中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 1 期: 15～26
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Cantor 集上双 Lipschitz 自同构的最佳 Lipschitz 常数

熊瑛[①], 王丽莎[②], 奚李峰[③]*

① 华南理工大学数学科学学院, 广州 510641
② 湖北大学数学科学学院, 武汉 430062
③ 浙江万里学院数学研究所, 宁波 315100
* 通迅作者 E-mail: xilf@zwu.edu.cn

收稿日期: 2007-12-23; 接受日期: 2008-07-09
国家自然科学基金 (批准号: 10671180, 10571140, 10571063, 10631040, 11071164) 资助项目和中国科学院晨兴数学中心资助

摘要 设 $C_r = (rC_r) \cup (rC_r + 1 - r)$ 为自相似集, 其中 $r \in (0, 1/2)$, 设 $\mathrm{Aut}(C_r)$ 为 C_r 上的所有双 Lipschitz 自同构组成的集合. 证明了存在 $f^* \in \mathrm{Aut}(C_r)$, 使得

$$\mathrm{blip}(f^*) = \inf\{\mathrm{blip}(f) > 1 : f \in \mathrm{Aut}(C_r)\} = \min\left[1/r, \frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}\right],$$

其中

$$\mathrm{lip}(g) = \sup_{\substack{x,y\in C_r\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|},$$

且

$$\mathrm{blip}(g) = \max(\mathrm{lip}(g), \mathrm{lip}(g^{-1})).$$

关键词 分形 双 Lipschitz 自同构 Cantor 集

MSC(2000) 主题分类 **28A80**

1 引言

因为双 Lipschitz 映射保持集合的分形维数不变, 所以对集合之间的双 Lipschitz 等价性的研究是分形几何中很有趣的课题. 关于分形集的 Lipschitz 等价性已经有了不少结果. Cooper 和 Pignatro[1], Falconer 和 Marsh[2−4], David 和 Semmes[5], 奚李峰 [6, 7] 分别研究了 Cantor 集的形状, 近似 Lipschitz 等价, BPI 等价和拟 Lipschitz 等价.

在文献 [8] 中, Lyapina 研究了 Cantor 三分集 C 上的双 Lipschitz 自同构: 若 f 为 C 上的双 Lipschitz 自同构, 则

$$\mathrm{blip}(f) = 1 \quad 或 \quad \mathrm{blip}(f) \geqslant 74/39,$$

其中 $\mathrm{lip}(g)=\sup_{x\neq y}\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}$, $\mathrm{blip}(g)=\max(\mathrm{lip}(g),\mathrm{lip}(g^{-1}))$. 设 $C_r=(rC_r)\cup(rC_r+1-r)$ 为压缩比 $r\in(0,1/2)$ 的自相似集, $\mathrm{Aut}(C_r)$ 为 C_r 上双 Lipschitz 自同构组成的集合, 文献 [8] 中用同样的方法证明了对于所有的 $f\in\mathrm{Aut}(C_r)$,

$$\mathrm{blip}(f)=1\quad 或\quad \mathrm{blip}(f)\geqslant\min\left[1/r,\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}\right]. \tag{1}$$

文献 [9] 中进一步讨论了 $\mathbb{R}^1$ 上的一般自相似集. 设 $\{S_i\}_{i=1}^N$ 为压缩比为 $\{r_i\}_{i=1}^N$ 的自相似压缩映射族, 满足 $\{0,1\}\subset\bigcup_{i=1}^N S_i([0,1])\subset[0,1]$, 并且 $\{S_i([0,1])\}_{i=1}^N$ 互不相交. 设 $\{\delta_i\}_{i=1}^{N-1}$ 为集合 $[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^N S_i([0,1])$ 的连通分支的长度. 文献 [9] 得到了这样的结果: 设 $E=\bigcup_{i=1}^N S_i(E)$, 并且 $(\min_i\delta_i)/(\max_i\delta_i\cdot\max_i r_i)>1$, 则存在常数 $c>1$, 对于 E 上的任意双 Lipschitz 自同构 f,

$$\mathrm{blip}(f)=1\quad 或\quad \mathrm{blip}(f)\geqslant c. \tag{2}$$

在文献 [10] 中, 对于 $\mathbb{R}^1$ 上具有 Moran 结构的完全集得到了相同的结果: 存在常数 $c_0>1$, 对于任意的自同构 f, $\mathrm{blip}(f)=1$ 或 $\mathrm{blip}(f)\geqslant c_0$.

本文将证明对于自相似集 C_r, $\min[1/r,\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}]$ 是具有上述性质的最佳常数. 事实上, 我们得到了如下的结果:

定理 1 存在 C_r 上的双 Lipschitz 自同构 f_r^*, 使得

$$\mathrm{blip}(f_r^*)=\min\left[1/r,\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}\right]. \tag{3}$$

特别的, 存在 $f^*\in\mathrm{Aut}(C)$ 满足 $\mathrm{blip}(f^*)=74/39$.

在定理 1 的证明中, 我们将利用递归结构给出自同构 f_r^* 的具体构造.

对于一般的情形, 我们得到稍弱的结果. 设 $\{S_i\}_{i=1}^N$ 为压缩比为 $\{r_i\}_{i=1}^N$ 的自相似压缩映射族, 满足 $\{0,1\}\subset\bigcup_{i=1}^N S_i([0,1])\subset[0,1]$, 并且 $\{S_i([0,1])\}_{i=1}^N$ 互不相交. 设 $\{\delta_i\}_{i=1}^{N-1}$ 为集合 $[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^N S_i([0,1])$ 的连通分支的长度.

