中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 583～592
www.scichina.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

d-torus 上导子 Lie 代数的一类不可分解表示

连海峰 ① ②, 谭绍滨 ①*, 曾波 ③

① 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
② 福建农林大学计算机与信息学院, 福州 350002
③ 湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105
* 通信作者 E-mail: tans@xmu.edu.cn

收稿日期: 2008-01-13; 接受日期: 2008-09-12
国家自然科学基金 (批准号: 10671160) 资助项目

摘要 设 Der$A$ 为 d-torus $A=\mathbb{C}[t_1^{\pm 1},\dots,t_d^{\pm 1}]$ 上的导子 Lie 代数. 通过 Shen-Larsson 函子, 从有限维不可分解 gl_d-模得到一类权空间维数有限的不可分解 Der$A$- 模, 并给出了它们的所有子模. 本文推广了 Rao 的结果.

关键词 Lie 代数 不可分解模 torus

MSC(2000) 主题分类 16D70, 17B10, 17B65

0 引言

设 Der$A$ 是 d-torus $A=\mathbb{C}[t_1^{\pm 1},\dots,t_d^{\pm 1}]$ 上的导子 Lie 代数. Der$A$ 也是 torus T^d 上的微分算子 Lie 代数 [1]. 当 $d=1$ 时, Der$A$ 是 Witt 代数, 其泛中心扩张是 Virasoro 代数. 后者的表示已得到广泛的研究 (参见文献 [2–6]). 当 $d\geqslant 2$ 时, Der$A$ 没有非平凡的中心扩张 [1]. 考虑 Lie 代数 $A\rtimes \mathrm{Der}A$, 其扩积运算如下:

$$[D,a]=D(a),\qquad \forall\, a\in A,\ D\in \mathrm{Der}A.$$

文献 [7] 对全 toroidal Lie 代数的不可约可积模进行了分类. 当 multi-loop 代数的作用不为 0 时, 全 toroidal Lie 代数的不可约可积模可由权空间维数有限的不可约 $A\rtimes \mathrm{Der}A$-模得到.

Larsson[8] 构造了从 gl_d-模范畴到 Der$A$- 模范畴的函子 F^α. 这一函子实际上包含在沈 [9]所构造的混合积函子中. 我们把它称为 Shen-Larsson 函子 (定义 1.1). Rao[10] 研究了有限维不可约 gl_d-模在函子 F^α 下的像模. 这些像模都是关于 Der$A$ 的一个极大交换子代数 $\mathcal{H}$ 的权模, 且每个权空间的维数都等于 gl_d-模的维数. Rao 证明了这些 Der$A$- 模大多是不可约的. Rao[11] 进一步证明, 它们是不可约的 $A\rtimes \mathrm{Der}A$- 模, 且任何权空间维数有限的不可约 $A\rtimes \mathrm{Der}A$- 模都可以通过 Shen-Larsson 函子得到.

引用格式: 连海峰, 谭绍滨, 曾波. d-torus 上导子 Lie 代数的一类不可分解表示. 中国科学 A, 2009, 39(5): 583–592
Lian H F, Tan S B, Zeng B. Indecomposable representations of the lie algebra of derivations for d-torus. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0034-6

设 L 为 Lie 代数, 它的中心和极大可解理想分别记为 $Z(L)$ 和 $\mathrm{Rad}L$. 如果 $\mathrm{Rad}L = Z(L)$, 则称 L 为约化的. 众所周知, 约化 Lie 代数的有限维模是完全可约的, 当且仅当中心元在该模上的作用都是半单的. gl_d 是全体 $d \times d$ 复矩阵构成的 Lie 代数. 它是约化 Lie 代数, 有理想直和分解 $\mathrm{gl}_d = \mathrm{sl}_d \oplus \mathbb{C}I_d$, 其中 sl_d 是全体迹为 0 的 $d \times d$ 矩阵构成的单 Lie 代数, I_d 是单位矩阵. gl_d 的有限维模 M 能否完全可约取决于 I_d 在 M 上的作用是否半单. 文献 [10, 12] 所研究的模都根源于有限维不可约 gl_d-模. 由于存在可约的不可分解 gl_d-模, 且有限维 gl_d-模都可以表示成不可分解模的直和, 所以, 研究根源于有限维 gl_d-模的模必须考虑不可分解的情形.

设 M 是 Lie 代数 L 的一个模. 如果 M 的任意两个子模都有包含关系, 则称 L- 模 M 是 uniserial. 显然, 每一个 uniserial L- 模都是不可分解的. 在本文, 我们研究的 $\mathrm{Der}A$- 模来自有限维不可分解 gl_d-模. 我们证明这些 $\mathrm{Der}A$- 模都是不可分解的, 且大多数是 uniserial.

文章具体安排如下: 在第 1 节中, 给出一些记号和回顾 d-torus 上的导子 Lie 代数的一些基本事实. 我们证明了任何有限维不可分解 gl_d-模都是 uniserial, 并且对它们进行了刻画 (命题 1.5). 在第 2 节中, 我们证明了当 $(\psi, b) \neq (\delta_k, k)$ (其中 $k = 1, \dots, d-1$) 时, $\mathrm{Der}A$-模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi, b))$ 是 uniserial (定理 2.4 和定理 2.5). 在第 3 节中, 我们证明了 $\mathrm{Der}A$- 模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k, k))$ (其中 $k = 1, \dots, d-1$) 也是不可分解的, 并且当 $\alpha \notin \Gamma$ 时, $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k, k))$ 还是 uniserial. 我们的结果包含了 Rao[10] 的结果. 当 $d = 1$ 时, $\mathcal{V}^m(\psi, b)$ 就是权空间维数都为 m 的不可分解 Virasoro 代数的模.

1 Shen-Larsson 函子与不可分解 gl_d-模

设 $A = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ 是 $d\,(\geqslant 2)$ 个变量的交换 Laurent 多项式环, $\mathcal{U}$ 是以 $e_1, e_2, \dots, e_d$ 为基的复向量空间, $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathcal{U}$ 上的满足 $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ 的对称双线性型, $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}e_i$.

