2(\Omega,P)$, 则 $F\in\mathbf{U}$ 当且仅当 $\Phi_\Theta(1)<+\infty$.

下面介绍关于双分式 Brown 运动指数形式的混沌分解: 设 $H_n(x),x\in\mathbb{R}$, 是一个次数为 n 的 Hermite 多项式,

$$H_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

则对所有的 $t\in[0,T],x\in\mathbb{R}$,

$$\exp\left(tx-\frac{t^2}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^nH_n(x). \tag{2.10}$$

这就说明

$$\begin{aligned}&\exp\left(iu\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\frac{1}{2}u^2\xi^2\mathrm{Var}(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(iu)^n\sigma^n(s,t,\xi)H_n\left(\frac{\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})}{\sigma(s,t,\xi)}\right),\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\sigma(s,t,\xi)=\sqrt{\mathrm{Var}(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})\xi^2}$.

根据 $\{H_n(x), x\in\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的正交性, 结合 (2.7) 式可知

$$(iu)^n\sigma^n(s,t,\xi)H_n\bigg(\frac{\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})}{\sigma(s,t,\xi)}\bigg)$$

是 $\exp(iu\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\frac{1}{2}u^2\xi^2\mathrm{Var}(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}))$ 的 n 次混沌系数. 如果将 $B_t^{H,K}-B_s^{H,K}$ 换成 $B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2}$, 我们也很容易获得类似结论 (读者可以参阅文献 [9] 或 [11]).

3 自相交局部时的存在性和光滑性

本节讨论双分式 Brown 运动的自相交局部时问题. 为证明它的存在性, 必须先给出下面的事实:

命题 3.1[14] 对任意常数 $0<a<b$, $B^{H,K}$ 在 $I=[a,b]$ 上关于 $\varphi(r)=r^{2HK}$ 是强局部不确定的, 即存在正常数 c 和 r_0, 使得对所有的 $t\in I$ 和 $0<r\leqslant\min\{t,r_0\}$, 有

$$\mathrm{Var}(B_t^{H,K}|B_s^{H,K}:s\in I, r\leqslant|s-t|\leqslant r_0)\geqslant c\varphi(r). \tag{3.1}$$

根据文献 [18, 19] 讨论的关于局部不确定性, 有下面的性质: 如果 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<T$, 则存在常数 $m>0$, 使得对所有的 $u_i\in\mathbb{R}, i=2,3,\dots,n$,

$$\mathrm{Var}\bigg(\sum_{i=2}^n u_i(B_{t_i}^{H,K}-B_{t_{i-1}}^{H,K})\bigg)\geqslant m\sum_{i=2}^n u_i^2|t_i-t_{i-1}|^{2HK}. \tag{3.2}$$

下面引入一些记号, 设

$$\Lambda:=\{(s,t,s',t');0<s<t<T, 0<s'<t'<T\}, \tag{3.3}$$

$$\Lambda_1:=\{(s,t,s',t');0<s<t<s'<t'<T\},$$

$$\Lambda_2:=\{(s,t,s',t');0<s<s'<t<t'<T\}$$

以及

$$\Lambda_3:=\{(s,t,s',t');0<s'<s<t<t'<T\}.$$

定理 3.1 (自相交局部时的存在性) 定义

$$S_\epsilon(T,H,K):=\int_0^T\int_0^t p_\epsilon(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})dsdt.$$

如果 $H\in(0,1)$ 且 $K\in(0,1]$, 则当 $\epsilon\to 0$ 时, $S_\epsilon(T,H,K)$ 在 $L^2(\Omega,P)$ 意义下收敛, 并且它的极限 $S(T,H,K)$ 也是 $L^2(\Omega,P)$ 中的元素.

证明 分两步来证明这个定理.

第 1 步: 证明对任意的 $\epsilon>0$, $S_\epsilon(T,H,K)\in L^2(\Omega,P)$. 事实上, 因为

$$\begin{aligned}S_\epsilon(T,H,K)&=\int_0^T\int_0^t p_\epsilon(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})dsdt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}))\times\exp\bigg(-\frac{\epsilon|\xi|^2}{2}\bigg)d\xi dsdt,\end{aligned} \tag{3.4}$$

所以

$$\begin{aligned}&E(|S_\epsilon(T,H,K)|^2)\\&\quad=E\bigg(\frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2}\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))\\&\qquad\times\exp\bigg(-\frac{\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)}{2}\bigg)d\xi d\eta dsdtds'dt'\bigg)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} E(\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})))\\
&\qquad\qquad \times\exp\bigg(-\frac{\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)}{2}\bigg)d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} E(\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})))d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} \exp\bigg(-\frac{\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))}{2}\bigg)d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\bigg(\int_{\Lambda_1}+\int_{\Lambda_2}+\int_{\Lambda_3}\bigg)\int_{\mathbb{R}^2} \exp\bigg(-\frac{\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))}{2}\bigg)\\
&\qquad\qquad\qquad \times d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&:= \frac{1}{2\pi^2}(A_1+A_2+A_3).
\end{aligned}
$$

设

$$M := \mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})).$$

利用 (3.2) 式, 分 3 种情形来估计 $E(|S_\epsilon(T,H,K)|^2)$:

(1) 如果 $(s,t,s',t')\in\Lambda_1$, 则

$$M \geqslant m(\xi^2(t-s)^{2HK}+\eta^2(t'-s')^{2HK}). \tag{3.5}$$

所以

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{M}{2}}d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{m}{2}[\xi^2(t-s)^{2HK}+\eta^2(t'-s')^{2HK}]}d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&= \frac{1}{m\pi}\int_{\Lambda_1}((t-s)(t'-s'))^{-HK}dsdtds'dt' < +\infty.
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

(2) 如果 $(s,t,s',t')\in\Lambda_2$, 则

$$
\begin{aligned}
M &= \mathrm{Var}(\xi(B_{s'}^{H,K}-B_s^{H,K})+(\xi+\eta)(B_t^{H,K}-B_{s'}^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_t^{H,K}))\\
&\geqslant m(\xi^2(s'-s)^{2HK}+(\xi+\eta)^2(t-s')^{2HK}+\eta^2(t'-t)^{2HK})\\
&\geqslant m(\xi^2(s'-s)^{2HK}+(\xi+\eta)^2(t-s')^{2HK}).
\end{aligned}\tag{3.7}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{M}{2}}d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{m}{2}[\xi^2(s'-s)^{2HK}+(\xi+\eta)^2(t-s')^{2HK}]}d\xi d\eta dsdtds'dt'\\
&= \frac{1}{m\pi}\int_{\Lambda_2}((s'-s)(t-s'))^{-HK}dsdtds'dt' < +\infty.
\end{aligned}\tag{3.8}
$$

(3) 如果 $(s,t,s',t')\in\Lambda_3$, 则

$$
\begin{aligned}
M &= \mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_s^{H,K}-B_{s'}^{H,K})\\
&\qquad +\eta(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_t^{H,K}))\\
&\geqslant m(\xi^2(t-s)^{2HK}+\eta^2[(s-s')^{2HK}+(t-s)^{2HK}+(t'-t)^{2HK}])\\
&\geqslant m(\xi^2(t-s)^{2HK}+\eta^2(s-s')^{2HK}).
\end{aligned}\tag{3.9}
$$

所以

$$\begin{aligned}A_3 &= \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_3}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{M}{2}} d\xi d\eta ds dt ds' dt' \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi^2}\int_{\Lambda_3}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{m}{2}[\xi^2(t-s)^{2HK}+\eta^2(s-s')^{2HK}]} d\xi d\eta ds dt ds' dt' \\ &= \frac{1}{m\pi}\int_{\Lambda_3}((t-s)(s-s'))^{-HK} ds dt ds' dt' < +\infty. \end{aligned} \tag{3.10}$$

因此, 对所有 $H\in(0,1)$ 和 $K\in(0,1]$, 我们有

$$E(|S_\epsilon(T,H,K)|^2) < +\infty. \tag{3.11}$$

第 2 步: 证明 $\{S_\epsilon(T,H,K), \epsilon>0\}$ 是 $L^2(\Omega,P)$ 上的 Cauchy 列. 设 $m, n\in\mathbb{N}$, 且不失一般性, 假设 $p\in\mathbb{N}$, $m=n+p$.

$$\begin{aligned}&E((S_{\frac{1}{n+p}}(T,H,K) - S_{\frac{1}{n}}(T,H,K))^2) \\ &= E\bigg(\frac{1}{4\pi^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}) + i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})) \\ &\qquad \times(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2n}|\xi|^2})(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\eta|^2} - e^{-\frac{1}{2n}|\eta|^2}) d\xi d\eta ds dt ds' dt'\bigg) \\ &\leqslant C\sup_{\xi\in\mathbb{R}} f_n(\xi)\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} E(\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}) + i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))) \\ &\qquad \times d\xi d\eta ds dt ds' dt', \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$f_n(\xi) := (e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2n}|\xi|^2})^2.$$

现在证明当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} f_n(\xi) \to 0. \tag{3.13}$$

也就是要验证:

(i) 对所有 $\xi\in\mathbb{R}$,

$$f_n(\xi)\to 0, \quad n\to\infty. \tag{3.14}$$

(ii) 对所有 $n\geqslant 1$, 存在 $C>0$, 使得

$$|f_n(\xi) - f_n(\eta)| \leqslant C|\xi-\eta|, \quad \xi,\eta\in\mathbb{R}. \tag{3.15}$$

显然 (3.14) 式成立. 另外, 当 $n\in\mathbb{N}$,

$$\sup_n\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{df_n(\xi)}{d\xi}\right| \leqslant \sup_n\sup_{\xi\in\mathbb{R}} 2|f_n(\xi)|\left(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\xi|^2}\frac{|\xi|}{n+p} + e^{-\frac{1}{2n}|\xi|^2}\frac{|\xi|}{n}\right) \leqslant C.$$

再利用中值定理, 容易得到 (3.15) 式. 另一方面, 由第 1 步知,

$$E(\exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}) + i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))) < +\infty, \tag{3.16}$$

则

$$E((S_{\frac{1}{n+p}}(T,H,K) - S_{\frac{1}{n}}(T,H,K))^2) \to 0, \quad n\to\infty, \tag{3.17}$$

从而 $\{S_\epsilon(T,H,K), \epsilon>0\}$ 是 $L^2(\Omega,P)$ 上的 Cauchy 列. 这说明 $\lim_{\epsilon\to 0} S_\epsilon(T,H,K)$ 存在, 则可记 $S(T,H,K) := \lim_{\epsilon\to 0} S_\epsilon(T,H,K)\in L^2(\Omega,P)$. 因为 $L^2(\Omega,P)$ 是一个 Banach 空间, 所以 $S(T,H,K)\in L^2(\Omega,P)$. 证毕.

