中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 567～573
www.scichina.com math.scichina.com

Q_p 空间中的 Jackson 定理

陈英伟, 任广斌*

中国科学技术大学数学系, 合肥 230026
* 通信作者. E-mail: cyingwei@mail.ustc.edu.cn, rengb@ustc.edu.cn

收稿日期: 2007-12-07; 接受日期: 2009-01-15
国家自然科学基金 (批准号: 10771201) 资助项目

摘要 在 Q_p 空间上建立了 Jackson 型不等式, 即对任意 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in Q_p$, $0 \leqslant p < \infty$, $a > 1$ 及 $k - 1 \in \mathbb{N}$, 有

$$\left\| f(z) - \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)} a_j z^j \right\|_{Q_p} \leqslant C(a)\omega\left(\frac{1}{k}, f, Q_p\right),$$

其中 $\omega(1/k, f, Q_p)$ 为 Q_p 空间中的连续模, $C(a)$ 是仅与参数 a 有关的正常数.

关键词 Q_p 空间 BMOA 多项式逼近

MSC(2000) 主题分类 41A17, 32A36

1 引言

在逼近论中, Jackson 定理 [1] 给出函数利用多项式逼近的上界估计. 在包括 Hardy 空间和 Bergman 空间等许多全纯函数空间中已经建立了 Jackson 定理 (参见文献 [2–9]).

本文的目的是在 Q_p 空间中建立 Jackson 定理, 而 Q_p 空间包含了著名的 BMOA 和 Bloch 空间 (它们可分别看做为 Hardy 空间和 Bergman 空间的极限). 关于 Q_p 空间, 可参见其起源 [10] 及最近进展 [11, 12].

为描述本文主要结果, 我们引入一些记号. 令 φ_w 为单位开圆盘 D 到自身的 Möbius 变换,

$$\varphi_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}, \qquad z, w \in D,$$

及 $g(\cdot, w)$ 表示极点为 w 的 Green 函数,

$$g(z, w) = -\log|\varphi_w(z)|, \quad w, z \in D.$$

我们记 $H(D)$ 为 D 上全纯函数全体, $dm(z)$ 是 D 上 Lebesgue 测度. 函数 $f \in H(D)$ 属于 Q_p 空间 $(0 \leqslant p < \infty)$, 如果该函数满足

$$\|f\|_{Q_p}^2 := \sup_{w \in D} \int_D |f'(z)|^2 g^p(z, w) dm(z) < +\infty.$$

引用格式: 陈英伟, 任广斌. Q_p 空间中的 Jackson 定理. 中国科学 A, 2009, 39(5): 567–573
Chen Y W, Ren G B. Jackson's theorem in Q_p spaces. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0097-4

熟知 $\|\cdot\|_{Q_p}$ 为半范数, Q_p 空间是 Banach 空间, 具有范数 $|f(0)|+\|f\|_{Q_p}$, 以及 [13]$Q_1=$ BMOA; $Q_0=$ Dirichlet 空间; $Q_p=$ Bloch ($p\in(1,\infty)$).

我们将采用逼近论 [1] 中的记号. 令 $\mathscr{X}$ 为 D 上有半模 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ 的函数空间. 对于 $f\in\mathscr{X}$, $k\in\mathbb{N}$, k 阶最佳逼近定义为

$$E_k(f,\mathscr{X}):=\inf_{\mathscr{L}_k\in\mathscr{W}_k}\|f-\mathscr{L}_k\|_{\mathscr{X}},$$

其中 $\mathscr{W}_k:=\mathscr{W}_k(D)$ 表示 D 上的至多为 k 次的多项式全体. 对于 $f\in\mathscr{X}$, $\delta>0$, 我们定义 f 的连续模为

$$\omega(\delta,f,\mathscr{X}):=\sup_{|\theta'-\theta''|<\delta}\|f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z)\|_{\mathscr{X}}.$$

$\mathscr{X}$ 将取定为 Q_p 空间.

Storozhenko 在 Hardy 空间中建立了下列 Jackson 定理.