设 $\mathcal{G}$ 是 Lie 代数, $\mathfrak{H}$ 是它的 Cartan 子代数, $\mathfrak{H}^*$ 是 $\mathfrak{H}$ 的对偶空间. 设 W 是 $\mathcal{G}$-模, 如果 $W = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{H}^*} W_\lambda$, 其中 $W_\lambda = \{v \in W | hv = \lambda(h)v$, 对任意 $h \in \mathfrak{H}\}$, 则称 W 是权模, 称 W_λ 中的非零向量为权 λ 的权向量.

令 E_{ij} 为 (i,j) 元是 1、其余的元素是 0 的 $d \times d$ 矩阵. E_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$ 构成 gl_d 的一组基. 设 E 是对角矩阵全体构成的 gl_d 的交换子代数, $\mathfrak{h} = E \cap \mathrm{sl}_d$. 则 $\mathfrak{h}$ 是单 Lie 代数 sl_d 的 Cartan 子代数, $\{\alpha_i{}^{\check{}} = E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leqslant i \leqslant d-1\}$ 是它的一组基. 令 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间, 它有一组基 $\delta_1, \dots, \delta_{d-1}$, 其中 $\delta_i(\alpha_j{}^{\check{}}) = \delta_{ij}\,(1 \leqslant i, j \leqslant d-1)$. 设 $\psi \in \mathfrak{h}^*$, 如果 $\psi(\alpha_i{}^{\check{}})\,(1 \leqslant i \leqslant d-1)$ 都是非负整数, 那么称 ψ 为支配整权. 特别地, $\delta_1, \dots, \delta_{d-1}$ 都是支配整权, 称它们为基本权. 众所周知, 有限维不可约 sl_d-模和支配整权是 1-1 对应的.

设 $\mathrm{Der}A$ 是 A 的导子 Lie 代数. 对任意的 $\boldsymbol{n} = \sum n_i e_i \in \Gamma$, 记 $t^{\boldsymbol{n}} = t_1^{n_1} t_2^{n_2} \cdots t_d^{n_d}$. 对任意的 $\boldsymbol{u} = \sum u_i e_i \in \mathcal{U}$ 和 $\boldsymbol{r} = \sum r_i e_i \in \Gamma$, 记 $D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = \sum u_i t^{\boldsymbol{r}} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$. 则有 $\mathrm{Der}A = \mathrm{span}_\mathbb{C}\{D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) | \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}, \boldsymbol{r} \in \Gamma\}$, 且它的李关系可由下面这个关系式给出:

$$[D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}), D(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s})] = D((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{s})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{U}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \Gamma.$$

设 $\mathcal{H}$ 是由 $D(e_i, \boldsymbol{0}) = t_i \frac{\partial}{\partial t_i}\,(1 \leqslant i \leqslant d)$ 线性张成的 $\mathrm{Der}A$ 的子空间. 则 $\mathcal{H}$ 是 $\mathrm{Der}A$ 交换子代数, 也称为 $\mathrm{Der}A$ 的 Cartan 子代数.

定义 1.1 (Shen-Larsson 函子 [9, 10]) 对任意的 $\alpha=\sum\alpha_i e_i\in\mathcal{U}$, 定义映射 F^α 如下:

$$F^\alpha:\ \mathrm{gl}_d\text{- 模}\longrightarrow \mathrm{Der}A\text{- 模}$$
$$V\longmapsto F^\alpha(V):=V\otimes A=\bigoplus\nolimits_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}V(\boldsymbol{n}),$$

其中 $V(\boldsymbol{n})=V\otimes t^{\boldsymbol{n}}$. $\mathrm{Der}A$ 在 $F^\alpha(V)$ 上的作用定义如下:

$$D(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}+\alpha)v(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r})+\left(\sum_{i,j}u_ir_jE_{ji}v\right)(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}),\tag{1.1}$$

其中, $v(\boldsymbol{n}):=v\otimes t^{\boldsymbol{n}}\in V(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}\in\Gamma$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$.

注记 1.2 由定义 1.1, 可得下列结果 (参见文献 [10]):

(i) F^α 是从 gl_d-模范畴到 $\mathrm{Der}A$- 模范畴的函子, 称为 Shen-Larsson 函子.

(ii) 设 V 是 gl_d-模, 则 $\mathrm{Der}A$- 模 $F^\alpha(V)$ 是 $\mathcal{H}$ 权模, 且有权空间分解 $F^\alpha(V)=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}V(\boldsymbol{n})$.

(iii) 设 V_1,V_2 都是 gl_d-模, 则 $F^\alpha(V_1\oplus V_2)=F^\alpha(V_1)\oplus F^\alpha(V_2)$.

(iv) 当 $\alpha-\beta\in\Gamma$ 时, 对任意的 gl_d-模 V 都有 $F^\alpha(V)\cong F^\beta(V)$.

设 ψ 是支配整权, 记 $\mathcal{V}(\psi)$ 为最高权是 ψ 的有限维不可约 sl_d-模. 对任意正整数 i, 令 $\mathcal{V}(\psi)_{(i)}:=\{u_{(i)}|u\in\mathcal{V}(\psi)\}$ 为与 $\mathcal{V}(\psi)$ 同构的 sl_d-模. sl_d 在 $\mathcal{V}(\psi)_{(i)}$ 上的作用定义如下:

$$x\cdot u_{(i)}=(x\cdot u)_{(i)},\quad \forall\, x\in\mathrm{sl}_d, u\in\mathcal{V}(\psi).\tag{1.2}$$

任意取定一个复数 b 和一个正整数 m, 令

$$\mathcal{V}^m(\psi,b):=\bigoplus_{i=1}^m\mathcal{V}(\psi)_{(i)}$$

为 sl_d- 模 $\mathcal{V}(\psi)_{(i)}$ 的直和. 为方便, 令 $\mathcal{V}^0(\psi,b)=\{0\}$, $\mathcal{V}(\psi,b)=\mathcal{V}^1(\psi,b)$. 下面的关于有限维不可分解 gl_d-模的结论应该是已知的, 但我们没能在文献中查到.

引理 1.3 设 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 同上. 定义 I_d 在 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 上的作用为

$$I_d(v_{(1)})=bv_{(1)},\qquad I_d(v_{(i)})=bv_{(i)}+v_{(i-1)},\quad i=2,\dots,m\qquad \forall\, v\in\mathcal{V}(\psi),\tag{1.3}$$

则 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 是 gl_d-模.

