

McKay 箭图与 m -Cartan 矩阵

谨将本文献给刘绍学教授80华诞

郭晋云

湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105
E-mail: gjy@xtu.edu.cn

收稿日期: 2008-01-17; 接受日期: 2008-09-02
国家自然科学基金 (批准号: 10671061) 和教育部博士点基金 (编号: 200505042004) 资助项目

摘要 引入 m -Cartan 矩阵, 并指出与 Euclid 图的 Cartan 矩阵的二次型的某些性质可以推广到 McKay 箭图的 m -Cartan 矩阵. 还刻画了特殊线性群有限 Abel 子群的 McKay 箭图.

关键词 McKay 箭图 m -Cartan 矩阵 有限群 线性群

MSC(2000) 主题分类 16G20, 16S34, 20C05, 17B20

1 引言

Dynkin 图和 Euclid 图在数学不少分类问题之中都是非常有用的. 其 Cartan 矩阵的二次型的正定和半正定性是刻画它们的一个办法. 这些图的一个应用是有限维遗传代数的表示理论, 最近不少研究者发现这一理论有着二维特征并试图找到高维推广^[1]. 事实上, Iyama 和 Yoshino 发现 McKay 箭图对描述某些高维 Auslander-Reiten 理论很有意义^[2]. 在本文中, 我们通过考虑 m -Cartan 矩阵, 证明 McKay 箭图具有 Euclid 图的某些性质, 为 McKay 箭图是 Euclid 图的高维推广提供了新的证据. 我们证明了 m -McKay 箭图的 m -Cartan 矩阵定义一个半正定二次型. 我们还刻画了特殊线性群有限 Abel 子群的 McKay 箭图.

McKay 在 1980 年引入一般线性群有限子群的 McKay 箭图. 设 $G \subset GL(m, \mathbb{C}) = GL(V)$ 是一个有限子群, 这里 V 表示 \mathbb{C} 上的一个 m 维向量空间. V 自然地构成 G 的一个忠实表示. 设 $\{S_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 是 G 在 \mathbb{C} 上既约表示的完全集. 对每一 S_i , 将张量积 $V \otimes S_i$ 分解为既约表示的直和, 记

$$V \otimes S_i = \bigoplus_j a_{i,j} S_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

这里 $a_{i,j} S_j$ 表示 $a_{i,j}$ 个 S_j 的直和. 因为 V 是有限维的, $a_{i,j}$ 是有限的. 群 G 的 McKay 箭图 $Q = Q(G)$ 定义如下: 顶点集 Q_0 是 G 在 \mathbb{C} 上既约表示同构类下标的集合, 从顶点 i 到顶点

j 有 $a_{i,j}$ 条箭向. McKay 发现当 G 是 $SL(2, \mathbb{C})$ 的有限子群时, 其 McKay 箭图 $Q = Q(G)$ 是 A, D, E 型 Euclid 图的重箭图 [3].

McKay 箭图在代数几何、数学物理和表示理论等数学领域都起着重要的作用 [4]. 它们在代数表示论中也经常出现. 例如: Cohen-McKay 模的 Auslander-Reiten 箭图 [5,6], 驯化遗传代数的预投射代数 [7-10] 及箭图簇 [3,11] 等. 我们发现它们在复杂度为 2 的自入射 Koszul 代数分类中也起着关键的作用 [12].

给定一个图, 我们有一个矩阵, 即它的 Cartan 矩阵. 利用 Cartan 矩阵, 可以定义一个二次型. 这个二次型是正定和半正定当且仅当这个图分别是 Dynkin 图和 Euclid 图. 在 Cartan 矩阵中, 主对角线上的元素为 2, 一个自然的问题是, 这个 2 是偶然的吗? 我们发现 2 可自然地解释为维数. 在 $SL(2, \mathbb{C})$ 的情形, Cartan 矩阵恰好是 $2I$ 减去 McKay 箭图的邻接矩阵. 本文第 2 节引入 m -Cartan 矩阵并将 Euclid 图的性质部分地推广到 McKay 箭图: 它具有半正定二次型. 这表明 McKay 箭图应该是 Euclid“重箭图”的高维版本.