定理 2 设 $E=\bigcup_{i=1}^N S_i(E)$, 其中 $\{S_i\}_{i=1}^N$ 如上定义, 并且 $(\min_i\delta_i)/(\max_i\delta_i\cdot\max_i r_i)>1$. 则存在 $g\in\mathrm{Aut}(E)$, 使得

$$\mathrm{blip}(g)=\inf\{\mathrm{blip}(f)>1:f\in\mathrm{Aut}(E)\}>1.$$

2 预备知识

回顾自相似集的概念 [11, 12]. 给定 $r\in(0,1/2)$, 令 $S_0(x)=rx$, $S_1(x)=rx+(1-r)$. 设 $K=S_0(K)\cup S_1(K)$ 为相应的自相似集, 即 $K=C_r$.

对于任意的 $i_1\cdots i_n\in\{0,1\}^n$, 记

$$S_{i_1i_2\cdots i_n}=S_{i_1}\circ S_{i_2}\circ\cdots\circ S_{i_n},\quad K_{i_1\cdots i_n}=S_{i_1i_2\cdots i_n}(K),$$

易知 $S_{i_1i_2\cdots i_n}(x)=r^nx+(1-r)\sum_{k=1}^n(r^{k-1}i_k)$ 及

$$K_{i_1\cdots i_n}=\left\{(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(r^{k-1}j_k):j_k\in\{0,1\}\ 且\ j_1\cdots j_n=i_1\cdots i_n\right\},$$

则存在双射 $\pi:\Sigma_2\to K$, 使得

$$\{\pi(x_1x_2\cdots)\}=\bigcap_{n\geqslant1}S_{x_1x_2\cdots x_n}(K),$$

其中 $\Sigma_2=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

2.1 函数类 $\mathcal{D}^*$ 及主要引理

首先回顾 $\mathcal{D}^*$ 的定义 [8]. 称满足下面条件的双 Lipschitz 自同构 $f:K\to K$ 的全体为 $\mathcal{D}^*$: 若对任意的有限词 $i_1\cdots i_n\in\{0,1\}^n$, 存在同长的有限词 $j_1\cdots j_n\in\{0,1\}^n$, 使得

$$f(K_{i_1\cdots i_n})=K_{j_1\cdots j_n}.$$

如文献 [8] 所述, 函数类 $\mathcal{D}^*$ 具有如下性质:

(i) 设 $f\in\mathcal{D}^*$, 且 $f(K_{i_1\cdots i_t})=K_{j_1\cdots j_t}$, 则

$$\begin{cases}f(K_{i_1\cdots i_t0})=K_{j_1\cdots j_t0},\\ f(K_{i_1\cdots i_t1})=K_{j_1\cdots j_t1},\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(K_{i_1\cdots i_t0})=K_{j_1\cdots j_t1},\\ f(K_{i_1\cdots i_t1})=K_{j_1\cdots j_t0}.\end{cases}$$

(ii) 设 $f\in\mathcal{D}^*$, 且 $f(K_{i_1\cdots i_n})=K_{j_1\cdots j_n}$, 则对于任意 $m\leqslant n$,

$$f(K_{i_1\cdots i_m})=K_{j_1\cdots j_m}.$$

(iii) 设 $f\in\mathcal{D}^*$, 则 $f^{-1}\in\mathcal{D}^*$.

引理 1[8] 设 $f\in\mathrm{Aut}(K)$, 且 $\mathrm{blip}(f)<1/r$, 则 $f\in\mathcal{D}^*$.

记

$$[1]^l=\overbrace{1\cdots1}^{l},[0]^l=\overbrace{0\cdots0}^{l}.$$

可得到下面的估计:

引理 2 设 $f\in\mathcal{D}^*$. 对于任意 $x,y\in K$, 设 $x\in K_{i_1\cdots i_n0}$, $y\in K_{i_1\cdots i_n1}$, 则

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\leqslant\max\left(\frac{|f(x^*)-f(y^*)|}{|x^*-y^*|},\frac{1}{1-r}\right),\tag{4}$$

其中 $\{x^*\}=\bigcap_{l\geqslant1}K_{i_1\cdots i_n0[1]^l}=K_{i_1\cdots i_n0[1]^\infty}$, $\{y^*\}=K_{i_1\cdots i_n1[0]^\infty}$.

证明 不失一般性, 可假设 $i_1\cdots i_n$ 为空词. 事实上, 若 $f(K_{i_1\cdots i_n})=K_{j_1\cdots j_n}$, 则可定义双 Lipschitz 自同构 $g=S_{j_1\cdots j_n}^{-1}\circ f\circ S_{i_1\cdots i_n}$, 并注意到 $g\in\mathcal{D}^*$. 如果对于任意的 $x'\in[0,r]\cap K$ 和 $y'\in[1-r,1]\cap K$, 有

$$\frac{|g(x')-g(y')|}{|x'-y'|}\leqslant\max\left(\frac{|g(1-r)-g(r)|}{|(1-r)-r|},\frac{1}{1-r}\right),\tag{5}$$

则可得到估计式 (4), 因为对于 $x=S_{i_1\cdots i_n}x'$ 和 $y=S_{i_1\cdots i_n}y'$, 有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=\frac{|f(S_{i_1\cdots i_n}x')]-f(S_{i_1\cdots i_n}y')|}{|S_{i_1\cdots i_n}x'-S_{i_1\cdots i_n}y'|}=\frac{|g(x')-g(y')|}{|x'-y'|},$$
$$\frac{|f(x^*)-f(y^*)|}{|x^*-y^*|}=\frac{|g(1-r)-g(r)|}{|(1-r)-r|}.$$