下面证明自相交局部时的光滑性. 首先, 需要引入一个有用的引理 (可以参阅 Hu[9] 或 Jiang 与 Wang[11] 讨论关于分式 Brown 运动的类似情形), 这里验证针对双分式 Brown 运动的情形. 设

$$a_{s,t} := \mathrm{Var}(B_t^{H,K} - B_s^{H,K}), \tag{3.18}$$

以及

$$\rho_{s,t,s',t'} := E((B_t^{H,K} - B_s^{H,K})(B_{t'}^{H,K} - B_{s'}^{H,K})). \tag{3.19}$$

引理 3.1 设

$$d(u;s,t,s',t') := d(u;H,K,s,t,s',t') = a_{s,t}a_{s',t'} - u^2\rho^2_{s,t,s',t'},$$

其中 $(u,s,t,s',t')\in[0,1]\times\Lambda$. 如果 $\int_\Lambda \rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt' < +\infty$, 则 $S(T,H,K)\in$ $\mathbf{U}$.

证明 从定理 3.1 的证明可知, 对每个 $\epsilon>0$, 有 $S_\epsilon(T,H,K)\in L^2(\Omega,P)$. 为得到 $S_\epsilon(T,H,K)$ 的混沌分解, 考虑

$$\begin{aligned}
&\exp(i\xi(B_t^{H,K} - B_s^{H,K}))\\
&\quad= \exp\bigg(-\frac{1}{2}\xi^2\mathrm{Var}(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})\bigg)\\
&\qquad\times\exp\bigg(i\xi(B_t^{H,K} - B_s^{H,K}) + \frac{1}{2}\xi^2\mathrm{Var}(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})\bigg).
\end{aligned}\tag{3.20}$$

对于一个随机变量 X, 定义

$$\Upsilon_u(X) := \exp\bigg(uX - \frac{1}{2}u^2\mathrm{Var}(X)\bigg),\quad u\in[0,1]. \tag{3.21}$$

则由 (2.11) 式可得

$$\Upsilon_1(i\xi(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n\sigma^n(s,t,\xi)H_n\bigg(\frac{\xi(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})}{\sigma(s,t,\xi)}\bigg).$$

设

$$\psi_u(s,t,\xi) = \exp\bigg(-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})\xi^2\bigg)\Upsilon_u(i\xi(B_t^{H,K} - B_s^{H,K})). \tag{3.22}$$

根据 (2.9) 和 (3.4) 式,

$$\Gamma(u)(S_\epsilon(T,H,K)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\psi_u(s,t,\xi)\exp\bigg(-\frac{\epsilon|\xi|^2}{2}\bigg)d\xi dsdt. \tag{3.23}$$

令

$$J_\epsilon(u,T,H,K) := E(|\Gamma(\sqrt{u})S_\epsilon(T,H,K)|^2). \tag{3.24}$$

利用 (3.23) 式, 有

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u,T,H,K) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^2} & E(\psi_{\sqrt{u}}(s,t,\xi)\psi_{\sqrt{u}}(s',t',\eta))\\
&\times\exp(-\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)/2)d\xi d\eta dsdtds'dt'.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

注意到任意非退化的二维中心 Gauss 随机向量 (X,Y), 有

$$E\left(\Upsilon_u(X)\Upsilon_v(Y)\right) = \exp\left(uv\mathrm{Cov}(X,Y)\right). \tag{3.26}$$

对 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 和 $0\leqslant s'<t'\leqslant T$, 设

$$\begin{cases} X = B_t^{H,K} - B_s^{H,K},\\ Y = B_{t'}^{H,K} - B_{s'}^{H,K}.\end{cases}$$

容易验证上述定义的 (X,Y) 满足 (3.26) 式. 而

$$\begin{aligned}&E(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))\\&\quad=\xi\eta E((B_t^{H,K}-B_s^{H,K})(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})),\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&E(\Upsilon_{\sqrt{u}}(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K}))\Upsilon_{\sqrt{u}}(i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})))\\&\quad=\exp(-u\xi\eta E((B_t^{H,K}-B_s^{H,K})(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))).\end{aligned}\tag{3.27}$$

因此由 (3.22) 和 (3.27) 式得到

$$\begin{aligned}E(\psi_{\sqrt{u}}(s,t,\xi)\psi_{\sqrt{u}}(s',t',\eta))=\exp\bigg(&-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})\xi^2-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})\eta^2\\&-u\xi\eta E((B_t^{H,K}-B_s^{H,K})(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))\bigg)>0.\end{aligned}$$

这说明

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}E(\psi_{\sqrt{u}}(s,t,\xi)\psi_{\sqrt{u}}(s',t',\eta))\exp\bigg(-\frac{\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)}{2}\bigg)d\xi d\eta\\&\quad\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}E(\psi_{\sqrt{u}}(s,t,\xi)\psi_{\sqrt{u}}(s',t',\eta))d\xi d\eta\\&\quad\leqslant 2\pi(d(u;s,t,s',t'))^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $d(u;s,t,s',t')$ 在引理 3.1 中有定义.