虽然 $SL(2, \mathbb{C})$ 的 McKay 箭图都已知道. 一般来说, 确定 McKay 箭图是很困难的. 本文最后应用我们所引入的斜群代数构造 [13], 描述特殊线性群的任意有限 Abel 子群的 McKay 箭图. 这时, 循环群的情形可视为 \tilde{A}_n 重箭图的 m 维版本.

2 McKay 箭图的二次型

设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个箭图, 其中 $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ 为顶点集合, 而 Q_1 为箭向集合. 设 $M_Q = (a_{i,j})$ 为 Q 的邻接矩阵, 即以 Q 中由 i 到 j 的箭向个数 $a_{i,j}$ 为其 (i, j) 元素的 $n \times n$ 矩阵. M_Q 是一个具有非负元素的整矩阵. 定义箭图 Q 的 m -Cartan 矩阵为 $n \times n$ 矩阵 $C = C_Q^{(m)} = mI - M_Q$. 当 $m = 2$ 时, 这恰好是一个重箭图的基图的 Cartan 矩阵 (注意, 重箭图可视为将图中每条边替换为一对方向相反的箭向得到的箭图). 和 Cartan 矩阵一样, 可以对 Q 定义 \mathbb{Q}^n 上的双线性型 $B_Q = B_Q^{(m)}$ 和二次型 $q_Q = q_Q^{(m)}$, 分别称为箭图 Q 的 m 双线性型和 m 二次型. 其定义如下: 设

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^n,$$

定义

$$B_Q(X, Y) = X^T C Y, \quad q_Q(X) = X^T C X.$$

这里 X^T 表示 X 转置. 当 $m > 2$ 时, $B_Q^{(m)}$ 通常不是对称的. 设 $C' = \frac{1}{2}(C + C^T)$, 则 C' 是对称矩阵且有 $q_Q(X) = X^T C X = X^T C' X$.

设 G 是 $GL(m, \mathbb{C})$ 的一个有限子群, $Q = Q(G)$ 是 G 的 McKay 箭图. 用 $M_Q = (a_{i,j})$ 记 Q 的邻接矩阵. 设 k 是一个包含 \mathbb{C} 的代数闭域. 考虑有限生成 kG 左模范畴 $\text{mod } kG$. 用 k 记平凡表示. 这样 mk 是 m 个平凡表示 k 的直和, 并且其维数与自然表示 V 的维数相等. 对任意两个模 M 和 M' , 仿照文献 [14] 定义 $\text{mod } kG$ 上的 (二元) 整函数

$$(M, M') = \dim_k \text{Hom}_{kG}(M \otimes mk, M') - \dim_k \text{Hom}_{kG}(M \otimes V, M').$$

事实上, 这是 $\text{mod } kG$ 同构类上的一个整函数.

引理 2.1 (i) $(M, M') = B_Q(\mathbf{dim} M, \mathbf{dim} M')$;

(ii) $(M, M) \geq 0$;

(iii) 如果 $M \simeq kG$, 则 $(M, M) = 0$.

证明 由于 $\mathbf{dim}(M \oplus M') = \mathbf{dim} M + \mathbf{dim} M'$, 而 $\dim_k \text{Hom}_{kG}(S_i, S_j) = \delta_{i,j}$, 于是, 对 kG 模 M 和 M' , 如果 $\dim M = (d_1, \dots, d_n)$ 而 $\mathbf{dim} M' = (d'_1, \dots, d'_n)$, 则有

$$\dim_k \text{Hom}_{kG}(M \otimes mk, M') = \dim_k \left(\bigoplus_i \text{Hom}_{kG}(md_i S_i, d'_i S_i) \right) = \sum_{i=1}^n md_i d'_i$$

且有

$$\dim_k \text{Hom}_{kG}(M \otimes V, M') = \dim_k \left(\bigoplus_j \text{Hom}_{kG} \left(\bigoplus_i d_i a_{i,j} S_j, d'_j S_j \right) \right) = \sum_{i,j} a_{i,j} d_i d'_j.$$

这就证明了 $(M, M') = B_Q(\mathbf{dim} M, \mathbf{dim} M')$.