下面验证不等式 (5). 假设 $K_{0[1]^{t-1}}$ 是包含 r 和 x' 的最小基本区间, 则 $x'\in K_{0[1]^{t-1}0}$, 且 $|x'-r|\geqslant(1-r)r^t$. 注意到 $g(K_{0[1]^{t-1}})$ 为一个 t 级基本区间, 故

$$|g(x')-g(r)|\leqslant r^t\quad\text{且}\quad|x'-r|\geqslant(1-r)r^t,$$

同样可证明存在某个整数 l, 满足

$$|g(1-r)-g(y')|\leqslant r^l\quad\text{且}\quad|(1-r)-y'|\geqslant(1-r)r^l.$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{|g(x')-g(y')|}{|x'-y'|}&\leqslant\frac{|g(r)-g(1-r)|+|g(x')-g(r)|+|g(y')-g(1-r)|}{|(1-r)-r|+|x'-r|+|y'-(1-r)|}\\&\leqslant\frac{|g(r)-g(1-r)|+r^t+r^l}{|(1-r)-r|+(1-r)(r^t+r^l)}\\&\leqslant\max\left(\frac{|g(1-r)-g(r)|}{|(1-r)-r|},\frac{1}{1-r}\right).\end{aligned}$$

2.2 函数的递归结构

令 $\Sigma_2^*=\{i_1\cdots i_k\colon k\in\mathbb{N},$ 对于任意 $r\geqslant 1,\ i_r=0$ 或 $1\}$ 为所有由 0 和 1 组成的非空有限词的集合, $\Sigma_2=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 为所有由 0 和 1 组成的无限词的集合. 称 Σ_2^* 的子集 A 为截集 [4], 如果对于任意无穷词 $(i_1i_2\cdots)\in\Sigma_2$, 都有唯一的整数 k, 使得 $(i_1i_2\cdots i_k)\in A$.

设 $[i_1\cdots i_t]\subset\Sigma_2$ 为有限词 $i_1\cdots i_t$ 所对应的柱集. 设 $A_0,A_1,A_2,\dots,A_m$ 为 m 个截集, 双 Lipschitz 自同构 $g_0,\dots,g_n$ 属于函数族 $\mathcal{G}^*(\Sigma_2)$, 其定义如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^*(\Sigma_2)=\{f:\Sigma_2\to\Sigma_2\mid &\text{ 对于任意 } k\in\mathbb{N} \text{ 及任意 } i_1\cdots i_k\in\Sigma_2^*,\\ &\text{ 存在 } j_1\cdots j_k\in\Sigma_2^*,\ \text{使得 } f([i_1\cdots i_k])=[j_1\cdots j_k]\}.\end{aligned}$$

假设存在映射

$$\begin{aligned}&\tau_i: A_i\to\Sigma_2^*,\quad i=0,\dots,m,\\&\beta:\bigcup_{i=0}^m\{i\}\times A_i\to\{0,1,\dots,m\},\\&\gamma:\bigcup_{i=0}^m\{i\}\times A_i\to\{0,\cdots,n\},\end{aligned}$$

其中约定

$$g_0(x)\equiv f_0(x)\equiv x,\qquad A_0=\{0,1\}$$

及

$$\tau_0(0)=0,\quad \tau_0(1)=1,\quad \beta(0,0)=\gamma(0,0)=\beta(0,1)=\gamma(0,1)=0.$$

利用上述记号, 我们可以给出下面的描述函数递归结构的引理:

引理 3 存在唯一的函数族 $\{f_1,\dots,f_m\}:\Sigma_2\to\Sigma_2$, 对于任意 $(i,\mathbf{j})\in\bigcup_{t=1}^m\{t\}\times A_t$, 以及任意 $w\in\Sigma_2$, 满足

$$f_i(\mathbf{j}w)=\tau_i(\mathbf{j})[g_{\gamma(i,\mathbf{j})}\circ f_{\beta(i,\mathbf{j})}](w).$$

证明 注意到 $|\tau_i(\mathbf{j})|\geqslant 1$. 又因 $\{g_i\}_{i=0}^n\subset\mathcal{G}^*(\Sigma_2)$, 从而对于任意的有限词 $\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k$, 其中 $\mathbf{j}_t\in A_{i_t}$, $i_1=i$, $i_{t+1}=\beta(i_t,\mathbf{j}_t)$, 存在唯一的有限词 $u_1\cdots u_s$, 它的长度 $s\geqslant k$, 并且对于所有的 $w\in\Sigma_2$,

$$f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_kw)\in[u_1\cdots u_s].$$

令 $k\to\infty$, 我们证明了 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 存在且唯一.

3 定理 1 的证明

考虑以下两种情形.

情形 1 $1/r \leqslant \frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}$.

设 $f^*: K \to K$, 定义如下:

$$\begin{aligned} f^*|_{K_{00}}(x) &= x/r, \\ f^*|_{K_{01}}(x) &= x+(1-r)^2, \\ f^*|_{K_1}(x) &= rx+(1-r), \end{aligned}$$

则 $f^*(K_{00}) = K_0$, $f^*(K_{01}) = K_{10}$ 且 $f^*(K_1) = K_{11}$. 易知

$$\mathrm{blip}(f^*) = \frac{1}{r}. \tag{6}$$

情形 2 $1/r > \frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}$.

我们将在 Σ_2 上用递归的方法定义函数. 令

$$\begin{aligned} g_0 &= id: \Sigma_2 \to \Sigma_2, \\ g_1 &= F: \Sigma_2 \to \Sigma_2. \end{aligned}$$

对于任意 $w = x_1x_2x_3\cdots \in \Sigma_2$, 满足

$$g_0(w) \equiv w \quad 且 \quad g_1(w) = F(w) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\cdots.$$

取截集

$$\begin{aligned} A_1 &= \{00, 01, 1\}, \\ A_2 &= \{000, 001, 01, 1\}, \\ A_3 &= \{0, 100, 101, 110, 111\}, \\ A_4 &= \{00, 01, 1\}. \end{aligned}$$