从 (3.25) 式可知

$$J_\epsilon(u,T,H,K)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Lambda(d(u;s,t,s',t'))^{-\frac{1}{2}}dsdtds'dt'.$$

令

$$\begin{aligned}d^\epsilon(u;s,t,s',t')&:=d^\epsilon(u;H,K,s,t,s',t')\\&:=(a_{s,t}+\epsilon)(a_{s',t'}+\epsilon)-u^2\rho_{s,t,s',t'}.\end{aligned}$$

由 (3.22) 和 (3.25) 式, 有

$$J_\epsilon(u,T,H,K)=\frac{1}{2\pi}\int_\Lambda(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))^{-\frac{1}{2}}dsdtds'dt'.$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial u}J_\epsilon(u,T,H,K)=-c\int_\Lambda(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial u}(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))dsdtds'dt',\tag{3.28}$$

其中 $c>0$ 是常数. 容易验证

$$\frac{\partial}{\partial u}(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))=-2u\rho_{s,t,s',t'}.\tag{3.29}$$

因此,

$$\begin{aligned}&(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial u}(d^\epsilon(u;s,t,s',t'))\\&\quad=-2u\rho^2_{s,t,s',t'}((a_{s,t}+\epsilon)(a_{s',t'}+\epsilon)-u^2\rho^2_{s,t,s',t'})^{-\frac{3}{2}}\\&\quad\geqslant-2u\rho^2_{s,t,s',t'}(a_{s,t}a_{s',t'}-u^2\rho^2_{s,t,s',t'})^{-\frac{3}{2}}\\&\quad=-2u\rho^2_{s,t,s',t'}(d(u;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

再由 (3.28) 式,

$$\frac{\partial}{\partial u}J_\epsilon(u,T,H,K)\leqslant 2c\int_\Lambda u\rho^2_{s,t,s',t'}(d(u;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'.$$

回顾 $\Phi_\Theta(u)=\frac{d}{du}(\|\Theta(u)\|^2)$ 和 (3.24) 式, 就有

$$\Phi_{J_\epsilon}(u)\leqslant 2c\int_\Lambda u\rho^2_{s,t,s',t'}(d(u;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'.$$

根据命题 2.1, $S(T,H,K)\in\mathbf{U}$ 当且仅当 $\Phi_{J_\epsilon}(1)<+\infty$. 引理证毕.

现证明光滑性定理.

定理 3.2 (自相交局部时的光滑性) 设 $S(T,H,K)$ 是参数为 (H,K) 的双分式 Brown 运动的自相交局部时. 如果 $H\in(0,1)$, $K\in(0,1]$ 且 $HK\in(0,\frac{2}{3})$, 则 $S(T,H,K)\in\mathbf{U}$.

证明 由引理 3.1, 只需证明

$$\int_\Lambda \rho^2_{s,t,s',t'}\left(d(1;s,t,s',t')\right)^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'<+\infty, \tag{3.30}$$

其中 $d(1;s,t,s',t')=a_{s,t}a_{s',t'}-\rho^2_{s,t,s',t'}$.

回顾 (3.3) 式中 Λ 的定义, 用类似定理 3.1 证明中的 3 种情形来验证 (3.25) 式.

(1) $\Lambda_1=\{(s,t,s',t');0<s<t<s'<t'<T\}$, 令 $e=t-s$ 和 $f=t'-s'$. 由 (3.5) 式可知

$$\mathrm{Var}(\xi(B^{H,K}_t-B^{H,K}_s)+\eta(B^{H,K}_{t'}-B^{H,K}_{s'}))\geqslant m(\xi^2e^{2HK}+\eta^2f^{2HK}). \tag{3.31}$$

这说明

$$a_{s,t}\xi^2+2\rho_{s,t,s',t'}\xi\eta+a_{s',t'}\eta^2\geqslant m(\xi^2e^{2HK}+\eta^2f^{2HK}),$$

即对所有 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, 有

$$(a_{s,t}-me^{2HK})\xi^2+2\rho_{s,t,s',t'}\xi\eta+(a_{s',t'}-mf^{2HK})\eta^2\geqslant 0.$$

从而

$$\Delta=(2\rho_{s,t,s',t'})^2-4(a_{s,t}-me^{2HK})(a_{s',t'}-mf^{2HK})\leqslant 0.$$

化简可得

$$a_{s,t}a_{s',t'}-\rho^2_{s,t,s',t'}\geqslant me^{2HK}f^{2HK}. \tag{3.32}$$

同时运用 (2.2) 和 (3.18) 式,

$$|\rho_{s,t,s',t'}|\leqslant\sqrt{a_{s,t}a_{s',t'}}\leqslant 2^{-K}(ef)^{HK}.$$

所以对 $H\in(0,1)$ 和 $K\in(0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{\Lambda_1}\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\&\quad\leqslant\int_{\Lambda_1}(2^{-K}(ef)^{HK})^2(me^{2HK}f^{2HK})^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\&\quad\leqslant C\int_{\Lambda_1}(t-s)^{-HK}(t'-s')^{-HK}dsdtds'dt'<+\infty.\end{aligned} \tag{3.33}$$

(2) $\Lambda_2=\{(s,t,s',t');0<s<s'<t<t'<T\}$, 令 $e=s'-s$, $f=t-s'$ 和 $g=t'-t$. 由 (3.7) 式可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\xi(B^{H,K}_t-B^{H,K}_s)+\eta(B^{H,K}_{t'}-B^{H,K}_{s'}))\\&\quad\geqslant m(\xi^2e^{2HK}+(\xi+\eta)^2f^{2HK}+\eta^2g^{2HK}).\end{aligned} \tag{3.34}$$

