中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 6 期: 719～730
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE IN CHINA PRESS

具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间上的函数逼近

汪和平 [①*], 张艳伟 [②], 翟学博 [①]

① 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048
② 枣庄学院数学系, 枣庄 277160
E-mail: wanghp@yahoo.cn

收稿日期: 2008-02-23; 接受日期: 2008-12-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10871132)、北京自然科学基金 (批准号: 1062004) 和北京市教育委员会重点项目 (批准号: KZ200810028013) 资助项目

摘要 本文讨论了具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间上的一元周期函数被三角多项式子空间的最佳逼近及被 Fourier 部分和算子, Vallée-Poussin 算子, Cesàro 算子, Abel 算子和 Jackson 算子的逼近, 得到了平均误差估计. 证明了在平均框架下, 在 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下三角多项式子空间是渐进最优的子空间, 但是在 L_∞ 空间尺度下, 三角多项式子空间不是渐进最优的子空间. 还证明了, Fourier 部分和算子和 Vallée-Poussin 算子在 L_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ 空间尺度下是渐进最优的线性算子. 注意到在平均框架以及 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下, 渐进最优的线性算子, 如 Fourier 部分和算子及 Vallée-Poussin 算子, 与最优的非线性算子的逼近效果一样好.

关键词 平均宽度 最佳逼近 线性算子逼近 Sobolev 空间 Gauss 测度

MSC(2000) 主题分类 **42A10, 41A25, 41A35, 42A61**

1 引言

设 X 是具有范数 $\|\cdot\|_X$ 的赋范线性空间, K 是 X 的一个有界子集, T 是从 X 到 X 上的一个有界线性算子, F 是 X 上的一个子空间. 量

$$E(K,F,X):=\sup_{x\in K} e(x,F)_X:=\sup_{x\in K}\inf_{y\in F}\|x-y\|_X,\qquad E(K,T,X):=\sup_{x\in K}\|x-Tx\|_X$$

分别叫做 K 对 F 的偏差和 K 被算子 T 逼近的误差. 它们反映了 K 中的 “最坏” 元素被 F 和 T 的逼近程度. 量

$$d_n(K,X):=\inf_{F_n} E(K,F_n,X),$$

叫做 K 在 X 中的 Kolmogorov n-宽度, 这里 F_n 取遍 X 中的所有维数不超过 n 的线性子空间. 它反映了 K 中的 “最坏” 元素被 n-维线性子空间逼近的最佳误差. K 在 X 中的线性 n-宽度定义为:

$$\lambda_n(K,X):=\inf_{T_n} E(K,T_n,X),$$

引用格式: 汪和平, 张艳伟, 翟学博. 具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间上的函数逼近. 中国科学 A, 2009, 39(6): 719–730
Wang H P, Zhang Y W, Zhai X B. Approximation of functions on the Sobolev space with a Gaussian measure. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0113-8

这里 T_n 取遍 X 上所有秩不超过 n 的线性算子. 它反映了 K 中的 "最坏" 元素被秩为 n 的线性算子逼近的误差. 更多关于 Kolmogorov 和线性宽度的信息参见文献 [1,2].

设 W 是一个 Banach 空间, $\mathcal{B}$ 为 W 中所有开子集生成的 Borel 域, μ 为定义在 $\mathcal{B}$ 上的一个概率测度. 对于 $1 \leqslant p < \infty$, W 对 F 的 p-平均偏差和 W 被 T 逼近的 p-平均误差分别定义为:

$$E(W,F,\mu,X)_p := \left(\int_W (e(x,F)_X)^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

和

$$E(W,T,\mu,X)_p := \left(\int_W (\|x-Tx\|_X)^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

它们反映了 W 中的 "大多数" 元素被 F 和 T 的逼近程度. 类似的, 对于 $1 \leqslant p < \infty$, p-平均 Kolmogorov n-宽度和 p-平均线性 n-宽度分别定义为:

$$d_n^{(a)}(W,\mu,X)_p = \inf_{F_n} \left(\int_W e(x,F_n)_X^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

和

$$\lambda_n^{(a)}(W,\mu,X)_p = \inf_{T_n} \left(\int_W \|x-T_n x\|_X^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

它们反映了 W 中的 "大多数" 元素被 n-维线性子空间和秩为 n 的线性算子的最佳逼近误差. 因此, 在最坏框架下, 逼近强调的是 "最坏" 元素的行为, 而在平均框架下, 逼近强调的是 "大多数" 元素的行为. 我们注意到, 在平均框架下逼近效果好的方法, 在最坏框架下逼近效果并不一定好. 和最坏框架情况相比, 在平均框架下的逼近结果与实际经验更加匹配.