则由引理 3, 存在唯一的 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 满足

$$\begin{cases} f_1(00w) = 11f_2(w), \\ f_1(01w) = 10F(w), \\ f_1(1w) \ \ = 0[F\circ f_1](w), \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(000w) = 001f_2(w), \\ f_2(001w) = 000f_3(w), \\ f_2(01w) \ \ = 01w, \\ f_2(1w) \ \ \ \ = 1f_1(w), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(0w) \ \ \ \ = 1F(w), \\ f_3(100w) = 001f_2(w), \\ f_3(101w) = 000f_3(w), \\ f_3(110w) = 010w, \\ f_3(111w) = 011f_4(w), \end{cases} \qquad \begin{cases} f_4(00w) \ \ = 11f_2(w), \\ f_4(01w) \ \ = 10F(w), \\ f_4(100w) = 001f_2(w), \\ f_4(101w) = 000f_3(w), \\ f_4(110w) = 010w, \\ f_4(111w) = 011f_4(w). \end{cases}$$

注意到其中 $f_4(1w) = f_3(1w)$, 并且

$$|\tau_i(\mathbf{j})| = |\mathbf{j}| \ 对于任意的 \ i \ 及 \ \mathbf{j} \in A_i. \tag{7}$$

通过计算, 我们还可以得到

$$\begin{cases} f_1^{-1}(0w) &= 1[f_1^{-1} \circ F](w), \\ f_1^{-1}(10w) &= 01F(w), \\ f_1^{-1}(11w) &= 00f_2^{-1}(w), \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2^{-1}(000w) &= 001f_3^{-1}(w), \\ f_2^{-1}(001w) &= 000f_2^{-1}(w), \\ f_2^{-1}(01w) &= 01w, \\ f_2^{-1}(1w) &= 1f_1^{-1}(w), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3^{-1}(000w) &= 101f_3^{-1}(w), \\ f_3^{-1}(001w) &= 100f_2^{-1}(w), \\ f_3^{-1}(010w) &= 110w, \\ f_3^{-1}(011w) &= 111f_4^{-1}(w), \\ f_3^{-1}(1w) &= 0F(w), \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} f_4^{-1}(000w) &= 101f_3^{-1}(w), \\ f_4^{-1}(001w) &= 100f_2^{-1}(w), \\ f_4^{-1}(010w) &= 110w, \\ f_4^{-1}(011w) &= 111f_4^{-1}(w), \\ f_4^{-1}(10w) &= 01F(w), \\ f_4^{-1}(11w) &= 00f_2^{-1}(w). \end{cases}$$

其中 $f_4^{-1}(0w) = f_3^{-1}(0w)$. 类似于引理 3 的证明, 同样可以得到满足上述条件的 $\{f_i^{-1}\}_{i=1}^4$ 是存在且唯一的.

设 $\pi : \Sigma_2 \to K$ 为两个空间之间的自然同构. 对于 $i = 1, 2, 3, 4$, 设

$$F_i = \pi \circ f_i \circ \pi^{-1} : K \to K.$$

我们将证明对于任意的 x 和 y,

$$\frac{|F_i(x) - F_i(y)|}{|x - y|} \leqslant \frac{1 - 2r^3 - r^4}{(1 - 2r)(1 + r + r^2)} \hat{=} \zeta_r.$$

假设

$$\pi(x) = \mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 \cdots \mathbf{j}_k \cdots, \quad \pi(y) = \mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 \cdots \mathbf{j}_k \cdots.$$

我们需要下面的引理:

引理 4 存在 $u_1 \cdots u_s$, 其长度 $s = |\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 \cdots \mathbf{j}_k|$, 且满足

$$f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 \cdots \mathbf{j}_k w) = u_1 \cdots u_s [g \circ f_{i_{k+1}}](w), \quad \text{对于任意 } w \in \Sigma_2, \tag{8}$$

其中 $i_{k+1} = \beta(i_k, \mathbf{j}_k)$, 并且 $g = id$ 或 F.

证明 对于任意 $w \in \Sigma_2$, 有

$$F(x_1 \cdots x_t w) = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_t) F(w). \tag{9}$$

同样

$$id(x_1 \cdots x_t w) = x_1 \cdots x_t \; id(w). \tag{10}$$

此外, 因 $F \circ F = id$, 故 $\{F, id\}$ 是一个群. 由此, 再结合 (9) 和 (10) 式及下式

$$f_i(\mathbf{j}w) = \tau_i(\mathbf{j})[g_{\gamma(i,\mathbf{j})} \circ f_{\beta(i,\mathbf{j})}](w),$$

其中 $g_{\gamma(i,\mathbf{j})} \in \{id, F\}$, 通过逐步递归可得到 (8) 式.

以下, 分两种情形讨论.

情形 A 设 $\mathbf{j}_k \in A_{i_k}$ 满足 $\beta(i_k, \mathbf{j}_k) = 0$, 则有

$$f_{\beta(i_k,\mathbf{j}_k)} = id.$$

由 (8) 式,

$$f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k w) = u_1\cdots u_s[g](w),$$

其中 $g = id$ 或 F, 由此可得

$$\frac{|F_i(x) - F_i(y)|}{|x - y|} = 1.$$

情形 B 设

$$\pi(x) = \mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k\mathbf{j}_{k+1}\cdots,$$
$$\pi(y) = \mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k\mathbf{j}'_{k+1}\cdots,$$

其中

$$\mathbf{j}_{k+1} \neq \mathbf{j}'_{k+1}, \quad i_{k+1} = \beta(i_k, \mathbf{j}_k) > 0.$$

由 (8) 式,

$$f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k w) = u_1\cdots u_s[g\circ f_{i_{k+1}}](w),$$

其中 $g \in \{id, F\}$.