证明 由定义直接可验证 I_d 与 sl_d 的作用是可交换的. 进而得证 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 是 gl_d-模.

注记 1.4 当 $m=1$ 时, $\mathcal{V}(\psi,b)$ 是不可约的 gl_d-模. 由 (1.2) 和 (1.3) 知, 对任意的 $1\leqslant i\leqslant m$, $\mathcal{V}^i(\psi,b)$ 都是 gl_d-模 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 的子模, 且商模 $\mathcal{V}^i(\psi,b)/\mathcal{V}^{i-1}(\psi,b)$ 同构于 $\mathcal{V}(\psi,b)$.

在不引起混淆的情形下, 对任意 $i=1,\dots,m$, 记 $\mathcal{V}^i(\psi,b)=\mathcal{V}^i$, $\mathcal{V}(\psi)_{(i)}=\mathcal{V}_{(i)}$.

命题 1.5 (i) 对任意给定的支配整权 ψ, 复数 b 和正整数 m, $\mathcal{V}^m(\psi,b)$ 都是 uniserial gl_d-模, 且它的子模全体构成的子模链为

$$\{0\}\subset\mathcal{V}^1(\psi,b)\subset\mathcal{V}^2(\psi,b)\subset\cdots\subset\mathcal{V}^m(\psi,b).$$

(ii) 设 M 是非零的有限维不可分解 gl_d-模. 则存在支配整权 ψ, 复数 b 和正整数 m, 使得 M 同构于 $\mathcal{V}^m(\psi,b)$.

证明 (i) 对 m 作归纳. 当 $m=1$ 时, $\mathcal{V}^1$ 是不可约的 gl_d-模, 必然是 uniserial. 假设 $m>1$ 且 $\mathcal{V}^{m-1}$ 是 uniserial gl_d-模, $\{0\}\subset\mathcal{V}^1\subset\mathcal{V}^2\subset\cdots\subset\mathcal{V}^{m-1}$ 是 $\mathcal{V}^{m-1}$ 的全体子模构成的子模链. 由注记 1.4 和归纳假设知, 只需要证明: 若 U 是 $\mathcal{V}^m$ 的子模且 $U\nsubseteq\mathcal{V}^{m-1}$, 必有 $U=\mathcal{V}^m$. 设 U 是满足上述条件的子模, 则商模 $(U+\mathcal{V}^{m-1})/\mathcal{V}^{m-1}$ 是 $\mathcal{V}^m/\mathcal{V}^{m-1}$ 的非零子模. 由于后者是不可约的 (注记 1.4), 所以 $U+\mathcal{V}^{m-1}=\mathcal{V}^m$. 我们断言: $\mathcal{V}^{m-1}\cap U=\mathcal{V}^{m-1}$.

事实上, 由归纳假设, 只需证明存在 $u \in (U \cap \mathcal{V}^{m-1}) \backslash \mathcal{V}^{m-2}$. 由于 $U + \mathcal{V}^{m-1} = \mathcal{V}^m$, 故任取 $0 \neq v \in \mathcal{V}(\psi)$, 存在 $x \in \mathcal{V}^{m-1}$, 使得 $x + v_{(m)} \in U$. 简单计算可得

$$I_d \cdot (x + v_{(m)}) = b(x + v_{(m)}) + v_{(m-1)} + w,$$

其中 $w \in \mathcal{V}^{m-2}$. 所以有 $0 \neq v_{(m-1)} + w \in (U \cap \mathcal{V}^{m-1}) \backslash \mathcal{V}^{m-2}$. 因此, $\mathcal{V}^{m-1} \cap U = \mathcal{V}^{m-1}$, 断言得证. 由于 $U + \mathcal{V}^{m-1} = \mathcal{V}^m$, 所以 $U = \mathcal{V}^m$, (i) 得证.

(ii) 由 Weyl 定理, M 可表示为不可约 sl_d-模的直和. 在同构意义下, 记 $M = \bigoplus_{i=1}^k n_i M_i$. 其中, $n_i M_i$ 是 n_i 个同构于 M_i 的 sl_d-模的直和, n_i, k 都是正整数, 并且当 $i \neq j$ 时 $M_i \ncong M_j$. 我们断言 $k = 1$. 事实上, 设 ρ_j 是 M 到 $n_j M_j$ 的典范投射, 则有 $\rho_j I_d|_{n_i M_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}_d}(n_i M_i, n_j M_j)$. 当 $j \neq i$ 时, 由 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}_d}(n_i M_i, n_j M_j) \cong n_i n_j \mathrm{Hom}_{\mathrm{sl}_d}(M_i, M_j) = \{0\}$, 我们有 $\rho_j I_d|_{n_i M_i} = 0$. 因此每一个 $n_i M_i$ 都是 gl_d-模. 而 M 是不可分解的 gl_d-模, 所以 $k = 1$, 断言得证. 因此, 可设 $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ 为 m 个同构的 sl_d- 模的直和. 设 M_1 同构于 $\mathcal{V}(\psi)$. 下面我们将证明存在 $b \in \mathbb{C}$ 使得 M 同构于 gl_d-模 $\mathcal{V}^m(\psi, b)$.

对任意 $i = 1, \ldots, m$, 在 sl_d- 模 M_i 上任意取定一个最高权向量 w_i. 设 M_ψ 是 M 的关于 $\mathfrak{h}$ 的最高权空间, 则有 $M_\psi = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{w_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ 且 $I_d|_{M_\psi} \in \mathrm{End} M_\psi$. 选取 M_ψ 的一组基 $v_1, v_2, \ldots, v_m \in M_\psi$, 使得 $I_d|_{M_\psi}$ 的矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} J(b_1, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(b_k, n_k) \end{pmatrix}.$$

其中

$$J(b_i, n_i) = \begin{pmatrix} b_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & b_i & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_i \end{pmatrix}$$