在这篇论文中, 我们讨论具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间上的一元周期函数被三角多项式子空间的最佳逼近及被常见的线性算子逼近的问题. 对 Wiener 空间上的连续函数, 类似的逼近问题在文献 [3–6] 中已经研究过了. 更多关于平均框架下的结果参见文献 [7,8]. 文献 [9–12] 采用了离散化方法得到了具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间的平均 Kolmogorov 宽度和平均线性宽度的渐近阶. 但是, 这种离散化方法没有给出渐进最优的线性子空间和渐进最优的线性算子. 在这篇论文中, 我们得到了在平均框架下, 三角多项式子空间的最佳逼近及 Fourier 部分和算子, Vallée-Poussin 算子, Cesàro 算子, Abel 算子, Jackson 算子逼近的平均误差估计的渐进阶. 我们证明了, 在平均框架及 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下, 三角多项式子空间是渐进最优的线性子空间, 但是在 L_∞ 空间尺度下, 三角多项式子空间不是渐进最优的线性子空间. 我们还证明了, Fourier 部分和算子和 Vallée-Poussin 算子, 在 L_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ 空间尺度下是渐进最优的线性算子. 注意到在平均框架及 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下, 渐进最优线性算子, 如 Fourier 部分和算子和 Vallée-Poussin 算子, 与最优的非线性算子的逼近效果一样好. 另外, Cesàro 算子, Abel 算子和 Jackson 算子都具有饱和性.

2 主要结果

假设 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 用 L_q 表示所有以 2π 为周期的具有有限 L_q 范数的可测函数 f 组成的集合, 其中 f 的 L_q 范数为

$$\|f\|_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

(若 $q=\infty$, 则用本性上确界取代积分.) 我们考虑所有的以 2π 为周期的可测函数 $x(t)$ ($t\in[0,2\pi]$) 组成的 Hilbert 空间 L_2, 其中 $x(t)$ 的 Fourier 级数为

$$x(t)=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\hat{x}(k)\exp(ikt):=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\hat{x}(k)e_k(t),\quad \hat{x}(k)=\langle x,e_k\rangle,\quad e_k(t):=\exp(ikt),$$

$x(t)$ 和 $y(t)$ 的内积定义为

$$\langle x,y\rangle=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}x(t)\overline{y(t)}dt,\quad x,y\in L_2.$$

对于任意的 $r\in\mathbb{R}$, 设 $D^rx:=x^{(r)}$ 为 x 在分布意义下的 r-次 Weil 导数, 即,

$$D^rx(t):=x^{(r)}(t)=\sum_k{}'(ik)^r\hat{x}(k)e_k(t)\qquad\left((ik)^r=|k|^r\exp\left(\frac{\pi i}{2}\operatorname{sign}r\right)\right),$$

其中 $\sum_k'$ 表示对所有的 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 求和. 对 $r>0$, Sobolev 空间 W_2^r 定义为:

$$\begin{aligned}W_2^r&=\left\{x^{(r)}\in L_2\ :\ \int_0^{2\pi}x(t)\,dt=0\right\}\\&=\left\{x(t)=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\hat{x}(k)e_k(t)\ :\ \hat{x}(0)=0,\quad\sum_k{}'|k|^{2r}|\hat{x}(k)|^2<\infty\right\},\end{aligned}$$

其范数为 $\|x\|_{W_2^r}^2=\langle x^{(r)},x^{(r)}\rangle$. 那么, Sobolev 空间 W_2^r 是一个 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$\langle x,y\rangle_r=\langle x^{(r)},y^{(r)}\rangle.$$

我们赋予 W_2^r 一个 Gauss 测度 μ, 其均值为零, 其相关算子 C_μ 的特征函数 $e_k=\exp(ik(\cdot))$ 相应的特征值是

$$\lambda_k=|k|^{-s},\quad s>1,$$

则有,

$$C_\mu e_k=\lambda_ke_k,\qquad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.\tag{2.1}$$

因此,

$$C_\mu x=\sum_k{}'\hat{x}(k)\lambda_ke_k=\exp\frac{i\pi}{2}\sum_k{}'\hat{x}(k)(ik)^{-s}e_k=\exp\frac{i\pi}{2}x^{(-s)}.$$

另外, 由 Gauss 测度的性质 (见文献 [13, pp. 48–49], 我们有

$$\langle C_\mu x,y\rangle_r=\int_{W_2^r}\langle x,v\rangle_r\overline{\langle y,v\rangle}_r\,\mu(dv).\tag{2.2}$$

更多关于 Gauss 测度的信息参见文献 [13,14].