令

$$x = S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}x', \quad y = S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}y',$$

其中

$$x' \in K_{\mathbf{j}_{k+1}}, \quad y' \in K_{\mathbf{j}'_{k+1}}. \tag{11}$$

因 $\mathrm{blip}(\pi g\pi^{-1}) = 1$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{|F_i(x) - F_i(y)|}{|x - y|} &= \frac{|\pi\circ f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k\pi^{-1}(x')) - \pi\circ f_i(\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k\pi^{-1}(y'))|}{|S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}x' - S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}y'|}\\
&= \frac{|S_{u_1\cdots u_s}\circ\pi[g\circ f_{i_{k+1}}(\pi^{-1}(x'))] - S_{u_1\cdots u_s}\circ\pi[g\circ g_{i_{k+1}}(\pi^{-1}(y'))]|}{|S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}x' - S_{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2\cdots\mathbf{j}_k}y'|}\\
&= \frac{|(\pi g\pi^{-1})\circ(\pi f_{i_{k+1}}\pi^{-1})(x') - (\pi g\pi^{-1})\circ(\pi f_{i_{k+1}}\pi^{-1})(y')|}{|x' - y'|}\\
&= \frac{|F_{i_{k+1}}(x') - F_{i_{k+1}}(y')|}{|x' - y'|}.
\end{aligned}$$

此外还需证明

$$F_{i_{k+1}} \in \mathcal{D}^*. \tag{12}$$

为此, 由引理 4 知对于任意有限词 $i_1\cdots i_t$, 存在 $j_1\cdots j_t$ 满足 $f_i([i_1\cdots i_t]) = [j_1\cdots j_t]$, 所以

$$F_i(K_{i_1\cdots i_t}) = (\pi f_i\pi^{-1})\pi([i_1\cdots i_t]) = \pi([j_1\cdots j_t]) = K_{j_1\cdots j_t}.$$

另外, 由 $f_i^{-1}: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 的存在性知 $F_i^{-1}: K \to K$ 也存在, 从而 $F_i \in \mathcal{D}^*$. 现在我们可以利用 (11) 和 (12) 式及引理 2 得到

$$\frac{|F_i(x) - F_i(y)|}{|x - y|} \leqslant \max\left(\frac{1}{1 - r}, \max_{p,q}\frac{|F_p(a_{pq}) - F_p(b_{pq})|}{|a_{pq} - b_{pq}|}\right),$$

其中 $\{\pi^{-1}(a_{pq}), \pi^{-1}(b_{pq})\}_{pq}$ 如表 1 所示. 因为 $f_4(1w) = f_3(1w)$, 我们在表 1 中略去了一些重复计算.

最后, 我们得到对于 $i=1,2,3,4$,

$$\operatorname{lip}(F_i)=\zeta_r=\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}.$$

另一方面, 对于 $\{F_i^{-1}\}_{i=1}^4$, 同样可以得到

$$\frac{|F_i^{-1}(x)-F_i^{-1}(y)|}{|x-y|}\leqslant\max\left(\frac{1}{1-r},\max_{s,t}\frac{|F_s^{-1}(c_{st})-F_s^{-1}(d_{st})|}{|c_{st}-d_{st}|}\right),$$

其中 $\{\pi^{-1}(c_{st}),\pi^{-1}(d_{st})\}_{st}$ 如表 2 所示. 因为 $f_4^{-1}(0w)=f_3^{-1}(0w)$, 我们在表 2 中略去了一些重复计算.

表 1

$\{a_{pq},b_{pq}\}_{pq}$ 和 $F_p(a_{pq}),F_p(b_{pq})$	$\frac{\lvert F_p(a_{pq})-F_p(b_{pq})\rvert}{\lvert a_{pq}-b_{pq}\rvert}$
$a_{11}\xrightarrow{\pi^{-1}}00(111)^\infty\xrightarrow{f_1}11(10)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r-r^3}{1+r}$	$\frac{1-2r^2}{(1+r)(1-2r)}<\zeta_r$
$b_{11}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(000)^\infty\xrightarrow{f_1}10(111)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r+r^2$	
$a_{12}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{f_1}10(000)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$b_{12}\xrightarrow{\pi^{-1}}1(000)^\infty\xrightarrow{f_1}00(011)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^3+r^4}{1+r+r^2}$	
$a_{21}\xrightarrow{\pi^{-1}}000(111)^\infty\xrightarrow{f_2}001(10)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^2+r^3-r^4}{1+r}$	$\frac{1-2r^2}{(1+r)(1-2r)}<\zeta_r$
$b_{21}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(000)^\infty\xrightarrow{f_2}000(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r^3$	
$a_{22}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(111)^\infty\xrightarrow{f_2}000(011)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^4+r^5}{1+r+r^2}$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$b_{22}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(000)^\infty\xrightarrow{f_2}01(000)^\infty\xrightarrow{\pi}r(1-r)$	
$a_{23}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{f_2}01(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$b_{23}\xrightarrow{\pi^{-1}}1(000)^\infty\xrightarrow{f_2}111(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r+r^2-r^3-r^4}{1+r+r^2}$	
$a_{31}\xrightarrow{\pi^{-1}}0(111)^\infty\xrightarrow{f_3}1(000)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r$	$\frac{1-r^2-r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$b_{31}\xrightarrow{\pi^{-1}}100(000)^\infty\xrightarrow{f_3}001(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^2}{1+r+r^2}$	
$a_{32}\xrightarrow{\pi^{-1}}100(111)^\infty\xrightarrow{f_3}001(10)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^2+r^3-r^4}{1+r}$	$\frac{1-2r^2}{(1+r)(1-2r)}<\zeta_r$
$b_{32}\xrightarrow{\pi^{-1}}101(000)^\infty\xrightarrow{f_3}000(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r^3$	
$a_{33}\xrightarrow{\pi^{-1}}101(111)^\infty\xrightarrow{f_3}000(011)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^4+r^5}{1+r+r^2}$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$b_{33}\xrightarrow{\pi^{-1}}110(000)^\infty\xrightarrow{f_3}010(000)^\infty\xrightarrow{\pi}r(1-r)$	
$a_{34}\xrightarrow{\pi^{-1}}110(111)^\infty\xrightarrow{f_3}010(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r-r^2+r^3$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$b_{34}\xrightarrow{\pi^{-1}}111(000)^\infty\xrightarrow{f_3}01111(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r+r^2+r^3-r^5-r^6}{1+r+r^2}$	
$a_{41}\xrightarrow{\pi^{-1}}00(111)^\infty\xrightarrow{f_4}11(10)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r-r^3}{1+r}$	$\frac{1-2r^2}{(1+r)(1-2r)}<\zeta_r$
$b_{41}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(000)^\infty\xrightarrow{f_4}10(111)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r+r^2$	
$a_{42}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{f_4}10(000)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r$	$\frac{1-r^2-r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$b_{42}\xrightarrow{\pi^{-1}}1(000)^\infty\xrightarrow{f_4}(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^2}{1+r+r^2}$	