是 n_i 阶 Jordan 块, $n_1 + \cdots + n_k = m$. 我们断言 $k = 1$, 即 Jordan 块只有一个. 事实上, 设 $V_i = U(\mathrm{sl}_d) v_i$, 其中 $U(\mathrm{sl}_d)$ 是 sl_d 的泛包络代数. 由 v_i 的选取知, 每一个 V_i 都同构于 sl_d- 模 $\mathcal{V}(\psi)$ 且 $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$. 因此, 作为 sl_d- 模, M 有直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^k V_i$. 设 $U_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n_1}$, $U_i = V_{n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1} \oplus \cdots \oplus V_{n_1 + \cdots + n_i} (i = 2, \ldots, k)$. 由 v_i 的选取知, $M = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ 是 gl_d-模的直和. 而 M 是不可分解的, 所以 $k = 1$, 断言得证. 因此 $M = U_1 = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ (做为 sl_d- 模, 它是 m 个 $\mathcal{V}(\psi)$ 的直和), 且对任意 $x \in U(\mathrm{sl}_d)$ 都有

$$I_d \cdot (x \cdot v_1) = x \cdot (I_d \cdot v_1) = b_1 (x \cdot v_1),$$

$$I_d \cdot (x \cdot v_i) = x \cdot (I_d \cdot v_i) = b_1 (x \cdot v_i) + x \cdot v_{i-1} \quad i = 2, \ldots, m.$$

由 $\mathcal{V}^m(\psi, b_1)$ 的定义可知, $M \cong \mathcal{V}^m(\psi, b_1)$, (ii) 得证.

在本文中, 我们总是假定 ψ 为支配整权, b 为复数, m 为正整数, $\alpha = \sum \alpha_i e_i \in \mathcal{U}$. 根据命题 1.5, 我们只需要研究 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi, b))$. 下面这个引理, 我们将多次应用.

引理 1.6 对任意 $1 \leqslant i \leqslant m$, $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\psi, b))$ 都是 $\mathrm{Der} A$-模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi, b))$ 的子模, 且商模 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\psi, b)) / F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\psi, b))$ 都同构于 $F^\alpha(\mathcal{V}(\psi, b))$.

证明 由定义直接可得.

2 Uniserial Der$A$-模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi,b))$

设 V 是非零 gl_d-模, 由注记 1.2 知, $F^\alpha(V)$ 是 Γ- 分次的 Der$A$ 权模. 故 $F^\alpha(V)$ 的任一子模 W 也是 Γ-分次的 Der$A$ 权模, 即 $W=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}W(\boldsymbol{n})$, 其中 $W(\boldsymbol{n})=V(\boldsymbol{n})\cap W$.

在这一节中, 假定 $(\psi,b)\neq(\delta_k,k)$ (其中 $k=1,\dots,d-1$). 文献 [10] 刻画了 $F^\alpha(\mathcal{V})$ 的结构, 其中 $\mathcal{V}=\mathcal{V}(\psi,b)$.

引理 2.1[10] 假设 $(\psi,b)\neq(\delta_k,k),(0,b)$, $1\leqslant k\leqslant d-1$. 则 $F^\alpha(\mathcal{V})$ 是不可约的 Der$A$- 模.

引理 2.2[10, 13] 假设 $\psi=0$.

(i) 当 $\alpha\notin\Gamma$ 或 $b\notin\{0,d\}$ 时, $F^\alpha(\mathcal{V})$ 是不可约的 Der$A$-模.

(ii) 当 $\alpha\in\Gamma$ 且 $b=0$ 时, $\mathcal{V}(-\alpha)$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V})$ 仅有的非平凡子模.

(iii) 当 $\alpha\in\Gamma$ 且 $b=d$ 时, $\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}(\boldsymbol{n})$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V})$ 仅有的非平凡子模.

引理 2.3[10] 设 V 是非零的 gl_d-模, W 是 Der$A$- 模 $F^\alpha(V)$ 的非零子模. 如果 $v(\boldsymbol{n})\in W(\boldsymbol{n})$, 则 $W(\boldsymbol{n})$ 中含有下面这些向量:

(V1) $(E_{ii}-E_{ii}^2)v(\boldsymbol{n})$,

(V2) $E_{ji}^2v(\boldsymbol{n})$ $(i\neq j)$,

(V3) $E_{ij}E_{ii}v(\boldsymbol{n})$ $(i\neq j)$,

(V4) $((n_i+\alpha_i)E_{jk}-(n_k+\alpha_k)E_{ji})v(\boldsymbol{n})$, 其中 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i,\alpha=\sum\alpha_ie_i$.

让我们回到 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi,b))$. 注意到, 如果 v_ψ 是不可约 sl_d-模 $\mathcal{V}(\psi)$ 的一个最高权向量, 则, 对任意 $1\leqslant i\leqslant m$, $v_{\psi(i)}$ 是 sl_d-模 $\mathcal{V}(\psi)_{(i)}$ 的最高权向量.

定理 2.4 假定 $(\psi,b)\neq(\delta_k,k),(0,b)$, $1\leqslant k\leqslant d-1$. 对任意正整数 m, $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 都是 uniserial Der$A$- 模. 它的全体子模构成的子模链为

$$\{0\}\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2)\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^m).$$

证明 对 m 做归纳. 由引理 2.1 知, 定理对 m=1 成立. 假设 $m\geqslant 2$ 且 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$ 是 uniserial Der$A$- 模, 它的全体子模构成的子模链为

$$\{0\}\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2)\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}).$$

由归纳假设, 只要证明: 若 W 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 的子模且 $W\nsubseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$, 则 $W=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$. 设 W 是满足上述条件的子模. 由引理 1.6 和 2.1 知, 商模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)/F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$ 是不可约的. 所以 $W+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$. 因此, 证 $W=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$, 只要证 $W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$. 由于

$$W=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}W(\boldsymbol{n})\ \text{ 且 }\ F^\alpha(\mathcal{V}^m)=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\sum_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}\mathcal{V}_{(m)}(\boldsymbol{n}),$$

所以, 对任意的 $\boldsymbol{n}\in\Gamma$, 存在 $x\in\mathcal{V}^{m-1}$ 使得 $(x+v_{\psi(m)})(\boldsymbol{n})\in W(\boldsymbol{n})$. 令 $\tilde{\mathcal{V}}^{m-1}:=\mathcal{V}^{m-2}+\sum_{\lambda\prec\psi}\mathcal{V}_{\lambda(m-1)}$, 其中 $\mathcal{V}_{\lambda(m-1)}$ 是 sl_d- 模 $\mathcal{V}_{(m-1)}$ 的权为 λ 的子空间. 设 $h_i=E_{ii}-\frac{1}{d}I_d$ $(i=1,2,\dots,d)$. 利用 (1.2) 和 (1.3), 有

$$\begin{aligned}&(E_{ii}-E_{ii}^2)\cdot(x+v_{\psi(m)})\\&\quad=\left(\frac{b}{d}+\psi(h_i)\right)\left(1-\frac{b}{d}-\psi(h_i)\right)(x+v_{\psi(m)})+\frac{1}{d}\left(1-2\left(\frac{b}{d}+\psi(h_i)\right)\right)v_{\psi(m-1)}+u,\end{aligned}$$