定理 1.1[7] 存在一个 $k\in\mathbb{N}$ 次多项式 P_k 和正常数 $C(k)$, 使得对任意 $0<p<\infty$, 有

$$\|f-P_k\|_{H^p}\leqslant C(k)\omega\left(\frac{1}{k},f,H^p\right),\qquad\forall\ f\in H^p.$$

自然的问题是建立 BMOA 甚至 Q_p 空间中的 Jackson 定理. 我们的主要结果如下:

定理 1.2 若 $0\leqslant p<\infty$, $a>1$, $k-1\in\mathbb{N}$ 及 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\in Q_p$, 则

$$\left\|f(z)-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)}a_jz^j\right\|_{Q_p}\leqslant C(a)\omega\left(\frac{1}{k},f,Q_p\right).$$

因此存在一个与 f 和 k 无关的正常数 C, 使得

$$E_{k-1}(f,Q_p)\leqslant C\omega\left(\frac{1}{k},f,Q_p\right),\qquad\forall\ f\in Q_p.$$

定理 1.2 的证明依赖于逼近误差的估计 (参见引理 3.1).

由文献 [10, 14] 我们可知 $\|\cdot\|_{Q_1}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMOA}}$ 两模是等价的. 参见文献 [15] 中关于 BMO 空间的理论. 作为定理 1.2 的直接推论, 我们有

推论 1.3 若 $a>1$, $k-1\in\mathbb{N}$ 及 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\in\mathrm{BMOA}$, 则

$$\left\|f(z)-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)}a_jz^j\right\|_{\mathrm{BMOA}}\leqslant C(a)\omega\left(\frac{1}{k},f,\mathrm{BMOA}\right).$$

因此存在一个正常数 C 使得对任意 $f\in\mathrm{BMOA}$ 和 $k-1\in\mathbb{N}$, 有

$$E_{k-1}(f,\mathrm{BMOA})\leqslant C\omega\left(\frac{1}{k},f,\mathrm{BMOA}\right).$$

2 逼近多项式

为了建立 Q_p 空间上的 Jackson 定理, 我们需要构造最佳逼近多项式, 这可利用 $[-\pi,\pi)$ 上的复测度给出积分表示.

以下我们将用 a 表示任意固定的大于 1 的正常数.

给定 $k\in\mathbb{N}$ 和 $\rho\in(0,1]$, 我们定义 $[-\pi,\pi)$ 上的复测度:

$$d\mu_k^\rho(\varphi)=iC_k^a(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}d\varphi,$$

其中

$$C_k^a=(2\pi i)^{-1}\frac{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}{\Gamma(k+a)}.$$

与之相伴的算子 P_k 定义为

$$P_k[f](z)=\int_{[-\pi,\pi)}f(\rho e^{i\varphi}z)d\mu_k^\rho(\varphi),\quad z\in D. \tag{2.1}$$

该算子将给出最佳逼近多项式, 下面引理说明上述积分与变量 ρ 的选择无关.

引理 2.1 设 $a>0$ 固定, P_k 由 (2.1) 式给出. 如果 $f(z)=\sum_{j=0}^\infty a_jz^j\in H(D)$, 则

$$P_k[f](z)=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)}a_jz^j.$$

注意到当 $a=0$ 时, 逼近多项式 $P_k[f]$ 为 $k-1$ 次 Taylor 多项式. 但为了证明主要结果, 我们需要选取参数使得 $a>1$.

证明 对任给的 $\rho\in(0,1)$, 通过变量代换 $\lambda=\rho e^{i\varphi}$, (2.1) 可重新表示为

$$P_k[f](z)=C_k^a\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda. \tag{2.2}$$

对任意给定的 $z\in D$ 及 $f\in H(D)$, 易知, 作为 λ 的函数

$$f(\lambda z)\frac{1}{\lambda^k}\left[\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1}-\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{a+1}\right]\in H(D).$$

所以对任意的 $\rho\in(0,1)$, 由 Cauchy 积分定理, 有

$$\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\frac{1}{\lambda^k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda=\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\frac{1}{\lambda^k}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda.$$

因此

$$P_k[f](z)=C_k^a\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\lambda^{-k}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda. \tag{2.3}$$

再利用留数定理得知

$$P_k[f](z)=2\pi iC_k^a\cdot\mathrm{Res}(g(\lambda),0),$$

其中 $g(\lambda)=f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}$.