这说明

$$a_{s,t}\xi^2+2\rho_{s,t,s',t'}\xi\eta+a_{s',t'}\eta^2\geqslant m(\xi^2e^{2HK}+(\xi+\eta)^2f^{2HK}+\eta^2g^{2HK}),$$

即对所有 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$,

$$(a_{s,t}-me^{2HK}-mf^{2HK})\xi^2+2(\rho_{s,t,s',t'}-mf^{2HK})\xi\eta+(a_{s',t'}-mf^{2HK}-mg^{2HK})\eta^2\geqslant 0.$$

因而

$$\Delta=(2(\rho_{s,t,s',t'}-mf^{2HK}))^2-4(a_{s,t}-me^{2HK}-mf^{2HK})(a_{s',t'}-mf^{2HK}-mg^{2HK})\leqslant 0.$$

所以

$$\begin{aligned}
&a_{s,t}a_{s',t'}-\rho^2_{s,t,s',t'}\\
&\quad\geqslant ma_{s,t}(f^{2HK}+g^{2HK})+ma_{s',t'}(e^{2HK}+f^{2HK})-2m\rho_{s,t,s',t'}f^{2HK}\\
&\qquad -m^2(e^{2HK}f^{2HK}+f^{2HK}g^{2HK}+e^{2HK}g^{2HK})\\
&\quad\geqslant m(a_{s,t}g^{2HK}+a_{s',t'}e^{2HK})-m^2(e^{2HK}f^{2HK}+f^{2HK}g^{2HK}+e^{2HK}g^{2HK}),
\end{aligned}$$

其中用到下面的事实:

$$|\rho_{s,t,s',t'}|\leqslant\sqrt{a_{s,t}a_{s',t'}}\leqslant\frac{1}{2}(a_{s,t}+a_{s',t'}).$$

再利用 (2.2) 和 (3.18) 式得

$$a_{s,t}\geqslant 2^{-K}(e+f)^{2HK},\quad a_{s',t'}\geqslant 2^{-K}(f+g)^{2HK}.$$

则存在正常数 $\bar{m}$, 使得

$$a_{s,t}g^{2HK}+a_{s',t'}e^{2HK}\geqslant\bar{m}(e^{2HK}f^{2HK}+f^{2HK}g^{2HK}+e^{2HK}g^{2HK}).$$

由上面讨论可知, 存在一个充分小的正常数 $\hat{m}$, 使得

$$\begin{aligned}
a_{s,t}a_{s',t'}-\rho^2_{s,t,s',t'}&\geqslant\hat{m}((e+f)^{2HK}g^{2HK}+(f+g)^{2HK}e^{2HK})\\
&\geqslant C((e+f)^{HK}(f+g)^{HK}e^{HK}g^{HK})\\
&\geqslant C(e^{\frac{4HK}{3}}f^{\frac{4HK}{3}}g^{\frac{4HK}{3}}),
\end{aligned}\tag{3.35}$$

最后的不等式用到 $e+f\geqslant Ce^{\frac{2}{3}}f^{\frac{1}{3}}$. 另外, 通过 (2.2) 和 (3.18) 式, 有

$$\begin{aligned}
|\rho_{s,t,s',t'}|&\leqslant\sqrt{a_{s,t}a_{s',t'}}\\
&\leqslant 2^{-K}((t-s)(t'-s'))^{HK}\\
&=2^{-K}((e+f)(f+g))^{HK}\\
&\leqslant 2^{-K}(e^{HK}f^{HK}+f^{HK}g^{HK}+e^{HK}g^{HK}+f^{2HK}).
\end{aligned}$$

则

$$\rho^2_{s,t,s',t'}\leqslant C(e^{2HK}f^{2HK}+f^{2HK}g^{2HK}+e^{2HK}g^{2HK}+f^{4HK}).\tag{3.36}$$

联立 (3.35) 和 (3.36) 式, 有

$$\begin{aligned}
\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}&\leqslant C((e+f)^{2HK}g^{2HK}+(f+g)^{2HK}e^{2HK}))^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad+C((e+f)^{2HK}g^{2HK}+(f+g)^{2HK}e^{2HK})^{-\frac{3}{2}}f^{4HK}\\
&\leqslant Ce^{-\frac{2HK}{3}}f^{-\frac{2HK}{3}}g^{-\frac{2HK}{3}}\\
&\quad+C(f^{2HK}g^{2HK}+f^{2HK}e^{2HK})^{-\frac{3}{2}}f^{4HK}\\
&\leqslant Ce^{-\frac{2HK}{3}}f^{-\frac{2HK}{3}}g^{-\frac{2HK}{3}}+Ce^{-\frac{3HK}{2}}f^{HK}g^{-\frac{3HK}{2}}.
\end{aligned}$$

已知 $H\in(0,1)$, $K\in(0,1]$ 且 $HK\in(0,\frac{2}{3})$, 易证

$$\int_{\Lambda_2}\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'<+\infty.\tag{3.37}$$

(3) $\Lambda_3=\{(s,t,s',t');0<s'<s<t<t'<T\}$, 设 $e=s-s'$, $f=t-s$ 和 $g=t'-t$. 由 (3.9) 式可知

$$\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K}))\geqslant m(\xi^2f^{2HK}+\eta^2[e^{2HK}+f^{2HK}+g^{2HK}]).$$