当 $m = 2$ 时, 第 2 和第 3 个断言在文献 [14] 中已证明. 由单表示特征标的正交性和张量公式, 对任意 kG 模 M 和 M' , 我们得到

$$(M, M') = \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in G} \text{tr}(g, M) \text{tr}(g^{-1}, M') (m - \text{tr}(g, V)) \right).$$

由定义知 (M, M) 是整数, 因而是实数. 由于其两个因数是共轭的, 故得到

$$\text{tr}(g, M) \text{tr}(g^{-1}, M) \geq 0.$$

于是 $(m - \text{tr}(g, V))$ 虚部为零. 但由于 $g \in \text{SL}(m, \mathbb{C})$, 其阶有限, g 的特征多项式的每一个根都是单位根. 这表明这 m 个根的实部介于 -1 和 1 之间. 这样得到 $(m - \text{tr}(g, V)) \geq 0$, 因而 $(M, M) \geq 0$. 这就证明了第 2 个断言.

注意到 $\mathbf{dim} kG = \sum_{i=1}^n \dim_k S_i \mathbf{dim} S_i = (\dim_k S_1, \dots, \dim_k S_n)$. 由 McKay 箭图的定义, 通过比较维数, 得到

$$\begin{pmatrix} m \cdot \dim_k S_1 \\ \vdots \\ m \cdot \dim_k S_n \end{pmatrix} = M_G \begin{pmatrix} \dim_k S_1 \\ \vdots \\ \dim_k S_n \end{pmatrix}.$$

即 $(mI - M_G) \mathbf{dim} kG = 0$, 这表明 $(\mathbf{dim} kG)^T (mI - M_G) (\mathbf{dim} kG) = 0$. 由第 1 个断言, 证明 $(kG, kG) = 0$.

定理 2.2 设 G 是 $\text{SL}(m, \mathbb{C})$ 的有限子群, 并设 q_G 为其二次型. 则

(i) q_G 是半正定的, 其根基维数为 1;

(ii) $\mathbf{dim} kG$ 是 q_G 根基的一个正的生成元.

证明由引理 2.1 和文献 [15] 的定理 4.3 和引理 4.5 得到.

注 当 $m = 2$ 时, 一个经典结论是定理 2.2 中条件 (i) 是重箭图为 McKay 箭图 (即 Euclid 重箭图) 的充分必要条件. 我们不知道在一般情形下对于哪一类箭图这能成为 McKay 箭图的充分必要条件. 在下节定理 3.1 和 3.2 中, 关于 $\text{SL}(m, \mathbb{C})$ 的有限 Abel 子群的 McKay 箭图有某种 m 循环条件, 我们估计这样的条件可用来定义 “ m 重箭图”.

利用寻找具有半正定二次型对称 3-Cartan 矩阵的程序, 根据我们在文献 [13] 中给出的判别法, 其中只有一个能够通过适当选择定向而成为 McKay 箭图. 本文最后将讨论 4 个顶

点的 3-McKay 箭图的例子. 我们还找到 115 个具有半正定二次型对称 5×5 的 3-Cartan 矩阵. 但我们的程序使用目前的个人电脑对更高阶的矩阵似乎还无能为力.

我们不知道对于推广 Dynkin 图是否有类似的方法.

3 有限 Abel 群的 McKay 箭图

本节描述有限 Abel 子群的 McKay 箭图. 先考虑循环子群的情形.

定理 3.1 设 $G = \langle g \rangle$ 是 $SL(m, \mathbb{C})$ 的有限循环子群的情形, 并且假设 $|G| = n$. 将 Q_G 的顶点集合 Q_0 与模 n 剩余类的集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{1, \dots, n\}$ 等同起来. 则有

(i) 存在 m 个非负整数 n_1, n_2, \dots, n_m , 使得 $n_1 + n_2 + \dots + n_m \equiv 0 \pmod{n}$ 并且对每个顶点 $i \in Q_0$, 有 m 条由 i 分别到顶点 $i + n_1, i + n_2, \dots, i + n_m$ 的箭向 (这里 $i + n_t$ 理解为 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 中的元素).