由幂级数 $f(z)=\sum_{j=0}^\infty a_jz^j$ 和二项式级数

$$(1-\lambda)^{-(a+1)}=\sum_{l=0}^\infty\frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\Gamma(a+1)}\lambda^l,$$

我们得到

$$g(\lambda)=\sum_{l,j=0}^\infty a_jz^j\frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\Gamma(a+1)}\lambda^{l+j-k}.$$

因此,

$$P_k[f](z)=2\pi iC_k^a\mathrm{Res}(g(\lambda),0)=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)}a_jz^j.$$

引理证毕.

注记 1 由引理 2.1 易知 $P_k[1]=1$. 再由 (2.1) 式得知 $d\mu_k^\rho(\varphi)$ 为 $[-\pi,\pi)$ 上单位化的测度, 其中 $\rho\in(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$.

3 误差函数的导数估计

这一节我们将对误差函数的导数进行估计.

利用广义的 Jackson 核

$$T_k^{\beta}(\varphi) := \left|\frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|^{2\beta},$$

我们引入 $[-\pi,\pi)$ 上的正测度: 对任 $0<\rho<1$, $\eta>0$, $a>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$,

$$dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) := |C_k^a|^{\eta}\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi. \tag{3.1}$$

引理 3.1 若 $0<\eta\leqslant 1$, $0<\rho<1$, $a>0$ 及 $k-1\in\mathbb{N}$, 则存在正常数 $C(\eta)$, 使得对任意 $f\in H(D)$, 有

$$|(P_k[f](z)-f(z))'|^{\eta} \leqslant C(\eta)\int_{[-\pi,\pi)}|(f(e^{i\varphi}z)-f(z))'|^{\eta}dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi). \tag{3.2}$$

尽管下文只使用了引理 3.1 中 $\eta=1$ 的特殊情形, 但是引理 3.1 的一般情形自身具有其独特意义.

证明 对任意 $\rho\in(0,1)$, 由 (2.1) 我们有

$$(P_k[f](z))' = \int_{[-\pi,\pi)}(f(\rho e^{i\varphi}z))'d\mu_k^{\rho}(\varphi).$$

已知测度

$$d\mu_k^{\rho}(\varphi) = iC_k^a(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}d\varphi$$

是概率测度, 故

$$(P_k[f](z)-f(z))' = \int_{[-\pi,\pi)}\Big(f'(\rho e^{i\varphi}z)\rho e^{i\varphi}-f'(z)\Big)d\mu_k^{\rho}(\varphi).$$

因此

$$|(P_k[f](z)-f(z))'| \leqslant \rho^{1-k}\int_{[-\pi,\pi)}|g(\rho e^{i\varphi},z)|d\varphi, \tag{3.3}$$

其中

$$g(\rho e^{i\varphi},z) = C_k^a[f'(\rho e^{i\varphi}z)\rho e^{i\varphi}-f'(z)]\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}.$$

显然, 对任意固定的 $z\in D$, 有 $g(\cdot,z)\in H(\bar{D})$.

熟知, 对任意 $0<\eta\leqslant 1$, 存在正常数 $C(\eta)$, 使得对任意 $F\in H(\bar{D})$ 和 $0<r<1$, 有 [14]

$$\left(\int_{[-\pi,\pi)}|F(re^{i\theta})|d\theta\right)^{\eta} \leqslant C(\eta)(1-r)^{\eta-1}\int_{[-\pi,\pi)}|F(e^{i\theta})|^{\eta}d\theta. \tag{3.4}$$

在 (3.4) 中取 $F(\lambda)=g(\lambda,z)$, 结合 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}|(P_k[f](z)-f(z))'|^{\eta} &\leqslant C(\eta)\int_{[-\pi,\pi)}|f'(e^{i\varphi}z)e^{i\varphi}-f'(z)|^{\eta}dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi)\\ &= C(\eta)\int_{[-\pi,\pi)}|(f(e^{i\varphi}z)-f(z))'|^{\eta}dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi),\end{aligned}$$

其中 $dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) = |C_k^a|^{\eta}\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi$.

4 Jackson 定理证明

为了证明 Jackson 定理, 我们还需要证明一些引理.