当 $r>\max\{0,\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\}$, 空间 W_2^r 可紧嵌入到空间 L_q ($1\leqslant q\leqslant\infty$) 中 (见文献 [15, p. 43]). 因此在平均框架下, 我们可以研究具有 Gauss 测度的 Sobolev 空间 W_2^r 上的周期函数在 L_q 空间尺度下的逼近. 用 $\mathcal{T}_n$ 表示次数不超过 n 的所有三角多项式组成的子空间, 对于 $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 记

$$\begin{aligned}E_n(f)_q&:=e(f,\mathcal{T}_n)_{L_q}:=\inf_{g\in\mathcal{T}_n}\|f-g\|_q,\\E_{pq}(\mu)_n&:=E(W_2^r,\mathcal{T}_n,\mu,L_q)_p=\left(\int_{W_2^r}E_n(x)_q^p\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

和

$$E_{pq}(\Lambda,\mu):=E(W_2^r,\Lambda,\mu,L_q)_p=\left(\int_{W_2^r}\|x(t)-\Lambda(x,t)\|_q^p\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 Λ 表示从 L_q 到 L_q 上的有界线性算子. 设 $\Lambda_n = \{\lambda_n(k)\}_{k\in\mathrm{Z}}$ 是一个有界序列,

$$\Lambda_n(x,t) = \sum_{k\in\mathrm{Z}} \lambda_n(k)\hat{x}(k)e_k(t), \qquad n\in\mathbb{Z}^+, \tag{2.4}$$

是一个乘子, 其中 $x = \sum_k' \hat{x}(k)e_k(t) \in W_2^r$. 本文主要研究在平均框架下周期函数被三角多项式子空间的最佳逼近和一些常见算子的逼近问题, 主要结果如下:

定理 1 若 $1\leqslant p,q<\infty$, $s>1$, $r>\frac{1}{2}$, 乘子 $\Lambda_n(x,t)$ 由 (2.4) 给出, 则

(i)

$$E_{pp}(\Lambda_n,\mu) = c_p^{\frac{1}{p}}\left(\sum_k{}'(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

其中 $c_p = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p+1}{2})$.

(ii)

$$E_{pq}(\Lambda_n,\mu) \asymp \left(\sum_k{}'(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6}$$

其中 $A(n)\asymp B(n)$ 表示 $A(n)\ll B(n)$ 和 $B(n)\ll A(n)$, $A(n)\ll B(n)$ 表示存在一个不依赖于 n 的正常数 c, 使得 $A(n)\leqslant cB(n)$.

定理 2 若 $1\leqslant p<\infty$, $s>1$, $r>\frac{1}{2}$, 乘子 $\Lambda_n(x,t)$ 由 (2.4) 给出, 则对任意整数 $m>p$, 有

$$\begin{aligned} E_{p\infty}(\Lambda_n,\mu) \ll m^{\frac{1}{2}}&\left(\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+\sum_{k=m}^{\infty}k^{\frac{1}{2}}2^{-k(r+\frac{s}{2})}\left(\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

作为定理 1–2 的应用, 我们考虑平均框架下的常见线性算子的逼近. 在 (2.4) 中, 令

$$\lambda_n(k) = \begin{cases} 1, & |k|\leqslant n, \\ 0, & |k|>n, \end{cases}$$

我们得到 Fourier 部分和算子:

$$S_n(x,t) = \sum_{k=-n}^{n}\hat{x}(k)e_k(t);$$

在 (2.4) 中, 再令

$$\lambda_n(k) = \begin{cases} 1, & |k|\leqslant n, \\ \dfrac{2n-|k|}{n}, & n+1\leqslant|k|\leqslant 2n-1, \\ 0, & |k|\geqslant 2n, \end{cases}$$

我们则得到 Vallée-Poussin 算子:

$$V_n(x,t) = \sum_{k=-n}^{n}\hat{x}(k)e_k(t) + \sum_{|k|=n+1}^{2n-1}\left(\frac{2n-|k|}{n}\right)\hat{x}(k)e_k(t).$$

定理 3 若 $1\leqslant p<\infty$, $s>1$, $r>\frac{1}{2}$. 则

$$E_{pq}(\mu)_n \asymp E_{pq}(S_n,\mu) \asymp E_{pq}(V_n,\mu) \asymp \begin{cases} n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, & 1\leqslant q<\infty, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & q=\infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