最后, 得到对于 $i=1,2,3,4$,

$$\operatorname{lip}(F_i^{-1})=\zeta_r=\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}.$$

4　定理 2 的证明

在连续函数空间 $C(E,E)=\{f|\ f:E\to E$ 连续 $\}$ 上赋予度量

$$d(f,g)=\sup_{x\in E}|f(x)-g(x)|.$$

考虑 $C(E,E)$ 的子空间 $(\mathrm{Aut}(E),d)$. 容易证明下述事实: 若在度量空间 $(\mathrm{Aut}(E),d)$ 上 $f_n\to f$, 则

$$\mathrm{blip}(f)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathrm{blip}(f_n).$$

由此, 我们得到下面的两个引理.

表 2

$\{c_{st},d_{st}\}_{st}$ 和 $F_s^{-1}(c_{st}),F_s^{-1}(d_{st})$	$\frac{\lvert F_s^{-1}(c_{st})-F_s^{-1}(d_{st})\rvert}{\lvert c_{st}-d_{st}\rvert}$
$c_{11}\xrightarrow{\pi^{-1}}0(111)^\infty\xrightarrow{f_1^{-1}}1(100)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r-r^3}{1+r+r^2}$	$\frac{1-r^2-2r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$d_{11}\xrightarrow{\pi^{-1}}10(000)^\infty\xrightarrow{f_1^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r$	
$c_{12}\xrightarrow{\pi^{-1}}10(111)^\infty\xrightarrow{f_1^{-1}}01(00)^\infty\xrightarrow{\pi}r(1-r)$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{12}\xrightarrow{\pi^{-1}}11(000)^\infty\xrightarrow{f_1^{-1}}00(001)(101)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^4+r^5}{1+r+r^2}$	
$c_{21}\xrightarrow{\pi^{-1}}000(111)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}001(000)^\infty\xrightarrow{\pi}r^2(1-r)$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{21}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(000)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}000(001)(101)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^5+r^6}{1+r+r^2}$	
$c_{22}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(111)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}000(100)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^3}{1+r+r^2}$	$\frac{1-r^2-r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$d_{22}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(000)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}01(000)^\infty\xrightarrow{\pi}r(1-r)$	
$c_{23}\xrightarrow{\pi^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r$	$\frac{1-r^2-2r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$d_{23}\xrightarrow{\pi^{-1}}1(000)^\infty\xrightarrow{f_2^{-1}}1100(100)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r-r^3}{1+r+r^2}$	
$c_{31}\xrightarrow{\pi^{-1}}000(111)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}101(000)^\infty\xrightarrow{\pi}(1-r)(1+r^2)$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{31}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(000)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}100(001)(101)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1-r^3+r^5+r^6}{1+r+r^2}$	
$c_{32}\xrightarrow{\pi^{-1}}001(111)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}100(100)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1}{1+r+r^2}$	$\frac{1-r^2-r^3}{(1+r+r^2)(1-2r)}<\zeta_r$
$d_{32}\xrightarrow{\pi^{-1}}010(000)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}110(000)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r^2$	
$c_{33}\xrightarrow{\pi^{-1}}010(111)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}110(111)^\infty\xrightarrow{\pi}1-r^2+r^3$	$\frac{1-r^2-r^3}{(1-2r)(1+r+r^2)}<\zeta_r$
$d_{33}\xrightarrow{\pi^{-1}}011(000)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}111(101)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r+r^2-r^4}{1+r+r^2}$	
$c_{34}\xrightarrow{\pi^{-1}}011(111)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}111(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r+r^2-r^3-r^4}{1+r+r^2}$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{34}\xrightarrow{\pi^{-1}}1(000)^\infty\xrightarrow{f_3^{-1}}0(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r$	
$c_{41}\xrightarrow{\pi^{-1}}0(111)^\infty\xrightarrow{f_4^{-1}}111(001)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{1+r+r^2-r^3-r^4}{1+r+r^2}$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{41}\xrightarrow{\pi^{-1}}10(000)^\infty\xrightarrow{f_4^{-1}}01(111)^\infty\xrightarrow{\pi}r$	
$c_{42}\xrightarrow{\pi^{-1}}10(111)^\infty\xrightarrow{f_4}01(000)^\infty\xrightarrow{\pi}r(1-r)$	$\frac{1-2r^3-r^4}{(1-2r)(1+r+r^2)}=\zeta_r$
$d_{42}\xrightarrow{\pi^{-1}}11(000)^\infty\xrightarrow{f_4}00(001)(101)^\infty\xrightarrow{\pi}\frac{r^4+r^5}{1+r+r^2}$	

引理 5 设 $c>1$, 则集合

$$\mathrm{Aut}_c(E)=\{f\in\mathrm{Aut}(E)\colon\mathrm{blip}(f)\leqslant c\}$$

是度量空间 $(\mathrm{Aut}(E),d)$ 上的紧集.