引理 4.1 若 $0 < \eta \leqslant 1$, $\eta(a+1) > 2$, $k-1 \in \mathbb{N}$ 及 $\rho = 1 - \frac{1}{k}$. 则存在一个正常数 $C(\eta, a)$, 使得

$$\int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) \leqslant C(\eta, a).$$

证明 由

$$dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) = |C_k^a|^\eta \rho^{\eta(1-k)} (1-\rho)^{\eta-1} T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi) d\varphi,$$

并注意到 $\rho^{\eta(1-k)} \leqslant C(\eta)$, $(1-\rho)^{\eta-1} = k^{1-\eta}$ 及

$$|C_k^a|^\eta = \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}{\Gamma(k+a)}\right)^{-\eta} \leqslant C(\eta, a) k^{-\eta a}.$$

我们只要证明

$$\int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi) d\varphi \leqslant C(\eta, a) k^{\eta(a+1)-1}.$$

上式中用 k 来替换 $k+1$, 由于对任意 $k-1 \in \mathbb{N}$ 和 $\varphi \in [-\pi, \pi]$, 有 $\frac{1}{2}(|(k+1)\varphi|+1) \leqslant |k\varphi|+1 \leqslant |(k+1)\varphi|+1$, 故我们只需证明

$$\int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) T_k^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi) d\varphi \leqslant C(\eta, a) k^{\eta(a+1)-1}, \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

注意到 $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x, \forall\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $|\sin kx| \leqslant k|\sin x|, \forall\ kx \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 上面的第二个不等式可由对 k 进行归纳得到.

记 $t = \eta(a+1)$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_{[-\pi,\pi)} (|\varphi k|+1) |T_k^{\eta(a+1)/2}(\varphi)| d\varphi \\
&\quad = \int_{[-\pi,\pi)} (|\varphi k|+1) \left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|^t d\varphi \\
&\quad = 2\int_{[0,\frac{\pi}{k})} (|\varphi k|+1) \left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|^t d\varphi + 2\int_{[\frac{\pi}{k},\pi)} (|\varphi k|+1) \left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|^t d\varphi \\
&\quad \leqslant 2\int_{[0,\frac{\pi}{k})} (\varphi k+1) k^t d\varphi + 2\pi^t \int_{[\frac{\pi}{k},\pi)} (\varphi k+1) \varphi^{-t} d\varphi \\
&\quad = 2\left(\frac{\pi^2}{2} k^{t-1} + \pi k^{t-1}\right) + 2\pi^t \left(\frac{k}{t-2}(k^{t-2}-1)\pi^{2-t} + \frac{1}{t-1}(k^{t-1}-1)\pi^{1-t}\right) \\
&\quad \leqslant C(t) k^{t-1} \\
&\quad = C(\eta, a) k^{\eta(a+1)-1}.
\end{aligned}$$

引理证毕.

引理 4.2 若 $f \in Q_p$, $0 \leqslant p < \infty$, $\delta > 0$ 及 $\lambda > 0$, 则 $\omega(\lambda\delta, f, Q_p) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta, f, Q_p)$.

证明 由定义,

$$\omega(\lambda\delta, f, Q_p) = \sup_{|\theta'-\theta''|<\lambda\delta} \|f(e^{i\theta'}z) - f(e^{i\theta''}z)\|_{Q_p}.$$

取 $m = [\lambda]$, 则

$$|\theta' - \theta''| < \lambda\delta < (m+1)\delta.$$

我们不妨假定 $\theta' < \theta''$, 然后等分剖分区间

$$[\theta', \theta'') = \bigcup_{0}^{m} [\theta_j, \theta_{j+1}),$$

其中 $\theta_0 = \theta'$ 和 $\theta_{j+1} = \theta_j + \frac{1}{m+1}(\theta'' - \theta'),\ j = 0, 1, \ldots, m.$

由 $\|\cdot\|_{Q_p}$ 模的三角不等式, 有

$$\begin{aligned}\|f(e^{i\theta'}z) - f(e^{i\theta''}z)\|_{Q_p} &\leqslant \sum_{l=0}^{m} \|f(e^{i\theta_l}z) - f(e^{i\theta_{l+1}}z)\|_{Q_p} \\ &\leqslant (m+1)\omega(\delta, f, Q_p) \\ &\leqslant (\lambda+1)\omega(\delta, f, Q_p).\end{aligned}$$

引理证毕.