注 1 由文献 [10–12], 我们知道, 对 $1 \leqslant p < \infty$, 有

$$d_n^{(a)}(W_2^r, \mu, L_q)_p \asymp n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

$$\lambda_n^{(a)}(W_2^r, \mu, L_q)_p \asymp \begin{cases} n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, & 1 \leqslant q < \infty, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases}$$

其中, $d_n^{(a)}(W_2^r, \mu, L_q)_p$ 和 $\lambda_n^{(a)}(W_2^r, \mu, L_q)_p$ 分别表示具有 Gauss 测度 μ 的 Sobolev 空间 W_2^r 在 L_q 空间尺度下的 p-平均 Kolmogorov n-宽度和 p-平均线性 n-宽度. 再由定理 3, 我们得到, 在平均框架下, 三角多项式子空间在 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下是渐进最优的线性子空间, 但在 L_∞ 空间尺度下, 三角多项式子空间不是渐进最优的线性子空间. 我们注意到在最坏框架下, 三角多项式子空间在 L_q $(2 < q \leqslant \infty)$ 空间尺度下不是渐进最优的线性子空间 (事实上, 在最坏框架下, 渐近最优的线性子空间仍然是未知的).

另外, 在平均框架及 L_q $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$ 空间尺度下, Fourier 部分和算子 S_n 和 Vallée-Poussin 算子 V_n 是渐近最优的线性算子. 我们注意到, 在平均框架以及 L_q $(1 \leqslant q < \infty)$ 空间尺度下, 渐进最优的线性算子与渐进最优的非线性算子的逼近效果一样好; 而在最坏框架下, 渐进最优的线性算子和渐进最优的非线性算子在 L_q $(2 < q \leqslant \infty)$ 空间尺度下相差因子 $cn^{1/2-1/q}$ (见文献 [15, pp. 50–51]), 且 Fourier 部分和算子 S_n 在 L_∞ 空间尺度下不一致有界 (见文献 [15, p. 26]), 因为

$$\|S_n\|_{(\infty,\infty)} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|S_n x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \asymp \ln n.$$

设 $l \geqslant 2$, $n = 1, 2, \ldots,$ 是正整数, 用 $k_{nl}(t)$ 表示 Jackson 核

$$k_{nl}(t) := \frac{1}{\tau_{nl}} \left(\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2l},$$

其中 $n' = [\frac{n}{l}] + 1$, τ_{nl} 是一个常数, 满足 $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} k_{nl}(t)dt = 1$. 则 $k_{nl}(t)$ 是次数为 $l(n'-1) = l[\frac{n}{l}] \leqslant n$ 的偶三角多项式并且

$$k_{nl}(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l(n'-1)} \rho_{kl} \cos kt, \quad \rho_{kl} = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} k_{nl}(t) \cos kt dt.$$

Jackson 算子定义为:

$$J_n(x,t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} x(u) k_{nl}(t-u) du.$$

则 Jackson 算子是一乘子:

$$J_n(x,t) = \sum_{k=-l(n'-1)}^{l(n'-1)} \rho_{|k|l} \hat{x}(k) e_k(t). \tag{2.9}$$

定理 4 若 $1 \leqslant p < \infty$, $s > 1$, $r > \frac{1}{2}$, 则

(i) 对 $1 \leqslant q < \infty$, 有

$$E_{pq}(J_n, \mu) \asymp \begin{cases} n^{-2}, & s > 5 - 2r, \\ n^{-2}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s = 5 - 2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, & 1 < s < 5 - 2r, \end{cases} \tag{2.10}$$

(ii) 对 $q=\infty$, 有

$$E_{p\infty}(J_n,\mu) \ll \begin{cases} n^{-2}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s>5-2r, \\ n^{-2}\ln n, & s=5-2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & 1<s<5-2r. \end{cases} \tag{2.11}$$

在 (2.4) 中, 若令

$$\lambda_n(k)=\begin{cases} \dfrac{(\alpha)_{n-|k|}}{(\alpha)_n}, & |k|\leqslant n, \\ 0, & |k|>n, \end{cases}$$

我们得到 Cesàro 算子:

$$S_n^\alpha(x,t)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{(\alpha)_{n-|k|}}{(\alpha)_n}\hat{x}(k)e_k(t),$$

其中 $\alpha>0$, $(\alpha)_n=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)$ 是 Cesàro 数. 特别的, 如果 $\alpha=1$, 则 Cesàro 算子退化为 Fejér 算子:

$$F_n(x,t)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{x}(k)e_k(t).$$

在 (2.4) 中, 再令 $\lambda(k)=\beta^{|k|}$, 我们则得到 Abel 算子:

$$A_\beta(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta^{|k|}\hat{x}(k)e_k(t), \quad 0<\beta<1.$$

利用定理 1–2 及汪成咏在文献 [16] 中使用的方法, 我们可以得到如下的两个定理. 它们的证明从略.