类似上面两种情形, 可以验证

$$a_{s,t}a_{s',t'}-\rho^2_{s,t,s',t'}\geqslant m(e+f+g)^{2HK}f^{2HK}, \tag{3.38}$$

同时

$$|\rho_{s,t,s',t'}|\leqslant Cf^{HK}(e+f+g)^{HK}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda_3}\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\
&\quad\leqslant C\int_{\Lambda_3}(f^{HK}(e+f+g)^{HK})^2((e+f+g)^{2HK}f^{2HK})^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\
&\quad=C\int_{\Lambda_3}(e+f+g)^{-HK}f^{-HK}dsdtds'dt'\\
&\quad=C\int_{\Lambda_3}(t'-s')^{-HK}(t-s)^{-HK}dsdtds'dt'<+\infty,
\end{aligned}\tag{3.39}$$

其中 $H\in(0,1)$, $K\in(0,1]$.

综上所述,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Lambda}\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\
&\quad=2\bigg(\int_{\Lambda_1}+\int_{\Lambda_2}+\int_{\Lambda_3}\bigg)\rho^2_{s,t,s',t'}(d(1;s,t,s',t'))^{-\frac{3}{2}}dsdtds'dt'\\
&\quad<+\infty.
\end{aligned}\tag{3.40}$$

证毕.

4 相遇局部时的存在性和光滑性

设 $B^{H_i,K_i}=\{B_t^{H_i,K_i},t\geqslant 0\}$ $(i\in\{1,2\})$ 是两个独立的双分式 Brown 运动. 本节用近似逼近的方法证明相遇局部时的存在性, 然后通过一个引理来验证它的光滑性.

命题 4.1 设 $H_i\in(0,1)$, $K_i\in(0,1]$, $i=1,2$,

$$\tilde a_t:=\mathrm{Var}(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})=t^{2H_1K_1}+t^{2H_2K_2},$$

以及

$$\begin{aligned}
\tilde\rho_{s,t}&:=E((B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2}))\\
&=\frac{1}{2^{K_1}}((t^{2H_1}+s^{2H_1})^{K_1}-|t-s|^{2H_1K_1})\\
&\quad+\frac{1}{2^{K_2}}((t^{2H_2}+s^{2H_2})^{K_2}-|t-s|^{2H_2K_2}),
\end{aligned}$$

则

$$\int_0^T\int_0^T(\tilde a_t\tilde a_s-\tilde\rho^2_{s,t})^{-\frac{1}{2}}dsdt<+\infty. \tag{4.1}$$

证明 由于 B^{H_1,K_1} 和 B^{H_2,K_2} 是两个独立的双分式 Brown 运动, 故对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+\eta(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2}))\\&\quad=\mathrm{Var}((\xi B_t^{H_1,K_1}+\eta B_s^{H_1,K_1})-(\xi B_t^{H_2,K_2}+\eta B_s^{H_2,K_2}))\\&\quad=\mathrm{Var}(\xi B_t^{H_1,K_1}+\eta B_s^{H_1,K_1})+\mathrm{Var}(\xi B_t^{H_2,K_2}+\eta B_s^{H_2,K_2})\\&\quad\geqslant\mathrm{Var}(\xi B_t^{H,K}+\eta B_s^{H,K}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中 $(H,K)=(H_1,K_1)$ 或 (H_2,K_2).

设 $s\leqslant t$, 结合命题 3.1, 可以找到一个充分小的正数 $m<1$, 使得

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\xi B_t^{H,K}+\eta B_s^{H,K})&=\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+(\xi+\eta)B_s^{H,K})\\&\geqslant m(\xi^2(t-s)^{2HK}+(\xi+\eta)^2s^{2HK}).\end{aligned}\tag{4.3}$$

由 (4.2) 和 (4.3) 式可知

$$\tilde{a}_t\xi^2+2\tilde{\rho}_{s,t}\xi\eta+\tilde{a}_s\eta^2\geqslant m(\xi^2(t-s)^{2HK}+(\xi+\eta)^2s^{2HK}),$$

即对任意 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$, 有

$$(\tilde{a}_t-m(t-s)^{2HK}-ms^{2HK})\xi^2+2(\tilde{\rho}_{s,t}-ms^{2HK})\xi\eta+(\tilde{a}_s-ms^{2HK})\eta^2\geqslant 0,$$

则

$$\Delta=(2(\tilde{\rho}_{s,t}-ms^{2HK}))^2-4(\tilde{a}_t-m(t-s)^{2HK}-ms^{2HK})(\tilde{a}_s-ms^{2HK})\leqslant 0.$$

所以

$$\begin{aligned}&\tilde{a}_t\tilde{a}_s-\tilde{\rho}_{s,t}^2\\&\quad\geqslant m\tilde{a}_ts^{2HK}+m\tilde{a}_s((t-s)^{2HK}+s^{2HK})-2m\tilde{\rho}_{s,t}s^{2HK}-m^2s^{2HK}(t-s)^{2HK}.\end{aligned}$$

易知

$$|\tilde{\rho}_{s,t}|\leqslant\sqrt{\tilde{a}_t\tilde{a}_s}\leqslant\frac{1}{2}(\tilde{a}_t+\tilde{a}_s),$$

和

$$\tilde{a}_s=s^{2H_1K_1}+s^{2H_2K_2}\geqslant s^{2HK}.$$

化简可得

$$\tilde{a}_t\tilde{a}_s-\tilde{\rho}_{s,t}^2\geqslant m(1-m)s^{2HK}(t-s)^{2HK}.\tag{4.4}$$

因为 $H\in(0,1)$ 和 $K\in(0,1]$, 所以

$$\int_0^T\int_0^T(\tilde{a}_t\tilde{a}_s-\tilde{\rho}_{s,t}^2)^{-\frac{1}{2}}dsdt\leqslant C(m)\int_0^T\int_0^Ts^{-HK}(t-s)^{-HK}dsdt<+\infty.$$

命题证毕.