其中 $u\in\tilde{\mathcal{V}}^{m-1}$. 由于 $\psi\neq0$, 故存在 i,j, 使得

$$\psi(h_i-h_j)=\psi(E_{ii}-E_{jj})\neq0.$$

所以存在 i 使得 $1-2(\frac{b}{d}+\psi(h_i))\neq 0$. 由引理 2.3, 有

$$\bigg(\frac{1}{d}\bigg(1-\frac{2b}{d}-2\psi(h_i)\bigg)v_{\psi(m-1)}+u\bigg)(\boldsymbol{n})\in(W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}))\backslash F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2}).$$

由归纳假设, 得 $W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$. 因此 $W=W+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$. 定理得证.

定理 2.5 假定 $\psi=0$. 对任意正整数 m, 都有 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 是 uniserial Der$A$- 模. 而且,

(i) 当 $\alpha\notin\Gamma$ 或 $b\notin\{0,d\}$ 时, 它的全体子模构成的子模链为

$$\{0\}\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2)\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^m);$$

(ii) 当 $\alpha\in\Gamma$ 且 $b=0$ 时, 它的全体子模构成的子模链为

$$\begin{aligned}\{0\}&\subset\mathcal{V}_{(1)}(-\alpha)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)+\mathcal{V}_{(2)}(-\alpha)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2)\\&\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\mathcal{V}_{(m)}(-\alpha)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^m);\end{aligned}$$

(iii) 当 $\alpha\in\Gamma$ 且 $b=d$ 时, 它的全体子模构成的子模链为:

$$\begin{aligned}\{0\}&\subset\textstyle\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(1)}(\boldsymbol{n})\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1)+\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(2)}(\boldsymbol{n})\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2)\\&\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\textstyle\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(m)}(\boldsymbol{n})\subset F^\alpha(\mathcal{V}^m).\end{aligned}$$

证明 由于 $\psi=0$, 所以可设 $\mathcal{V}=\mathbb{C}v_0$, 从而 $\mathcal{V}_{(j)}=\mathbb{C}v_{0(j)}$ $(j=1,2,\dots,m)$. 对 m 作归纳. 由引理 2.2 知, 定理对 m=1 成立. 假设 $m\geqslant 2$ 且定理对正整数 $m-1$ 成立. 设 W 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 的子模. 由归纳假设, 不妨假定 $W\not\subseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$.

对于 (i), 只需证 $W=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$. 由引理 1.6 和 2.2 知, 商模 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)/F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$ 不可约. 所以 $W+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$. 任意选取 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i\in\Gamma$, 使得 $n_1+\alpha_1\neq 0$. 则存在 $x\in\mathcal{V}^{m-1}$, 使得 $(x+v_{0(m)})(\boldsymbol{n})\in W(\boldsymbol{n})$. 利用 (1.1)–(1.3), 有

$$w:=D\bigg(e_2-\frac{d(n_2+\alpha_2)+b}{d(n_1+\alpha_1)}e_1,e_2\bigg)(x+v_{0(m)})(\boldsymbol{n})=\frac{1}{d}v_{0(m-1)}(\boldsymbol{n}+e_2)+u,$$

其中 $u\in F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})$. 所以 $w\in(W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}))\backslash F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})$. 由归纳假设, 我们有 $W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$. 因此 $W=F^\alpha(\mathcal{V}^m)$.

对于 (ii), 显然 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\mathcal{V}_{(m)}(-\alpha)$ 是 Der$A$- 子模. 由引理 1.6 和 2.2 知, 如果 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 的真子模且 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset U$, 那么 $U=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\mathcal{V}_{(m)}(-\alpha)$. 所以, 我们只要证明 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset W$. 由 $W\not\subseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$ 可知,

$$W+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\supseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\mathcal{V}_{(m)}(-\alpha).$$

因而存在 $x\in\mathcal{V}^{m-1}$, 使得 $(x+v_{0(m)})(-\alpha)\in W(-\alpha)\subseteq W$. 利用 (1.1)–(1.3), 有

$$w:=D(e_1,e_1)(x+v_{0(m)})(-\alpha)=\frac{1}{d}v_{0(m-1)}(-\alpha+e_1)+u,$$

其中 $u\in F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})$. 所以 $w\in(W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}))\backslash(F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})+\mathcal{V}_{(m-1)}(-\alpha))$. 由归纳假设, 有 $W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$. 因此 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset W$.

对于 (iii), 显然 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(m)}(\boldsymbol{n})$ 是 Der$A$- 子模. 由引理 1.6 和 2.2 知, 如果 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m)$ 的真子模且 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset U$, 则 $U=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(m)}(\boldsymbol{n})$. 因此, 只要证 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset W$. 由于 $W\not\subseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$, 所以

$$W+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\supseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})+\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(m)}(\boldsymbol{n}).$$

故存在 $x\in\mathcal{V}^{m-1}$ 使得 $(x+v_{0(m)})(-\alpha+e_1)\in W(-\alpha+e_1)\subseteq W$. 利用 (1.1)–(1.3), 有

$$w:=D(e_1,-e_1)(x+v_{0(m)})(-\alpha+e_1)=-\frac{1}{d}v_{0(m-1)}(-\alpha)+u,$$

其中 $u\in F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})$. 所以 $w\in(W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}))\backslash(F^\alpha(\mathcal{V}^{m-2})+\sum_{\boldsymbol{n}\neq-\alpha}\mathcal{V}_{(m-1)}(\boldsymbol{n}))$. 由归纳假设, 有 $W\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})$, 进而 $F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1})\subset W$. 定理得证.

由定理 2.4 和 2.5, 有下面这个推论.

推论 2.6 假定 $(\psi,b)\neq(\delta_k,k)$, $1\leqslant k\leqslant d-1$. 则对任意的正整数 m, $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\psi,b))$ 都是不可分解的 Der$A$- 模.