定理 5 若 $1\leqslant p<\infty$, $s>1$, $r>\frac{1}{2}$, 则

(i) 对 $1\leqslant q<\infty$, 有

$$E_{pq}(S_n^\alpha,\mu) \asymp \begin{cases} n^{-1}, & s>3-2r, \\ n^{-1}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s=3-2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, & 1<s<3-2r, \end{cases}$$

(ii) 对 $q=\infty$, 有

$$E_{p\infty}(S_n^\alpha,\mu) \ll \begin{cases} n^{-1}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s>3-2r, \\ n^{-1}\ln n, & s=3-2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & 1<s<3-2r. \end{cases}$$

定理 6 若 $1\leqslant p<\infty$, $s>1$, $r>\frac{1}{2}$, 则

(i) 对 $1\leqslant q<\infty$, 有

$$E_{pq}(A_\beta,\mu) \asymp \begin{cases} 1-\beta, & s>3-2r, \\ (1-\beta)\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & s=3-2r, \\ (1-\beta)^{r+\frac{s-1}{2}}, & 1<s<3-2r, \end{cases}$$

(ii) 对 $q=\infty$, 有

$$E_{p\infty}(A_\beta,\mu)\ll\begin{cases}(1-\beta)\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & s>3-2r,\\ (1-\beta)\ln\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right), & s=3-2r,\\ (1-\beta)^{(r+\frac{s-1}{2})}\left(\ln\left(\dfrac{1}{1-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, & 1<s<3-2r.\end{cases}$$

注 2 由定理 4–6, 我们知道对 $1\leqslant p,q<\infty$, $2r+s>5$, 有

$$E_{pq}(S_n^\alpha,\mu)\asymp n^{-1},\qquad E_{pq}(J_n,\mu)\asymp n^{-2},\qquad E_{pq}(A_\beta,\mu)\asymp 1-\beta.$$

这意味着, 在平均框架下, Cesàro 算子, Jackson 算子和 Abel 算子都具有饱和性.

3 定理 1–4 的证明

定理 1 的证明 当 $r>1/2$ 时, 空间 W_2^r 可以紧嵌入到 $C[0,2\pi]$ 上. 对任意的 $x\in W_2^r$, 级数 $x(t)=\sum_k'\hat{x}(k)e_k(t)$ $(t\in[0,2\pi])$ 绝对且一致收敛. 对任一固定的 $t\in[0,2\pi]$, 设

$$L(x,t)=x(t)-\Lambda_n(x,t),\quad x\in W_2^r,$$

则 $L(x,t)$ 是 W_2^r 上的一个有界线性泛函. 由于测度 μ 是 W_2^r 上的对称 Gauss 测度, 所以测度空间 (W_2^r,μ) 上的随机变量 $L(x,t)$ 服从正态分布 $N(0,R^2(t))$, 其中

$$\begin{aligned}R^2(t)&=\int_{W_2^r}|L(x,t)|^2\,\mu(dx)=\int_{W_2^r}[x(t)-\Lambda_n(x,t)]\overline{[x(t)-\Lambda_n(x,t)]}\,\mu(dx)\\&=\sum_k{}'\sum_j{}'(1-\lambda_n(k))(1-\lambda_n(j))e_k(t)\overline{e_j(t)}\int_{W_2^r}\hat{x}(k)\overline{\hat{x}(j)}\,\mu(dx).\end{aligned}\tag{3.1}$$

对于 $k\neq 0$,

$$\langle x,e_k\rangle_r=\langle x^{(r)},e_k^{(r)}\rangle=\left\langle\sum_j{}'(ij)^r\hat{x}(j)e_j,(ik)^re_k\right\rangle=|k|^{2r}\hat{x}(k),$$

由 (2.1) 和 (2.2) 得

$$\begin{aligned}\int_{W_2^r}\hat{x}(k)\overline{\hat{x}(j)}\mu(dx)&=\int_{W_2^r}|k|^{-2r}|j|^{-2r}\langle x,e_k\rangle_r\overline{\langle x,e_j\rangle_r}\,\mu(dx)\\&=|k|^{-2r}|j|^{-2r}\langle C_\mu e_k,e_j\rangle_r=|k|^{-2r-s}|j|^{-2r}\langle e_k,e_j\rangle_r\\&=|k|^{-r-s}|j|^{-r}\langle e_k,e_j\rangle=|k|^{-2r-s}\delta_{k,j},\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{k,j}=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ 1, & k=j.\end{cases}$$