最后, 我们给出主要结果的证明.

定理 1.2 的证明 由引理 3.1 知, 存在一个与 f, ρ, a 及 k 无关的正常数 C, 使得

$$|(P_k[f](z) - f(z))'| \leqslant C \int_{[-\pi,\pi)} |(f(e^{i\varphi}z) - f(z))'| dv_k^{\rho,1,a}(\varphi).$$

由 $\|\cdot\|_{Q_p}$ 的定义及 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\|P_k[f] - f\|_{Q_p} \\ &= \left(\sup_{w\in D} \int_D |(P_k[f](z) - f(z))'|^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C \left\{ \sup_{w\in D} \int_D \left(\int_{[-\pi,\pi)} |(f(e^{i\varphi}z) - f(z))'| dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \right)^2 g^p(z,w) dm(z) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C \int_{[-\pi,\pi)} \left(\sup_{w\in D} \int_D |(f(e^{i\varphi}z) - f(z))'|^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \\ &= C \int_{[-\pi,\pi)} \|f(e^{i\varphi}z) - f(z)\|_{Q_p} dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \\ &\leqslant C \int_{[-\pi,\pi)} \omega(|\varphi|, f, Q_p) dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \\ &\leqslant C\omega\left(\frac{1}{k}, f, Q_p\right) \int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) dv_k^{\rho,1,a}(\varphi).\end{aligned}$$

上面最后一步利用了引理 4.2.

若取 $a > 1$, 则由引理 4.1 知

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \leqslant C(a) < \infty.$$

因此

$$\begin{aligned}E_{k-1}(f, Q_p) &\leqslant \|P_k[f] - f\|_{Q_p} \\ &\leqslant C\omega\left(\frac{1}{k}, f, Q_p\right) \int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi|+1) dv_k^{\rho,1,a}(\varphi) \\ &\leqslant C(a)\omega\left(\frac{1}{k}, f, Q_p\right),\end{aligned}$$

其中 a 是任一固定的大于 1 的常数. 定理证毕.

参考文献

1 Devore R A, Lorentz G G. Construction Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993
2 Andrievskii V. Harmonic version of Jackson's theorem in the complex plane. *J Approx Theory*, **90**: 224–234 (1997)
3 Colzani L. Jackson theorems in Hardy spaces and approximation by Riesz means. *J Approx Theory*, **49**: 240–251 (1987)
4 Jackson D. On approximation by trigonometrical sums and polynomials. *Trans Amer Math Soc*, **13**: 491–515 (1912)
5 Kryakin Y, Trebels W. q-moduli of continuity in $H^p(D)$, $p > 0$, and an inequality of Hardy and Littlewood. *J Approx Theory*, **115**: 238–259 (2002)
6 Ren G B, Wang M Z. Holomorphic Jackson's theorems in polydiscs. *J Approx Theory*, **134**: 175–198 (2005)
7 Storozhenko E A. Theorems of Jackson type in H^p, $0 < p < 1$. *Math USSR Izv*, **17**: 203–217 (1981)
8 Walsh J L, Saff E B. Extensions of D. Jackson's theorem on best complex polynomial mean approximations. *Trans Amer Math Soc*, **138**: 61–69 (1969)
9 Wang M Z, Ren G B. Jackson's theorem on bounded symmetric domains. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), **23**: 1391–1404 (2007)
10 Baernstein II A. Analytic functions of bounded mean oscillation. In: Brannan D A, Clunie J G, eds. Aspects of Contemporary Complex Analysis. London: Academic Press, 1980, 3–36
11 Xiao J. Holomorphic Q Classes. Berlin: Springer-Verlag, 2001
12 Xiao J. Geometric Q_p Function. Frontiers in Mathematics. Berlin: Birkhauser-Verlag, 2006
13 Aulaskari R, Xiao J, Zhao R. On subspaces and subsets of BMOA and UBC. *Analysis*, **15**: 101–121 (1995)
14 Garnett J B. Bounded Analytic Function. New York: Academic Press, 1981
15 John F, Nirenberg L. On function of bouned mean oscillation. *Comm Pure Appl Math*, **14**: 415–426 (1961)