3 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 的结构

在这一节中, 研究 $(\psi,b)=(\delta_k,k)$ $(1\leqslant k\leqslant d-1)$ 的情形. 首先, 我们回顾文献 [10,14] 中关于 $\mathcal{V}(\delta_k,k)$ 和 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的一些基本事实. 定义 gl_d 在向量空间 $\mathcal{U}$ 上的作用为: $E_{ij}e_l=\delta_{jl}e_i$. 则 $\mathcal{U}$ 是 gl_d-模, $\mathcal{U}\cong\mathcal{V}(\delta_1,1)$. 考虑外积 $E^k(\mathcal{U})=\mathcal{U}\wedge\cdots\wedge\mathcal{U}$ (k 次). 定义 gl_d 在 $E^k(\mathcal{U})$ 上的作用如下:

$$X(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)=\sum_{i=1}^k v_1\wedge\cdots\wedge v_{i-1}\wedge Xv_i\wedge\cdots\wedge v_k,\ \forall X\in\mathrm{gl}_d. \tag{3.1}$$

则 $E^k(\mathcal{U})$ 是 gl_d-模. 并且, 对任意的 $1\leqslant k\leqslant d-1$, 有 gl_d-模同构 $E^k(\mathcal{U})\cong\mathcal{V}(\delta_k,k)$[14]. 我们将 $E^k(\mathcal{U})$ 和 $\mathcal{V}(\delta_k,k)$ 等同看待. 由 (1.1) 和 (3.1) 知, Der$A$ 在 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 上的作用为

$$\begin{aligned}D(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r})v_1\wedge\cdots\wedge v_k(\boldsymbol{n})&=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}+\alpha)v_1\wedge\cdots\wedge v_k(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r})\\&\quad+\sum_{i=1}^k(\boldsymbol{u},v_i)v_1\wedge\cdots\wedge v_{i-1}\wedge\boldsymbol{r}\wedge\cdots\wedge v_k(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{3.2}$$

对任意 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i\in\Gamma$, 令 $W^k(\boldsymbol{n}):=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_{k-1}(\boldsymbol{n})|v_i\in\mathcal{U}\}$. 令 $W(\alpha,k):=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}W^k(\boldsymbol{n})$, 它是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的子模 [10].

假设 $\alpha=\sum\alpha_ie_i\in\Gamma$, 则对任意 $v_1\wedge\cdots\wedge v_k\in\mathcal{V}(\delta_k,k)$, 有

$$D(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r})v_1\wedge\cdots\wedge v_k(-\alpha)=\sum_{i=1}^k(\boldsymbol{u},v_i)v_1\wedge\cdots\wedge v_{i-1}\wedge\boldsymbol{r}\wedge\cdots\wedge v_k(-\alpha+\boldsymbol{r}),$$

后者属于 $W^k(-\alpha+\boldsymbol{r})$. 所以, $\tilde{W}(\alpha,k):=W(\alpha,k)+\mathcal{V}(\delta_k,k)(-\alpha)$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的子模, 且 $\tilde{W}(\alpha,k)/W(\alpha,k)$ 商模 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))/W(\alpha,k)$ 是 d-维平凡的子模 [10].

引理 3.1[10] 假定 $(\psi,b)=(\delta_k,k),1\leqslant k\leqslant d-1$.

(i) $W(\alpha,k)$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的不可约子模,

(ii) 如果 $\alpha\notin\Gamma$, 那么 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))/W(\alpha,k)$ 是不可约的,

(iii) 如果 $\alpha\in\Gamma$, 那么 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))/\tilde{W}(\alpha,k)$ 是不可约的.

命题 3.2 假定 $(\psi,b)=(\delta_k,k),1\leqslant k\leqslant d-1$.

(i) 如果 $\alpha\notin\Gamma$, 则 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 是 uniserial Der$A$- 模, 且它的子模全体构成的链为 $\{0\}\subset W(\alpha,k)\subset F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$.

(ii) 如果 $\alpha\in\Gamma$, 那么 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的非零真子模当且仅当存在 $\mathcal{V}(\delta_k,k)(-\alpha)$ 的子空间 S 使得 $U=W(\alpha,k)+S$.

(iii) $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 是不可分解的 Der$A$-模.

证明 先证 (i). 由引理 3.1 知, 只要证明若 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的子模且 $U\not\subseteq W(\alpha,k)$, 则 $U=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$. 由于 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))/W(\alpha,k)$ 不可约, 所以

$$U+W(\alpha,k)=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k)).$$

任意选取 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i\in\Gamma$, 满足 $n_d+\alpha_d\neq 0$. 则存在 $x=\sum a_{i_1i_2\cdots i_{k-1}}(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{k-1}}$ 使得 $(x+e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k)(\boldsymbol{n})\in U$, 其中 $a_{i_1i_2\cdots i_{k-1}}\in\mathbb{C}$. 利用 (3.1), 有

$$\begin{aligned}u:=&\sum_{j=1}^{d}(n_j+\alpha_j)((n_d+\alpha_d)E_{j1}-(n_1+\alpha_1)E_{jd})(x+e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k)(\boldsymbol{n})\\=&(n_d+\alpha_d)(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k(\boldsymbol{n}).\end{aligned}$$

由 $\mathbf{n}$ 的选法和引理 2.3 可知, $u\in U\cap W(\alpha,k)$ 且 $u\neq 0$. 因为 $W(\alpha,k)$ 是不可约的, 所以 $U\cap W(\alpha,k)=W(\alpha,k)$. 又 $U+W(\alpha,k)=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$, 所以 $U=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$.

接着证 (ii). 显然, 对 $\mathcal{V}(\delta_k,k)(-\alpha)$ 的任意子空间 S, $W(\alpha,k)+S$ 都是 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 的子模. 反过来, 设 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V})$ 的非零子模, 我们有下面这两个断言:

断言 1 如果 $U\not\subseteq\tilde{W}(\alpha,k)$ 那么 $U=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$.