将上式代入 (3.1) 中, 我们得到

$$\begin{aligned}R^2(t)&=\sum_k{}'\sum_j{}'(1-\lambda_n(k))(1-\lambda_n(j))e_k(t)\overline{e_j(t)}|k|^{-2r-s}\delta_{k,j}\\&=\sum_k{}'(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

下面证明 (2.5). 因为 $L(x,t)$ 服从正态分布 $N(0,R^2(t))$, 所以

$$\int_{W_2^r}|L(x,t)|^p\,\mu(dx)=\int_{W_2^r}|x(t)-\Lambda_n(x,t)|^p\,\mu(dx)=c_pR^p(t),\tag{3.3}$$

其中 $c_p=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p+1}{2})$. 由 Fubini 定理, (3.2) 和 (3.3) 得

$$\begin{aligned}E_{pp}(\Lambda_n,\mu)&=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{W_2^r}\int_0^{2\pi}|x(t)-\Lambda_n(x,t)|^p dt\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{W_2^r}|x(t)-\Lambda_n(x,t)|^p\mu(dx)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_pR^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=c_p^{\frac{1}{p}}\left(\sum_k{}'(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

最后证明 (2.6). 设 $p_1=\max\{p,q\}$, $p_2=\min\{p,q\}$. 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}E_{pq}(\Lambda_n,\mu)&=\left(\int_{W_2^r}\|x(t)-\Lambda_n(x,t)\|_q^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_{W_2^r}\|x(t)-\Lambda_n(x,t)\|_{p_1}^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_{W_2^r}\|x(t)-\Lambda_n(x,t)\|_{p_1}^{p_1}\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p_1}}\\&=E_{p_1p_1}(\Lambda_n,\mu).\end{aligned}\tag{3.5}$$

类似的, 有

$$E_{pq}(\Lambda_n,\mu)\geqslant E_{p_2p_2}(\Lambda_n,\mu).$$

由上式, (3.4) 和 (3.5), 可得 (2.6). 定理 1 证毕.

定理 2 的证明　注意到

$$\begin{aligned}\|x(t)-\Lambda_n(x,t)\|_\infty&=\left\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)+\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))\hat{x}(j)e_j(t)\right\|_\infty\\&\leqslant\left\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\right\|_\infty+\sum_{k=m}^{\infty}\left\|\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))\hat{x}(j)e_j(t)\right\|_\infty,\end{aligned}$$

由三角不等式得

$$\begin{aligned}E_{p\infty}(\Lambda_n,\mu)&=\left(\int_{W_2^r}\Big\|x(t)-\Lambda_n(x,t)\Big\|_\infty^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_{W_2^r}\left\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\right\|_\infty^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\quad+\sum_{k=m}^{\infty}\left(\int_{W_2^r}\left\|\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))\hat{x}(j)e_j(t)\right\|_\infty^p\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由于 $\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)$ 是一个次数不超过 2^m 的三角多项式, 所以根据 Nikolskii 不等式 (见文献 [15, p. 38]), 我们得到对任意的 $p_1>p$,

$$\left\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\right\|_\infty\leqslant c2^{\frac{m}{p_1}}\left\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\right\|_{p_1},\tag{3.7}$$

其中 c 是一个不依赖于 p_1 和 m 的正常数. 由 Hölder 不等式和 (3.7) 得

$$\begin{aligned}
&\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\bigg\|_\infty^p\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\leqslant\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\bigg\|_\infty^{p_1}\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\quad\ll 2^{\frac{m}{p_1}}\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\bigg\|_{p_1}^{p_1}\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p_1}}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由 Stirling 公式 (见文献 [17, p. 18]):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}\exp(-x)}=1,$$

知

$$\begin{aligned}
\bigg(\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\bigg)^{\frac{1}{x}}&\ll(\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{x}}\Big(\frac{x+1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(-\frac{x+1}{2x}\Big)\\
&\ll\Big(\frac{x+1}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\ll x^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

所以, 由定理 1 和 (3.9), 我们有

$$\begin{aligned}
&\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\bigg\|_{p_1}^{p_1}\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p_1}}\\
&\quad=\bigg(\pi^{-\frac{1}{2}}2^{\frac{p_1}{2}}\Gamma\Big(\frac{p_1+1}{2}\Big)\bigg)^{\frac{1}{p_1}}\bigg(\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad\ll p_1^{\frac{1}{2}}\bigg(\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

在上式中令 $p_1=m$, 再由 (3.8) 和 (3.10) 得

$$\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))\hat{x}(k)e_k(t)\bigg\|_\infty^p\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p}}\ll m^{\frac{1}{2}}\bigg(\sum_{|k|=1}^{2^m}(1-\lambda_n(k))^2|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac{1}{2}}.\tag{3.11}$$

与 (3.11) 的证明类似, 我们还可证明

$$\bigg(\int_{W_2^r}\bigg\|\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))\hat{x}(j)e_j\bigg\|_\infty^p\mu(dx)\bigg)^{\frac{1}{p}}\ll k^{\frac{1}{2}}2^{-k(r+\frac{s}{2})}\bigg(\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}(1-\lambda_n(j))^2\bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

由上式, (3.6) 和 (3.11), 得到定理 2.