由同一个顶点发出的箭向用 V 的一个基所确定. 由同一个基元素确定的箭向称为具有相同的型.

(ii) 任意 m 个相连的不同型的箭向构成 $Q(G)$ 的一个有向循环.

证明 设 $\{S_i | i = 1, \dots, n\}$ 是既约表示同构类代表的完全集, 由于 G 是 Abel 群, 对所有 i 有 $\dim_k S_i = 1$. 设 λ_i 是 S_i 的特征标, 我们可设 $\lambda_i(g) = \xi_n^i$, 其中 ξ_n 是 n 次本原单位根.

我们可以将 V 分解为直和 $V = \bigoplus_{t=1}^m T_{i_t} \simeq \bigoplus_i c_i S_i$, 由于 $S_i \otimes S_j \simeq S_{i+j}$, 我们看到对所有 i 和 l 有 c_l 条从 i 到 $i+l$ 的箭向. 当 $T_{i_t} \simeq S_i$ 时记 $i_t \sim i$. 在 $Q(G)$ 每个顶点中发出 m 条箭向, 同时有 m 条箭向指向每个顶点. 事实上, 在每一 T_{i_t} 中取一个非零元素 x_{i_t} , 则 $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ 是 V 的一个基.

现在考虑 V 在 k 上的外代数 $\wedge V$. 我们知道, $\wedge V * G$ 的箭图恰好是 G 的 McKay 箭图, 即存在幂等元 e , 使得对于 $kQ(G)$ 的某个允许理想 I , 有 $e \wedge V * Ge \simeq kQ(G)/I$ [13]. 事实上, 由于 G 是 Abel 群, 所有既约表示是一维的, 故 $e = 1$. 作为 $\wedge V * G/\mathfrak{r}(\wedge V * G) \simeq kG$ 模, 我们有 $\wedge V * G = \bigoplus_{t=0}^m \wedge^t \otimes_k G$ 及 $\wedge^t \otimes_k G \simeq \mathfrak{r}^t(\wedge V * G)/\mathfrak{r}^{t+1}(\wedge V * G)$. 这时我们有一个正交本原幂等元集 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 使得 $1 = e_1 + \dots + e_n \in \wedge^0 V \otimes G \simeq kG$ 且 $S_i \simeq kGe_i \simeq \wedge^0 V \otimes Ge_i$. 于是有 $e_i V \otimes Ge_j \simeq \bigoplus_{i_t \sim i} T_{i_t} \otimes S_j$. 如果 $i_t \sim l$, $e_{j+l} x_{i_t} e_j$ 代表一个从 j 到 $j+l$ 的箭向, 这是一个型为 t 的箭向, 且当 $i_t \not\sim l$ 时 $e_{j+l} x_{i_t} e_j = 0$. 设 $n_t = i_t$, 则对每个顶点 i , 我们看到 x_{i_t} 定义一个从 i 到 $i + n_t$ 的 t 型箭向. 如果 σ 是 $\{1, \dots, m\}$ 的一个置换, 由文献 [13] 有当 $j \not\equiv i \pmod{n}$ 时 $e_i x_{i_{\sigma(m)}} \cdots x_{i_{\sigma(1)}} e_j = 0$, 而

$$e_j x_{i_{\sigma(m)}} \cdots x_{i_{\sigma(1)}} e_j = e_{j+n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(m)}} x_{i_{\sigma(m)}} e_{j+n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(m-1)}} \cdots e_{j+n_{\sigma(1)}} x_{i_{\sigma(1)}} e_j \neq 0.$$

这表明 $e_{j+n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(m)}} x_{i_{\sigma(m)}} e_{j+n_{\sigma(1)}+\dots+n_{\sigma(m-1)}} \cdots e_{j+n_{\sigma(1)}} x_{i_{\sigma(1)}} e_j$ 是 $Q(G)$ 中一条从 j 到 j 的路, 因而有 $j + n_1 + \dots + n_m \equiv j \pmod{n}$. 于是 $n_1 + \dots + n_m \equiv 0 \pmod{n}$. 证毕.