定理 4.1 (相遇局部时的存在性) 定义

$$I_\epsilon(H,K,T):=I_\epsilon(H_1,H_2,K_1,K_2,T):=\int_0^Tp_\epsilon(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})dt.$$

如果 $H_i\in(0,1)$, $K_i\in(0,1]$ $(i=1,2)$, 则当 $\epsilon\to 0$ 时, $I_\epsilon(H,K,T)$ 在 $L^2(\Omega,P)$ 意义下收敛, 而且它的极限 $I(H,K,T)$ 也是 $L^2(\Omega,P)$ 中的元素.

证明 分两步来证明定理.

第 1 步: 证明对每个 $\epsilon>0$, $I_\epsilon(H,K,T)\in L^2(\Omega,P)$. 事实上, 因为

$$\begin{aligned}I_\epsilon(H,K,T)&=\int_0^T p_\epsilon(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2}))\times\exp\bigg(-\frac{\epsilon|\xi|^2}{2}\bigg)d\xi dt,\end{aligned}\tag{4.5}$$

所以

$$\begin{aligned}&E(|I_\epsilon(H,K,T)|^2)\\&=E\bigg(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+i\eta(B_s^{H_1,K_2}-B_s^{H_2,K_2}))\\&\qquad\times\exp\bigg(-\frac{\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)}{2}\bigg)d\xi d\eta dsdt\bigg)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}E(\exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+i\eta(B_s^{H_1,K_2}-B_s^{H_2,K_2})))\\&\qquad\times\exp\bigg(-\frac{\epsilon(|\xi|^2+|\eta|^2)}{2}\bigg)d\xi d\eta dsdt.\end{aligned}\tag{4.6}$$

然而,

$$\begin{aligned}&E(\exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+i\eta(B_s^{H_1,K_2}-B_s^{H_2,K_2})))\\&\quad=\exp\bigg(-\frac{\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+\eta(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2}))}{2}\bigg).\end{aligned}\tag{4.7}$$

令 $\det\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$ 表示 Gauss 随机向量 (X_1,X_2) 协方差矩阵的行列式. 我们知道 $n\times n$ 维正定矩阵 Γ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{[\det(\Gamma)]^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\bigg(-\frac{1}{2}x'\Gamma x\bigg)dx=1.\tag{4.8}$$

易知 $(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2},B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2})$ 是一个二维中心 Gauss 向量, 而 $\det\mathrm{Cov}(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2},B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2})$ 是一个正定矩阵的行列式. 从而由 (4.8) 式知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\exp\bigg(-\frac{\mathrm{Var}(\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+\eta(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2}))}{2}\bigg)d\xi d\eta\\&\quad=2\pi[\det\mathrm{Cov}(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2},B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2})]^{-\frac{1}{2}}\\&\quad=2\pi(\tilde{a}_t\tilde{a}_s-\tilde{\rho}_{s,t}^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

因此, 联合 (4.6), (4.7), (4.9) 式和命题 3.1 可得

$$\begin{aligned}&E(|I_\epsilon(H,K,T)|^2)\\&\quad\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}E(\exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+i\eta(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2})))d\xi d\eta dsdt\\&\quad\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^T\int_0^T(\tilde{a}_t\tilde{a}_s-\tilde{\rho}_{s,t}^2)^{-\frac{1}{2}}dsdt<+\infty,\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中 $H_i\in(0,\frac{1}{2})$, $K_i\in(0,1]$ $(i=1,2)$. 这说明如果 $H_i\in(0,\frac{1}{2})$ 和 $K_i\in(0,1]$ $(i=1,2)$, 则对任意 $\epsilon>0$, $E(|I_\epsilon(H,K,T)|^2)<+\infty$.

第 2 步: 证明 $\{I_\epsilon(H,K,T),\epsilon>0\}$ 是 $L^2(\Omega,P)$ 中的 Cauchy 列. 这步证明类似定理 3.1

中的第 2 步, 只要将

$$\int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\xi(B_t^{H,K}-B_s^{H,K})+i\eta(B_{t'}^{H,K}-B_{s'}^{H,K})) \\ \times(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\xi|^2}-e^{-\frac{1}{2n}|\xi|^2})(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\eta|^2}-e^{-\frac{1}{2n}|\eta|^2})d\xi d\eta dsdtds'dt'$$

替换成

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} \exp(i\xi(B_t^{H_1,K_1}-B_t^{H_2,K_2})+i\eta(B_s^{H_1,K_1}-B_s^{H_2,K_2})) \\ \times(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\xi|^2}-e^{-\frac{1}{2n}|\xi|^2})(e^{-\frac{1}{2(n+p)}|\eta|^2}-e^{-\frac{1}{2n}|\eta|^2})d\xi d\eta dsdt.$$

综上两步, 完成证明.

证明了相遇局部时的存在性, 现在可以在特定参数要求下讨论它的光滑性.