定理 3 的证明 由定理 1 及 S_n 和 V_n 的定义, 我们得到, 对 $1\leqslant p,q<\infty$,

$$E_{pq}(S_n,\mu)\asymp\bigg(\sum_{|k|\geqslant n+1}|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac{1}{2}}\asymp n^{-(r+\frac{s-1}{2})},\tag{3.12}$$

和

$$E_{pq}(V_n,\mu)\asymp\bigg(\sum_{|k|=n+1}^{2n-1}\frac{(n-|k|)^2}{n^2}|k|^{-2r-s}+\sum_{|k|\geqslant 2n}|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac{1}{2}}\asymp n^{-(r+\frac{s-1}{2})}.\tag{3.13}$$

现在我们考虑 $q=\infty$ 的情况. 设 $2^{m-1}\leqslant n<2^m$, $m=1,2,\ldots$. 由定理 2 知

$$\begin{aligned}E_{p\infty}(S_n,\mu)&\ll m^{\frac12}\bigg(\sum_{|k|=n+1}^{2^m}|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac12}+\sum_{k=m}^{\infty}k^{\frac12}2^{-k(r+\frac{s}{2})}\bigg(\sum_{|j|=2^k+1}^{2^{k+1}}1\bigg)^{\frac12}\\&\ll n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

类似的, 有

$$\begin{aligned}E_{p\infty}(V_n,\mu)&\ll m^{\frac12}2^{-m(r+\frac{s-1}{2})}+\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{\frac12}2^{-k(r+\frac{s-1}{2})}\\&\ll n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

由文献 [12] 可知, 对于 $1\leqslant p<\infty$,

$$\lambda_n^{(a)}(W_2^r,\mu,L_\infty)_p\asymp n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}.$$

所以有

$$E_{p\infty}(S_n,\mu)\geqslant\lambda_n^{(a)}(W_2^r,\mu,L_\infty)_p\gg n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}$$

和

$$E_{p\infty}(V_n,\mu)\geqslant\lambda_{2n}^{(a)}(W_2^r,\mu,L_\infty)_p\gg n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}.$$

由上式, (3.14) 和 (3.15), 可得

$$E_{p\infty}(S_n,\mu)\asymp E_{p\infty}(V_n,\mu)\asymp n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac12}.\tag{3.16}$$

最后, 由不等式 (见文献 [15, p. 47]):

$$E_{2n}(x)_q\leqslant\|x-V_nx\|_q\ll E_n(x)_q,\quad 1\leqslant q\leqslant\infty,$$

得

$$E_{pq}(\mu)_{2n}\leqslant E_{pq}(V_n,\mu)\ll E_{pq}(\mu)_n.$$

因此, (2.8) 可以由上式, (3.12), (3.13) 和 (3.16) 得到. 定理 3 证毕.

定理 4 的证明 由定理 1 和 (2.9) 得

$$\begin{aligned}E_{pq}(J_n,\mu)&\asymp\bigg(\sum_{|k|=1}^{l(n'-1)}(1-\rho_{|k|l})^2|k|^{-2r-s}+\sum_{|k|>l(n'-1)}|k|^{-2r-s}\bigg)^{\frac12}\\&\asymp\bigg(\sum_{k=1}^{l(n'-1)}(1-\rho_{kl})^2k^{-2r-s}+\sum_{k>l(n'-1)}k^{-2r-s}\bigg)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

首先, 我们来估计 $1-\rho_{kl}$. 众所周知, $\tau_{nl}\asymp n^{2l-1}$. 由不等式:

$$|\sin x|\leqslant|x|\quad(x\in\mathbb{R}),\qquad\left|\sin\frac{x}{2}\right|\geqslant\frac{|x|}{\pi}\quad(0<|x|\leqslant\pi),$$