循环群的 m -McKay 箭图可以看作 \tilde{A}_n 的一个 m 维版本, 它可看作由 m 种不同颜色箭向构成, 每条恰好经过 m 个不同颜色箭向的路回到其起点.

现在假设 G 是 $SL(m, \mathbb{C})$ 的一个有限 Abel 群. 我们确定其 McKay 箭图. 我们需要找到顶点集和箭向集的合适的指标集合, 证明与上面的情形是类似的. 由有限 Abel 群结构定理 B, $G \simeq \prod_{s=1}^r (g_s)$ 是有限多个有限循环群的积. 假设 g_s 是一个阶为 n_s 的元素, 并假设当 $s \leq s'$ 有 $n_s | n_{s'}$. 设 S 是 G 的一个既约表示. 设 ξ 是 S 的特征标. 由于 G 是交换群,

$\dim_k S = 1$, 对任意 $g, g' \in G$ 有 $\xi(gg') = \xi(g)\xi(g')$ 且 $\xi(g_i)$ 是一个 n_i 次单位根. ξ 由它在生成元 g_1, \dots, g_r 上的取值唯一确定. 设 ϵ_i 是一个 n_i 次本原单位根. 设 S_{j_1, \dots, j_r} 是 G 的既约表示, 其特征标 ξ_{j_1, \dots, j_r} 满足条件 $\xi_{j_1, \dots, j_r}(g_s) = \epsilon_s^{j_s}$. 我们可将 Q_0 取为既约表示同构类代表的指标集, 因而其元素可视为由 $j_t \in \mathbb{Z}/n_t\mathbb{Z}$ 构成的 r 元组 $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_r)$. 类似循环的情形, 将 V 分解为既约表示的直和

$$V = \bigoplus_{t=1}^m T_{i_t} \simeq \bigoplus_{\mathbf{l}=(l_1, \dots, l_r) \in Q_0} c_{\mathbf{l}} S_{\mathbf{l}}.$$

则 $\sum_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{l}} = m$. 设 x_{i_t} 是 T_{i_t} 的一个非零元素, 则 x_{i_1}, \dots, x_{i_m} 构成 V 的一个基. 如果 $T_{i_t} \simeq S_{\mathbf{j}}$, 记 $i_t \sim \mathbf{j}$. 在外代数的斜群代数 $\wedge V * G$ 中, 有 $1 = \sum_{\mathbf{j} \in Q_0} e_{\mathbf{j}}$ 是正交本原幂等元的和, 且对所有 $\mathbf{j} \in Q_0$ 有 $S_{\mathbf{j}} \simeq kGe_{\mathbf{j}} \simeq \wedge^0 V \otimes Ge_{\mathbf{j}}$. 这样, 如果 $i_t \sim \mathbf{l}$, $e_{\mathbf{j}+\mathbf{l}x_{i_t}}e_{\mathbf{j}}$ 代表一个从 \mathbf{j} 到 $\mathbf{j}+\mathbf{l}$ 的箭向, 称之为一个型为 t 的箭向, 且当 $i_t \not\sim \mathbf{l}$ 时有 $e_{\mathbf{j}+\mathbf{l}x_{i_t}}e_{\mathbf{j}} = 0$, 因而从每一顶点 \mathbf{i} 发出 m 条互不同型的箭向. 我们可以如下描述 G 的 McKay 箭图.

定理 3.2 设 $G \simeq \prod_{i=1}^r (g_i)$ 是 $SL(m, \mathbb{C})$ 的一个有限 Abel 子群, 并设 g_i 的阶为 n_i . G 的 McKay 箭图 $Q(G)$ 的顶点集 Q_0 是由 $j_t \in \mathbb{Z}/n_t\mathbb{Z}$ 组成的 r 元组的集合 $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_r)$.