定理 4.2 (相遇局部时的光滑性) 设 $I(H,K,T)$ 是参数为 (H_1,K_1) 和 (H_2,K_2) 的两个独立双分式 Brown 运动 B^{H_1,K_1} 和 B^{H_2,K_2} 的相遇局部时. 如果 $H_i\in(0,1)$, $K_i\in(0,1]$ $(i=1,2)$ 并且 $\min\{H_1K_1,H_2K_2\}<\frac{1}{3}$, 则 $I(H,K,T)\in\mathbf{U}$.

为证明上述定理, 需要下面的引理:

引理 4.1 设 $\tilde{d}(u;s,t):=\tilde{d}_{H_1,H_2,K_1,K_2}(u;s,t)=\tilde{a}_s\tilde{a}_t-u^2\tilde{\rho}_{s,t}^2$, 其中 $(u,s,t)\in[0,1]\times[0,T]^2$. 若 $\int_0^T\int_0^T\tilde{\rho}_{s,t}^2(\tilde{d}(1;s,t))^{-\frac{3}{2}}dsdt<+\infty$, 则 $I(H,K,T)\in\mathbf{U}$.

证明 证明过程类似文献 [11] 中的引理 3.1, 只需要将其中关于分式 Brown 运动的混沌分解替换成双分式 Brown 运动的即可.

定理 4.2 的证明 由引理 4.1, 只需验证

$$\int_0^T\int_0^T(\tilde{d}(1;s,t))^{-\frac{3}{2}}\tilde{\rho}_{s,t}^2dsdt<+\infty.$$

注意到

$$|\tilde{\rho}_{s,t}|\leqslant\sqrt{\tilde{a}_t\tilde{a}_s}=((t^{2H_1K_1}+t^{2H_2K_2})(s^{2H_1K_1}+s^{2H_2K_2}))^{\frac{1}{2}}.$$

设

$$hk:=\min\{H_1K_1,H_2K_2\},$$

则 $hk\in(0,\frac{1}{3})$. 结合 (4.4) 式有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^T(\tilde{d}(1;s,t))^{-\frac{3}{2}}\tilde{\rho}_{s,t}^2dsdt\\ &\leqslant\int_0^T\int_0^T(m(1-m)s^{2hk}(t-s)^{2hk})^{-\frac{3}{2}}((t^{2H_1K_1}+t^{2H_2K_2})(s^{2H_1K_1}+s^{2H_2K_2}))dsdt\\ &\leqslant C(m,T)\int_0^T\int_0^T s^{-3hk}(t-s)^{-3hk}dsdt<+\infty.\end{aligned}$$

证毕.

致谢 感谢审稿人和编委对初稿提出的宝贵意见.

参考文献

1 Bonami A, Estrade A. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *J Fourier Anal Appl*, **9**: 215–236 (2003)

2 Cheridito P. Gaussian moving averages, semimartingales and option pricing. *Stochastic Process Appl*, **109**: 47–68 (2004)

3 Benson D A, Meerschaert M M, Baeumer B. Aquifer operator-scaling and the effect on solute mixing and disperson. *Water Resour Res*, **42**: W01415 (2006)

4 Rosen J. The intersection local time of fractional Brownian motion in the plane. *J Multivariate Anal*, **23**(1): 37–46 (1987)

5 Xiao Y M, Zhang T S. Local time of fractional Brownian sheets. *Probab Theory Related Fields*, **124**: 121–139 (2002)

6 Ayache A, Wu D S, Xiao Y M. Joint continuity of the local times of fractional Brownian sheets. *Ann Inst H Poincaré Probab Statist*, **44**(4): 727–748 (2008)

7 Nualart D, Vives J. Chaos expansion and local time. *Publ Mat*, **36**(2): 827–836 (1992)

8 Imkeller P, Abreu V, Vives J. Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ and renormalization. *Stochastic Process Appl*, **56**: 1–34 (1995)

9 Hu Y Z. Self-intersection of fractional Brownian motions—via chaos expansion. *J Math Kyoto Univ*, **41**(2): 233–250 (2001)

10 Hu Y Z, Nualart D. Renormalized self-intersection local time for fractional Brownian motion. *Ann Probab* **33**(3): 948–983 (2005)

11 Jiang Y M, Wang Y J. On the collision local time of fractional Brownian motions. *Chinese Ann Math Ser B*, **28**(3): 311–320 (2007)

12 Houdré C, Villa J. An example of infinite dimensional quasi-helix. *Stoch Models*, **336**: 195–201 (2003)

13 Russo F, Tudor C A. On the bifractional Brownian motion. *Stochastic Process Appl*, **5**: 830–856 (2006)

14 Tudor C A, Xiao Y M. Sample path properties of bifractional Brownian motion. *Bernoulli*, **14**: 1023–1052 (2007)

15 Simon B. The $P(\phi)_2$ Euclidean Field Theory. Princeton: Princeton University Press, 1974

16 Meyer P A. Quantum for Probabilists. Lecture Notes in Math, Vol 1538. New York: Springer-Verlag, 1993

17 Watanabe S. Lectures on Stochastic Differential Equation and Malliavin Calculus. Berlin: Springer-Verlag, 1984

18 Berman S M. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Univ Math J*, **23**: 69–94 (1973)

19 Xiao Y M. Strong local nondeterminism of Gaussian random fields and its applications. In: Asymptotic Theory in Probability and Statistics with Applications. Beijing: Higher Education Press, 2007, 136–176