得

$$\left|\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right|\asymp n'\asymp n\quad\left(0<t<\frac{\pi}{n}\right),\qquad\left|\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right|\leqslant\frac{1}{\sin(t/2)}\leqslant\frac{\pi}{t}\quad\left(\frac{\pi}{n}\leqslant t<\pi\right).$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin\frac{(n't/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^2 dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^2 dt + 2\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\left(\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^2 dt \\
&\ll \int_0^{\frac{\pi}{n}} n^{2l}(kt)^2 dt + \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} t^{-2l}(kt)^2\, dt \ll k^2 n^{2l-3}.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

另一方面, 我们有

$$
I \geqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}\left(\sin\frac{kt}{2}\right)^2 dt \gg \int_0^{\frac{\pi}{n}} n^{2l}(kt)^2 dt \gg k^2 n^{2l-3},
$$

由此式和 (3.18), 可知 $I \asymp k^2 n^{2l-3}$. 因此

$$
1-\rho_{kl} = \frac{1}{\pi\tau_{nl}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin(n't/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}\sin^2\frac{kt}{2}dt \asymp k^2 n^{-2}. \tag{3.19}
$$

将 (3.19) 代入 (3.17) 中, 我们得到:

$$
E_{pq}(J_n,\mu) \asymp \left(n^{-4}\sum_{k=1}^{l(n'-1)} k^{-2r-s+4} + n^{-2r-s+1}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp \begin{cases} n^{-2}, & s>5-2r, \\ n^{-2}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s=5-2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}, & 1<s<5-2r, \end{cases}
$$

所以 (2.10) 成立. 下面我们来证明 (2.11). 设 $2^{m-1} \leqslant l(n'-1) < 2^m$, $m=1,2,\ldots.$ 由定理 2 和 (3.19), 我们有

$$
\begin{aligned}
E_{p\infty}(J_n,\mu) &\ll m^{\frac{1}{2}}\left(n^{-4}\sum_{|k|=1}^{l(n'-1)}|k|^{-2r-s+4} + c2^{-m(2r+s-1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=m}^{\infty} k^{\frac{1}{2}}2^{-k(r+\frac{s-1}{2})} \\
&\ll \begin{cases} n^{-2}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & s>5-2r, \\ n^{-2}\ln n, & s=5-2r, \\ n^{-(r+\frac{s-1}{2})}(\ln n)^{\frac{1}{2}}, & 1<s<5-2r. \end{cases}
\end{aligned}
$$

定理 4 证毕.

参考文献

1 Lorentz G G, Golitschek M V, Makovoz Y. Constructive Approximation, Advanced Problems. New York: Springer-Verlag, 1996

2 Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1985

3 Lee D. Approximation of linear operators on a Wiener space. *Rocky Mountain J Math*, **16**: 641–659 (1986)

4 Lee D, Wasilkowski G W. Approximation of linear functionals on a Banach space with a Gaussian measure. *J Complexity*, **2**: 12–43 (1986)

5 Ritter K. Approximation and optimization on the Wiener Space. *J Complexity*, **6**: 337–364 (1990)

6 Sun Y S, Wang C Y. Average error bounds of best approximation of continuous functions on the Wiener space. *J Complexity*, **11**: 74–104 (1995)

7 Ritter K. Average-Case Analysis of Numerical Problems. Lecture Notes in Math, **1733**. Berlin: Springer-Verlag, 2000

8 Traub J F, Wasilkowski G W, Wozniakowski H. Information-Based Complexity. New York: Academic Press, 1988

9 Maiorov V E. Kolmogorov's (n, δ)-widths of spaces of smooth functions. *Russian Acad Sci Sb Math*, **79**: 265–279 (1994)

10 Maiorov V E. Linear widths of function spaces equipped with the Gaussian measure. *J Approx Theory*, **77**: 74–88 (1994)

11 Fang G S, Ye P X. Probabilistic and average linear widths of Sobolev space with Gaussian measure. *J Complexity*, **19**: 73–84 (2003)

12 Fang G S, Ye P X. Probabilistic and average linear widths of Sobolev space with Gaussian measure in L_∞-norm. *Constr Approx*, **20**: 159–172 (2004)

13 Bogachev V I. Gaussian Measures. Mathematical Surveys and Monographs, **62**. Providence: Amer Math Soc, 1998

14 Kuo H H. Gaussian Measure in Banach Space. Lecture Notes in Mathematics, **463**. Berlin: Springer, 1975

15 Temlykov V N. Approximation of Periodic Functions. New York: Nova Science Publishers Inc, 1993

16 Wang C Y. Best Approximation Problems and Information-Based Complexity on Abstract Wiener Spaces. Doctoral dissertation, 1994

17 Andrews G E, Askey R, Roy R. Special Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999