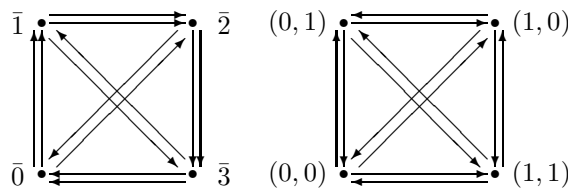
(i) 存在 m 个 r 元组 $\mathbf{l}_t = (l_1^{(t)}, \dots, l_r^{(t)})$, $t = 1, \dots, m$, $l_s^{(t)} \in \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$, 使得对 $s = 1, \dots, r$ 有 $l_s^{(1)} + \dots + l_s^{(m)} \equiv 0 \pmod{n_s}$. 对 $Q(G)$ 的每一个顶点 $\mathbf{j} \in Q_0$, 存在从 \mathbf{j} 分别到 $\mathbf{j}+\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{j}+\mathbf{l}_m$ 的 m 条箭向. 它们是从顶点 \mathbf{j} 发出的 m 条互不同型的箭向.

(ii) 任意 m 条互不同型的连续的箭向构成 $Q(G)$ 中一个有向循环.

例 我们寻找具有半正定二次型对称 3-Cartan 矩阵的程序, 找到 14 个 4×4 矩阵, 其中与 McKay 箭图有关的只有 1 个

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

我们知道只有两个 4 元素群, 它们都是 Abel 群. 一个是循环群 $G = \mathbb{Z}_4$, 另一个是 Klein 四元群 $G' = \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$, 它是两个循环群 \mathbb{Z}_2 的直积. 它们的 McKay 箭图分别为



我们看到上面的矩阵正好是第 1 个箭图的 3-Cartan 矩阵, 第 1 个箭图的 3-Cartan 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

没有圈的 4 个顶点的 3-McKay 箭图只有这两个.

参考文献

- 1 Iyama O. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv Math*, **210**(1): 22–50 (2007)
- 2 Iyama O, Yoshino Y. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-McKay modules. Preprint, arXiv:math/0607736v3
- 3 McKay J. Graph, singularities and finite groups. *Proc Symp Pure Math*, **37**: 183–186 (1980)
- 4 Reid M. McKay correspondance, Preprint, math.AG/9702016
- 5 Auslander M. Rational singularities and almost splitting sequences. *Trans Amer Math Soc*, **293**: 511–531 (1986)
- 6 Auslander M, Reiten I. McKay quivers and extended Dynkin diagrams. *Trans Amer Math Soc*, **293**: 293–301 (1986)
- 7 Crawley-Boevey W, Holland M P. Noncommutative deformations of Kleinian Singularities. *Duke J Math*, **92**: 251–289 (1998)
- 8 Crawley-Boevey W. Preprojective algebras, differential operators and a Conze embedding for deformations of Kleinian singularities. *Comment Math Helv*, **74**: 548–574 (1999)
- 9 Dlab V, Ringel C M. The preprojective algebra of a modulated graph. In: Representation Theory II, Lecture Notes in Math Vol 832. Berlin: Springer, 1980, 216–231
- 10 Baer D, Geigle W, Lenzing H. The preprojective algebra of a tame hereditary algebra. *Commun Algebra*, (15): 425–457 (1987)
- 11 Nakajima H. Varieties associated with quivers. Representation theory of algebras and related topics. *CMS Conference Proceedings*, Vol 19, 1996, 139–157
- 12 Guo J Y, Li A, Wu Q. Selfinjective Koszul algebras of finite complexity. Preprint
- 13 Guo J Y. Martínez-Villa: Algebra pairs associated to McKay quivers. *Commun Algebra*, **30**(2): 1017–1032 (2002)
- 14 Lusztig G. Affine quivers and canonical bases. *Publ Math IHES*, **76**: 111–163 (1992)
- 15 Kac V. Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge University Press, 1990