事实上, 由于 $U\not\subseteq\tilde{W}(\alpha,k)$ 且商模 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))/\tilde{W}(\alpha,k)$ 不可约, 所以 $U+\tilde{W}(\alpha,k)=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$. 选取 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i\in\Gamma$, 满足 $n_d+\alpha_d\neq 0$. 则存在 $x=\sum a_{i_1i_2\cdots i_{k-1}}(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{k-1}}$ 使得 $(x+e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_k)(\boldsymbol{n})\in U$, 其中 $a_{i_1i_2\cdots i_{k-1}}\in\mathbb{C}$. 类似 (i) 的证明, 有 $W(\alpha,k)\subseteq U$. 由于 $U+\tilde{W}(\alpha,k)=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$ 且 $\tilde{W}(\alpha,k)=W(\alpha,k)+\mathcal{V}(\alpha,k)(-\alpha)$, 所以, 对任意的 $\boldsymbol{n}\in\Gamma\backslash\{-\alpha\}$ 都有 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))(\boldsymbol{n})\subseteq U$. 因此, 对任意的 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant d$, 存在 $j\in\{1,\dots,d\}\backslash\{i_1,\dots,i_k\}$ 使得 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha+e_j)\in U$. 又由于

$$D(e_j,-e_j)e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha+e_j)=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha),$$

所以 $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha)\in U$. 由 $i_1,\dots,i_k$ 的任意性, 我们有 $F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))(-\alpha)\subseteq U$, 进而有 $U=F^\alpha(\mathcal{V}(\delta_k,k))$.

断言 2 如果 $U\subseteq\tilde{W}(\alpha,k)$, 则 $W(\alpha,k)\subseteq U$.

若不然, 则假定 $W(\alpha,k)\not\subseteq U$. 由于 $U\subseteq\tilde{W}(\alpha,k)$, 所以存在

$$x=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant d}a_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k},$$

使得 $0\neq x(-\alpha)\in U$, 其中 $a_{i_1\cdots i_k}\in\mathbb{C}$. 假设系数 $a_{i_1'\cdots i_k'}\neq 0$, 简单计算可得

$$\begin{aligned}D(e_{i_1'},e_{i_1'})x(-\alpha)=&E_{i_1'i_1'}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant d}a_{i_1\cdots i_k}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha+e_{i_1'})\\=&a_{i_1'\cdots i_k'}e_{i_1'}\wedge\cdots\wedge e_{i_k'}(-\alpha+e_{i_1'})+\sum_{(i_1',i_2,\dots,i_k)\neq(i_1',i_2',\dots,i_k')}a_{i_1'i_2\cdots i_k}\\&\cdot e_{i_1'}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}(-\alpha+e_{i_1'}).\end{aligned}$$

所以有 $0\neq D(e_{i_1'},e_{i_1'})x(-\alpha+e_{i_1'})\in U\cap W(\alpha,k)$. 由于 $W(\alpha,k)$ 不可约, 所以 $U\cap W(\alpha,k)=W(\alpha,k)$, 进而 $W(\alpha,k)\subseteq U$. 这与假设矛盾. 因此 $W(\alpha,k)\subseteq U$.

综合断言 1 和断言 2, (ii) 得证. 最后, (iii) 可由 (i) 和 (ii) 直接得到.

下面考虑 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$, 其中 m 为任意给定的正整数. 注意到 $\mathcal{V}^m(\delta_k,k)=\bigoplus_{i=1}^m\mathcal{V}(\delta_k)_{(i)}$ 是 m 个不可约 sl_d- 模 $\mathcal{V}(\delta_k)$ 的直和, 其中 $\mathcal{V}(\delta_k)_{(i)}=\{v_{(i)}\mid v\in\mathcal{V}(\delta_k)\}$. 对任意的 $\boldsymbol{n}\in\Gamma$ 和

$i=1,\dots,m$, 令

$$W^k_{(i)}(\boldsymbol{n})=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge v_1\wedge\cdots\wedge v_{k-1(i)}(\boldsymbol{n})|v_j\in\mathcal{U}\}.$$

令 $W_{(i)}(\alpha,k):=\bigoplus_{\boldsymbol{n}\in\Gamma}W^k_{(i)}(\boldsymbol{n})$. 显然对任意的 $i=1,\dots,m$, $W_{(i)}(\alpha,k)+F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\delta_k,k))$ 的子模.

如果 $\alpha=\sum\alpha_ie_i\in\Gamma$, 那么对任意的 $i=1,\dots,m$, 令

$$\tilde{W}_{(i)}(\alpha,k):=W_{(i)}(\alpha,k)+\mathcal{V}(\delta_k)_{(i)}(-\alpha).$$

由定义可知, $\tilde{W}_{(i)}(\alpha,k)+F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\delta_k,k))$ 的子模, 且

$$(\tilde{W}_{(i)}(\alpha,k)+F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k)))/(W_{(i)}(\alpha,k)+F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k)))$$

是商模 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\delta_k,k))/(W_{(i)}(\alpha,k)+F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k)))$ 的 d- 维平凡子模.

由引理 3.1 和命题 3.2 可得下面这个引理.

引理 3.3 对任意的 $1\leqslant i\leqslant m$, 设 U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\delta_k,k))$ 的非零真子模且 $F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))\subset U$.

(i) $F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))+W_{(i)}(\alpha,k)$ 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^i(\delta_k,k))$ 的子模, 且有 Der$A$- 模同构

$$(F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))+W_{(i)}(\alpha,k))/(F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))\cong W(\alpha,k).$$

(ii) 假定 $\alpha\notin\Gamma$, 则 $U=F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))+W_{(i)}(\alpha,k)$.

(iii) 假定 $\alpha\in\Gamma$, 则 $U=F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))+W_{(i)}(\alpha,k)+S$, 其中 S 是向量空间 $\mathcal{V}(\delta_k)_{(i)}(-\alpha)$ 的子空间; 反之, 对向量空间 $\mathcal{V}(\delta_k)_{(i)}(-\alpha)$ 的任一子空间 S, $F^\alpha(\mathcal{V}^{i-1}(\delta_k,k))+W_{(i)}(\alpha,k)+S$ 都是 Der$A$-子模.

定理 3.4 假设 $(\psi,b)=(\delta_k,k), 1\leqslant k\leqslant d-1$, m 为正整数.