令 $b_*=\inf\{\mathrm{blip}(f)>1\colon f\in\mathrm{Aut}(E)\}$. 由文献 [9] 或 [10]可知, 若 $\frac{\min_j\delta_j}{(\max_j\delta_j)(\max r_j)}>1$ 成立, 则 $b_*>1$.

引理 6 设 $\{f_i\}_{i\geqslant 1}\subset \mathrm{Aut}(E)$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{blip}(f_i)=b_*$. 如果存在常数 $c_0>0$, $c_1>1$ 以及 $\{(x_i,y_i)\}_{i\geqslant 1}\subset E\times E$, 使得对于任意 $i\geqslant 1$,

$$|x_i-y_i|\geqslant c_0 \quad 且 \quad \frac{|f_i(x_i)-f_i(y_i)|}{|x_i-y_i|}\geqslant c_1>1,$$

则存在函数 $g\in\mathrm{Aut}(E)$, 使得

$$\mathrm{blip}(g)=\inf\{\mathrm{blip}(f)>1\colon f\in\mathrm{Aut}(E)\}.$$

定理 2 的证明 事实上, 只需要构造一列函数, 使它满足引理 6 的条件. 固定 $b_1\in(1,b_*)$, 设 $c>b_*$, 取 $\{f_i\}\subset\mathrm{Aut}_c(E)$, 使得对于所有的 $i\geqslant 1$,

$$\mathrm{blip}(f_i)>b_1 \quad 且 \quad \lim_{i\to\infty}\mathrm{blip}(f_i)=b_*.$$

记 $S_{i_1\cdots i_n}=S_{i_1}\circ S_{i_2}\circ\cdots\circ S_{i_n}$, $r_{i_1i_2\cdots i_n}=r_{i_1}\cdot r_{i_2}\cdot\cdots\cdot r_{i_n}$, $E_{i_1\cdots i_n}=S_{i_1\cdots i_n}(E)$. 令

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(E)=\{f:E\to E\mid &对于任意有限词\ i_1i_2\cdots i_n,\\ &存在同长的有限词\ j_1\cdots j_n\ 使得\ f(E_{i_1\cdots i_n})=E_{j_1\cdots j_n}\}.\end{aligned}$$

我们将以适当的方式由函数列 $\{f_i\}_i$ 构造一列新的函数 $\{g_i\}_i$. 固定 $i\geqslant 1$, 根据 f_i 的性质, 需要考虑两种情形.

情形 1 $f_i\in\mathcal{G}(E)$;

情形 2 $f_i\notin\mathcal{G}(E)$.

对于情形 1, 又需要考虑两种不同的情形.

情形 1.1 对于所有满足 $f(E_{i_1\cdots i_k})=E_{j_1j_2\cdots j_k}$ 的有限词 $i_1\cdots i_k, j_1\cdots j_k$, 都有 $r_{i_1i_2\cdots i_k}=r_{j_1j_2\cdots j_k}$.

不失一般性, 假设存在 $x_i'\in E_{v_1v_2\cdots v_kv_{k+1}}$, $y_i'\in E_{v_1v_2\cdots v_kv_{k+1}'}$, 其中 $v_{k+1}\neq v_{k+1}'$, 满足

$$\frac{|f_i(x_i')-f_i(y_i')|}{|x_i'-y_i'|}\geqslant b_1.$$

设 $f_i(E_{v_1v_2\cdots v_k})=E_{w_1w_2\cdots w_k}$. 令

$$g_i=S^{-1}_{w_1w_2\cdots w_k}\circ f_i\circ S_{v_1v_2\cdots v_k}, \tag{13}$$

则

$$g_i\in\mathrm{Aut}_c(E) \quad 且 \quad \mathrm{blip}(g_i)\leqslant\mathrm{blip}(f_i). \tag{14}$$

记 $x_i=S^{-1}_{v_1v_2\cdots v_k}(x_i')$, $y_i=S^{-1}_{v_1v_2\cdots v_k}(y_i')$. 因 $r_{v_1v_2\cdots v_k}=r_{w_1w_2\cdots w_k}$, 我们得到

$$|x_i-y_i|\geqslant\min_j\delta_j \quad 且 \quad \frac{|g_i(x_i)-g_i(y_i)|}{|x_i-y_i|}\geqslant b_1. \tag{15}$$

情形 1.2 存在有限词 $v_1v_2\cdots v_{k-1}$, 使得

$$r_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}=r_{w_1w_2\cdots w_{k-1}}, \quad 但 \quad r_{v_k}\neq r_{w_k}.$$

因 $f_i\in\mathcal{G}(E)$, 故有 $f_i(E_{v_1v_2\cdots v_{k-1}})=E_{w_1w_2\cdots w_{k-1}}$, 且 $r_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}=r_{w_1w_2\cdots w_{k-1}}$. 令

$$g_i=S^{-1}_{w_1w_2\cdots w_{k-1}}\circ f_i\circ S_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}, \tag{16}$$

则

$$g_i\in\mathrm{Aut}_c(E), \quad 且 \quad \mathrm{blip}(g_i)\leqslant\mathrm{blip}(f_i). \tag{17}$$

对此, 可假设 $r_{v_n}<r_{w_n}$ (否则考虑 f^{-1}). 取 x_i', $y_i'\in E_{v_1v_2\cdots v_k}$, 使得 $f_i(x_i')$ 和 $f_i(y_i')$ 为 $S_{w_1w_2\cdots w_k}([0,1])$ 的两个端点, 令

$$x_i=S^{-1}_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}x_i', \quad y_i=S^{-1}_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}y_i'.$$

注意到 $r_{v_1v_2\cdots v_{k-1}}=r_{w_1w_2\cdots w_{k-1}}$, 并且 $f_i\in\mathrm{Aut}_c(E)$, 得到

$$|x_i-y_i|\geqslant c^{-1}|g_i(x_1)-g_i(y_i)|\geqslant c^{-1}\min_j r_j. \tag{18}$$