(i) 如果 $\alpha\notin\Gamma$, 那么 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 是 uniserial Der$A$- 模, 其全体子模构成的链为

$$\begin{aligned}\{0\}&\subset W_{(1)}(\alpha,k)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1(\delta_k,k))\subset F^\alpha(\mathcal{V}^1(\delta_k,k))+W_{(2)}(\alpha,k)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^2(\delta_k,k))\\&\subset\cdots\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))\subset F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))+W_{(m)}(\alpha,k)\subset F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k)).\end{aligned}$$

(ii) 如果 $\alpha\in\Gamma$, 则对 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 的满足 $U\not\subseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$ 的子模 U, U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 的真子模的充要条件是: 存在向量空间 $\mathcal{V}(\delta_k)_{(m)}(-\alpha)$ 的子空间 S, 使得

$$U=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))+W_{(m)}(\alpha,k)+S.$$

(iii) $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 是不可分解的 Der$A$- 模.

证明 对于 (i) 和 (ii), 我们对 m 作归纳. 当 $m=1$ 时, 由命题 3.2 可得 (i) 和 (ii) 成立. 假设 $m\geqslant 2$, 且 (i) 和 (ii) 对于整数 $m-1$ 成立.

先考虑 (i). 假设 $\alpha\notin\Gamma$, U 是 $F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k))$ 的子模. 由归纳假设, 不防设 $U\not\subseteq F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$. 于是, 由引理 3.3, 有

$$U+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))+W_{(m)}(\alpha,k),$$

$$\text{或 }U+F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))=F^\alpha(\mathcal{V}^m(\delta_k,k)).$$

所以只需要证明

$$U\cap F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))=F^\alpha(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)).$$

任意选取 $\boldsymbol{n}=\sum n_ie_i\in\Gamma$, 满足 $n_1+\alpha_1,n_d+\alpha_d\neq 0$. 则存在 $x\in\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)$, 使得 $u(\boldsymbol{n})=(x+(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{k(m)})(\boldsymbol{n})\in U$. 简单计算可得

$$(E_{11}-E_{11}^2)u(\boldsymbol{n})=-\frac{2(n_1+\alpha_1)}{d}e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_{k(m-1)}(\boldsymbol{n})+s,$$

其中 $s \in F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-2})+W_{(m-1)}(\alpha,k)$. 再由 $\boldsymbol{n}$ 的选取可得, $(E_{11}-E_{11}^2)u(\boldsymbol{n}) \in F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))\setminus(F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-2}(\delta_k,k)) + W_{(m-1)}(\alpha,k))$. 由引理 2.3 和归纳假设, 有 $U \cap F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)) = F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$. 因此 (i) 得证.

考虑 (ii). 假设 $\alpha \in \Gamma$ 且 $U \nsubseteq F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$ 是 $F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m}(\delta_k,k))$ 的子模. 由定义可直接验证充分性成立. 下面证必要性. 设 U 还是 $F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m}(\delta_k,k))$ 的真子模. 由引理 3.3, 只要证

$$F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)) \cap U = F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)).$$

由引理 3.3 及 $U \nsubseteq F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$, 有 $F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))+W_{(m)}(\alpha,k) \subseteq U+F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$. 同样地, 选取 $\boldsymbol{n} = \sum n_i e_i \in \Gamma$ 使得 $n_1+\alpha_1, n_d+\alpha_d \neq 0$. 则有 $x \in \mathcal{V}^{m-1}$ 使得 $u(\boldsymbol{n}) = (x+(\boldsymbol{n}+\alpha)\wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{k(m)})(\boldsymbol{n}) \in U$. 简单计算可得

$$(E_{11}-E_{11}^2)u(\boldsymbol{n}) = -\frac{2(n_1+\alpha_1)}{d} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{k(m-1)}(\boldsymbol{n}) + s,$$

其中, $s \in F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-2}(\delta_k,k))+\tilde{W}_{(m-1)}(\alpha,k)$. 再由 $\boldsymbol{n}$ 的取法知, $(E_{11}-E_{11}^2)u(\boldsymbol{n}) \in F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))\setminus(F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-2}(\delta_k,k))+\tilde{W}_{(m-1)}(\alpha,k))$. 由引理 2.3 和归纳假设, 我们有 $U \cap F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k)) = F^{\alpha}(\mathcal{V}^{m-1}(\delta_k,k))$. 这样 (ii) 就得证.

最后, (iii) 可由 (i) 和 (ii) 直接得到.

参考文献

1 Ramos E, Sah C H, Shrock R E. Algebras of diffeomorphisms of the N-torus. *J Math Phys*, **31**(8): 1805–1816(1990)

2 Kac V, Raina A K. Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras. Singapore: World Scientific, 1987

3 Kaplansy I, Santharoubane L J. Harish Chandra modules over Virasoro algebra. *Publ Math Sci Res Inst*, **4**: 217–231 (1987)

4 Mathieu O. Classification of the Harish-Chandra nodules over the Virasoro Lie algebra. *Invent Math*, **107**: 225–234 (1992)

5 Martin C, Piard A. Classification of the indecomposable bounded admissible modules over the Virsoro Lie algebra with weight spaces of dimension not exceeding two. *Comm Math Phys*, **150**: 465–493 (1992)

6 Mazorchuk V, Zhao K. Classification of simple weight Virasoro modules with a finite-dimensional weight space. *J Algebra*, **307**: 209–214 (2007)

7 Rao S E, Jiang C. Classification of irreducible integrable representations for the full toroidal lie algebras. *J Pure Appl Algebra*, **200**: 71–85 (2005)

8 Larsson T A. Conformal fields: A class of representations of Vect(N). *Internat J Modern Phys A*, **7**(26): 6493–6508 (1992)

9 Shen G. Graded modules of graded Lie algebras of Cartan type (I). *Scientia Sinica*, **29**(6): 570–581 (1986)

10 Rao S E. Irreducible representations of the Lie-algebra of the diffeomorphisms of a d-dimensional torus. *J Algebra*, **182**: 401–421 (1996)

11 Rao S E. Partial classification of modules for Lie algebra of diffemorphisms of d-dimensional torus. *J Math Phys*, **45**(8): 3322–3333 (2004)

12 Lin W, Tan S. Representations of the Lie algebra of the derivations for quantum torus. *J Algebra*, **275**: 250–274 (2004)

13 Rao S E. Representations of Witt algebras. *Publ Res Inst Math Sci*, **30**: 191–201 (1994)

14 Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representations Theory. Berlin-Geudekberg-New York: Springer-Verlag, 1972