因 $r_{v_k}<r_{w_k}$, 故

$$\frac{|g_i(x_i)-g_i(y_i)|}{|x_i-y_i|}\geqslant\min_{j,j'}\left\{\frac{r_j}{r_{j'}}:r_j>r_{j'}\right\}\hat{=}b_2>1. \tag{19}$$

对于情形 2, 不失一般性, 可假设存在 $k\geqslant 0$, 使得对于任意长度不大于 k 的有限词 $i_1\cdots i_t$, 都存在 $j_1\cdots j_t$, 使得 $f(E_{i_1\cdots i_t})=E_{j_1\cdots j_t}$, 并且存在有限词 $v_1v_2\cdots v_{k+1}$, 及不同的整数 $w_{k+1},w'_{k+1}\in\{1,\dots,N\}$, 满足 $f_i(E_{v_1v_2\cdots v_k})=E_{w_1w_2\cdots w_k}$, 且

$$f_i(E_{v_1\cdots v_{k+1}})\cap E_{w_1\cdots w_kw_{k+1}}\neq\emptyset,\ f_i(E_{v_1\cdots v_{k+1}})\cap E_{w_1\cdots w_kw'_{k+1}}\neq\emptyset. \tag{20}$$

如果 $r_{v_1v_2\cdots v_k}\neq r_{w_1w_2\cdots w_k}$, 我们可以用情形 1.2 中的方法构造 $g_i\in\mathrm{Aut}_c(E)$ 和 $(x_i,y_i)\in E\times E$. 现在假设

$$r_{v_1v_2\cdots v_k}=r_{w_1w_2\cdots w_k}. \tag{21}$$

令

$$g_i=S^{-1}_{w_1\cdots w_k}\circ f_i\circ S_{v_1\cdots v_k}, \tag{22}$$

则

$$g_i\in\mathrm{Aut}_c(E)\quad 且\quad \mathrm{blip}(g_i)\leqslant\mathrm{blip}(f_i). \tag{23}$$

注意到

$$g_i(E_{v_{k+1}})\cap E_{w_{k+1}}\neq\emptyset\quad 且\quad g_i(E_{v_{k+1}})\cap E_{w'_{k+1}}\neq\emptyset.$$

取 $t,t'\in E_{v_{k+1}}$, 满足 $g_i(t)\in E_{w_{k+1}}$, $g_i(t')\in E_{w'_{k+1}}$. 由集合 E_{v_k} 的构造, 我们可以在 E_{v_k} 内找到点列 $t=t_0<t_1<\cdots<t_n=t'$, 满足

$$|t_{m+1}-t_m|\leqslant(r_{v_k})\max_j\delta_j,\qquad 对于\ m=0,1,\dots,n-1.$$

设 $g(t_m)\in E_{b_m}$, 则存在 m^*, 使得 $b_{m^*}\neq b_{m^*+1}$, 从而

$$|g_i(t_{m^*})-g_i(t_{m^*+1})|\geqslant\min_j\delta_j,$$

并且

$$\frac{|g_i(t_{m^*})-g_i(t_{m^*+1})|}{|t_{m^*}-t_{m^*+1}|}\geqslant\frac{\min_j\delta_j}{(\max_j\delta_j)(\max r_j)}\hat{=}b_3>1. \tag{24}$$

注意到 $g_i\in\mathrm{Aut}_c(E)$, 所以

$$|t_{m^*}-t_{m^*+1}|\geqslant c^{-1}|g_i(t_{m^*})-g_i(t_{m^*+1})|\geqslant c^{-1}\min_j\delta_j, \tag{25}$$

故可以取

$$x_i=t_{m^*},\qquad y_i=t_{m^*+1}.$$

对函数列 $\{g_i\}$ 应用引理 6, 我们可以找到一子列 $\{g_{n_i}\}$, 满足 $g=\lim_{n_i\to\infty}g_{n_i}$, 且

$$\mathrm{blip}(g)=b_*=\inf\{\mathrm{blip}(f)>1:\ f\in\mathrm{Aut}(E)\}.$$

证毕.

参考文献

1 Cooper D, Pignatro T. On the shape of Cantor set. *J Differential Geom*, **28**: 203–221 (1988)

2 Falconer K J. Fractal Geometry—Mathematical Foundation and Applications. New York: John Wiley, 1991

3 Falconer K J, Marsh D T. Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension. *Nonlinearity*, **2**: 489–493 (1989)

4 Falconer K J, Marsh D T. On the Lipschitz equivalence of Cantor sets. *Mathematika*, **39**: 223–233 (1992)

5 David G, Semmes S. Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-similar Geometry Through Metric and Measure. Oxford: Oxford University Press, 1997

6 Xi L F. Lipschitz equivalence of self-conformal. *J London Math Soc*, **70**(2): 369–382 (2004)

7 Xi L F. Quasi Lipschitz equivalence of self-conformal sets. *Israel J Math*, **160**: 1–21 (2007)

8 Lyapina M S. On the Lipschitz constant for a nonisometric bi-Lipschitz transformation of Cantor set. *J Math Sci*, **120**(2): 1109–1116 (2004)

9 Fan S, Guo Q L, Xi L F. Lipschitz constant for bi-Lipschitz automorphism of self-similar fractal. *Progr Natur Sci*, **16**(4): 415–420 (2006)

10 Guo Q L, Wu M, Xi L F. Lipschitz constant for bi-Lipschitz automorphism on Moran-like sets. *J Math Anal Appl*, **336**: 937–952 (2007)

11 Hutchinson J E. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ Math J*, **30**: 713–747 (1981)

12 文志英. 分形几何的数学基础. 上海: 上海科技教育出版社, 2000